

COMPOSITION

COEFFICIENT : 5

DUREE : 4 heures

MATHÉMATIQUES

Série : T.S.E*Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2***EXERCICE 1**

..... (5 points)

I- Résous dans K les équations suivantes :

a) $\ln(x-1) + \ln\left(\frac{2}{x}\right) = 0$ avec $K = \mathbb{Z}$.

b) $\frac{e^x}{5} = e^{-x}$ avec $K =]\ln\sqrt{5}; +\infty[$.

c) $\log(1+3x) - 2 = 0$ avec $K = \mathbb{R}$.

d) $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$ avec $K = \mathbb{N}$.

II- Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln^2 x - \ln x^2 < -3$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} \geq 1$.

III- Résous les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 6 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} e^{x+\ln 2} - e^{y+\ln 3} = 1 \\ e^{x+\ln 3} - e^{y+\ln 2} = 4 \end{cases}$$

EXERCICE 2

..... (5 points)

I- 1°) a) Compare $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$ et $e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.b) Déduis-en la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.a) Calcule la dérivée de f .b) Calcule, l'aide d'une intégration par partie, la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^x)}{e^{-x}} dx$.II- Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \exp\left(1 - \frac{n}{2}\right)$.1°) a) Montre que (U_n) est une suite géométrique. Précises-en le premier terme et la raison.b) Justifie que la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln U_n$ existe et est arithmétique.2°) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$.a) Exprime S_n et P_n en fonction de n .b) Détermine les limites, à l'infini, de S_n et P_n .

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}} + 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan

muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité sur $(O; \vec{i})$, 1 cm et sur $(O; \vec{j})$, 5 cm].

1°) Etudie les variations de la fonction f et précise les asymptotes de (C) .

2°) Donne l'équation réduite de (T) tangente à (C) au point d'abscisse 0.

3°) Trace (C) , la tangente et les asymptotes.

4°) a) Trouve la primitive de f qui s'annule en 0.

b) Calcule le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x = 5$.

Partie B : Etude d'un cas pratique

1°) Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi :

$$g' = \frac{g}{5} \quad (1)$$

où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).

a) Résous l'équation différentielle (1).

b) Sachant qu'à la date $t = 0$ la population comprend un millier de poissons, trouve l'expression de $g(t)$.

c) Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle pour la première fois 4 milliers de poissons ?

2°) En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépendant de l'effectif total). La population suit la loi :

$$g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15} \quad (2)$$

a) On pose $h = \frac{g}{3-g}$ et on suppose que, pour tout $t \geq 0$, on a $g(t) \neq 3$.

Montre que g est solution de (2) si, et seulement si, h est solution de (1).

b) Trouve les fonctions h solutions de (1), puis les fonctions g solutions de (2).

c) Trouve la fonction g solution de (2) telle que $g(0) = 1$ et montre que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie A.

d) Vers quelle limite tend la population de poissons ?