

COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE	Classe : TSE	Année-Sc : 2024--2025
ETABLISSEMENT : LPSTK	Coef : 5 Durée : 4 heures	Prof : Mamadou Coulibaly

NB : Toute réponse non justifié est nulle. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la correction.

EXERCICE 1 5 Points

I) On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

- 1) Calcule u^2 ; u^4 puis déduis le module et un argument de u^4 et de u .
- 2) On pose $Z = x + iy$. Détermine l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan pour lesquels $|u \times Z| = 8$.

II) On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

- 1) Détermine les réels a, b et c pour que la fonction numérique g définie par :
 $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$
- 2) Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$; puis en déduire les solutions f de l'équation (E).
- 3) Détermine la solution f de (E) telle que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

EXERCICE 2 : 5 Points

La promotrice du Lycée « LPSTK-D » et le Censeur, avec l'accompagnement de leurs partenaires, envisage de construire une Bibliothèque pour les élèves. Le Technicien chargé de la construction, a prévu les dimensions (exprimées en mètres) suivantes pour la salle :

Longueur $L = \frac{9,10}{2\sqrt{10}} \times |Z_2|$; largeur $l = \frac{7,70}{\sqrt{3}} \times |Z_1|$ Où Z_1 et Z_2 sont des solutions de l'équation (E): $z^3 + i(6 - \sqrt{3})z^2 + (6\sqrt{3} - 4 + 12i)z + 12\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} = 0$ avec Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution non réelle.

Les élèves de TSE, TSEXP du LPSTK, avec l'aide du Technicien, doivent confectionner des dalles carrées de côté c compris entre 15 cm et 40 cm pour carrelé le sol de la salle sans découpe.

Les élèves de TSE et TSEXP sont invités à déterminer le nombre de dalles qu'il faut pour le carrelage.

A l'aide de tes connaissances mathématiques et des données mises à disposition, détermine les dimensions de la salle ainsi que le nombre de dalles qu'il faut pour le carrelage du sol de la bibliothèque.

PROBLEME : 10 Points

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité 2 cm.

Partie A :

- 1) Détermine l'ensemble de définition de f .

- 2) Etudie les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Précise les asymptotes de la courbe.
- 3) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
- 5) Construis (T) et (C) .

Partie B : On se propose de montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0 ; 1]$ une solution unique.

- 1) Etudie les variations de la fonction dérivée f' sur $[0 ; 1]$.
- 2) Démontre que pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
- 3) Etudie les variations de la fonction numérique g définie sur $[0 ; 1]$ par : $g(x) = f(x) - x$.
- 4) Démontre que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0 ; 1]$ une solution unique α . Puis vérifie que $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$.

Partie C : On se propose de déterminer une valeur approchée de α .

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) Démontre par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$.
- 2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontre que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |u_n - \alpha|$.
- 3) En déduis que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.
- 4) Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.
- 5) Détermine un entier p tel que : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$.