

EPREUVE : de Mathématique Série : T.S.ECoéf : 04 Durée : 04hEXERCICE1 :(04points)

On considère les suites (U_n) et (V_n) et définies par : $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_0 > 0$ et $V_0 > 0$

2.a) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

b) En déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$ et que $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

c) En déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n = \frac{5}{2^n}$

3a) Démontre que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

b) En déduis que les suites (U_n) et (V_n) convergent

c) Démontre que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite l

4.a) Démontre que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} \times V_{n+1} = U_n \times V_n$

b) En déduis la valeur exacte de l

EXERCICE 2 :(04points)

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calcule I_0 ; I_1 et I_2

2a) Montre que pour tout entier n , $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

b) Déduis-en I_3 ; I_4 ; I_5 et I_6

c) Montre que pour tout entier n , $0 < I_{n+1} \leq I_n$

3a) Montre que pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$

b) Montre alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$

PROBLEME :(09points)

A.// Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1°) Détermine la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$

2°) Etudie le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

3°) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a-Vérifie que 0 en est une.

b- L'autre solution est appelée α . Montre que $-1,6 < \alpha < -1,5$.

4-Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réels x .

B.// Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x} - (x+1)e^x$.

1°) Détermine la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite de f en $+\infty$)

2°) Calcule $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe (g étant la fonction définie dans la partie A.//).

Etudie le sens de variation de f .

3°) Montre que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ Où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie 1.

En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 < \alpha < -1,5$)

4°) Etablis le tableau de variation de f .

5°) Trace la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

C.// Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$

1°) Montre que pour tout entier naturel n , $\cos(nx) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_n = \frac{(-1)^n e^\pi + 1}{1+n^2}$.

3°) Montre que, pour tout entier naturel n , $|I_n| \leq \frac{e^\pi + 1}{1+n^2}$.

En déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. $|I_n|$ Désigne la valeur absolue de I_n .

BONUS :.....(03points)

$ABCD$ est un parallélogramme.

1) On considère les points pondérés $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, 1)$ et $(D, 4)$

a) Justifie que ces points pondérés admettent un barycentre

b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$

2) ABC est un triangle tel que $AB = 7$; $AC = 5$ et $BC = 4$

Détermine puis construis le barycentre H tel que : $H = \{(A, -1); (B, 2); (C, 4)\}$.

3) Les points A et B sont donnés et G est défini par la condition indiquée.

Détermine deux réels α et β tels que G soit le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$

b) $-3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$