

DUREE : 4H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

1- On fait l'hypothèse les fonctions g et h , dérivables sur $\mathbb{R}$ sont telles que $x : g(x) = h(x)e^{-x}$

a- Montre que g est solution de (E_n) si et seulement si pour tout réel x , $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$ **0.5pt**

b- En déduire la fonction $h(x)$ associée à une solution g , sachant que $h(0) = 0$. **0.5pt**

c- Détermine alors la fonction g **0.25pt**

2- Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On introduit une seconde équation différentielle $(F) : y' + y = 0$

a- Montre que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F) . **0.75pt**

b- Résous l'équation (F) . **0.75pt**

c- Détermine la solution générale φ de l'équation (E_n) . **0.5pt**

d- Détermine la solution f de l'équation (E_n) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par l'origine O . **0.75pt**

EXERCICE 2 : (6 points)

A- On dispose de deux urnes dont l'une U_1 contenant 8 boules numérotées : 0 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 et l'autre U_2 contenant 5 boules numérotées : 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2. Les boules sont indiscernables au toucher.

1- On tire au hasard et successivement sans remise 3 boules de l'urne U_1

Calcule la probabilité des évènements suivants :

E_1 « Les numéros des 3 boules tirées sont paires » **0.5pt**

E_2 « La somme des numéros des 3 boules tirées est égale à 6 » **0.5pt**

2- On tire au hasard et simultanément 2 boules de U_2 et 1 boule de U_1 .

On suppose que les évènements élémentaires sont équiprobables.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro 2 parmi les 3 boules tirées.

a- Pour chaque $x_i \in X(\Omega)$ Calcule $P(X = x_i)$ et en déduire que le tableau ci-dessous est bien celle de la loi de probabilité de X . **1.5pt**

$X = x_i$	0	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{39}{80}$	$\frac{23}{80}$	$\frac{3}{80}$	

b- Calcule l'espérance mathématiques de X ainsi que la variance et l'écart type. **1pt**

c- Détermine la fonction de réparation F de X et construis son graphe. **1pt**

B- On se place dans le plan ($\mathcal{P}$), soit ABC trois points du plan tels que $AB = AC = BC = 5\text{cm}$

- 1- Détermine de construis le barycentre G du système $\{(A, 2), (B, 2), (C, 1)\}$. **0.5pt**
- 2- Calcule la distance AG . **0.5pt**
- 3- Détermine et construis l'ensemble (K) des points M tel que $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 15$ **0.5pt**

PROBLEME : ----- (10 points)

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Unité graphique 2cm .

Partie A : ----- Étude d'une fonction auxiliaire ----- (1.5 points)

Soit la fonction g définie par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$

- 1- Etudie les variations de g sur D_g et dressez le tableau de variation. **1pt**
- 2- Déduis-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x **0.5pt**

Partie B : ----- Étude de la fonction principale ----- (3.5 points)

Soit la fonction g définie par $g(x) = (1 - x)e^x - 1$

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ mais $f(0) = 3$

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- Etudie la continuité de f en 0 **0.5pt**
- 2- Calcule les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. **0.5pt**
- 3- a- Montre que la droite $(D) : y = -x + 2$ est asymptote à la courbe (Cf) . **0.5pt**
b- Etudie la position relative de (D) par rapport à (Cf) . **0.5pt**
- 4- Etudie les variations de f dressez le tableau de variation. (On pourra montrer que la dérivée $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$) **0.75pt**
- 5- Trace la courbe (Cf) , (D) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **0.75pt**

Partie C : ----- Recherche d'une solution approchée de l'équation $f(x) = x$ ----- (5 points)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$

- 1- Montre que pour tout réel x , $h'(x) < 0$ **0.5pt**
- 2- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]2, 2,5[$ **0.5pt**
- 3- Démontre que $\forall x \in]2, 2,5[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ **0.5pt**
- 4- Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
 - a-Démontre que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, si $U_n \in]2, 2,5[$ alors $U_{n+1} \in]2, 2,5[$ **0.5pt**
 - b-Démontre que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ **0.5pt**
 - c-Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ **0.5pt**
 - d-Montre que La suite (U_n) converge vers α **0.5pt**
 - e-Détermine un entier n_0 des majorations précédentes pour que $\forall n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ **0.5pt**
 - f- En utilisant le sens de variation de f sur $]2, 2,5[$, montre que $(U_{n+1} - \alpha)(U_n - \alpha) < 0$ **0.5pt**
 - g-En déduire que α est compris entre U_n et U_{n+1} **0.5pt**