

COMPOSITION : 2^{ème} PERIODE

Série : TSE	Epreuve de : Mathématiques	2024-2025	Durée : 4 heures	Coef. : 5
-------------	----------------------------	-----------	------------------	-----------

Exercice 1 : -----[6 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8; b = 2 + 2i\sqrt{3}; c = 2 - 2i\sqrt{3}$.

1. a) Détermine le barycentre G des points pondérés $(A; |a|); (B; |b|); (C; |c|)$ puis place les points A, B, C et G dans le repère. **(0, 75 pt)**
 b) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :
 a) $\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$. **(0, 5 pt)**
 b) $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 24$ **(0, 5 pt)**
2. Détermine, suivant les valeurs du nombre réel k , l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$. **(0, 75 pt)**
3. a) Démontre que a, b et $-\frac{c}{2}$ sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique. **(0, 5 pt)**

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette suite géométrique de premier terme $Z_0 = 8$. On désigne par M_n le point d'affixe Z_n .

- b) Démontre que $Z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} Z_n$. **(0, 25 pt)**
- c) Calcule $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$ et déduis – en la nature du triangle OM_nM_{n+1} . **(0, 5 pt)**
- d) Démontre que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3} OM_{n+1}$. **(0, 25 pt)**
4. a) Exprime Z_n en fonction de n . Déduis-en OM_n et M_nM_{n+1} en fonction de n . **(0, 75 pt)**
 b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$ (c'est – à – dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$).

Détermine L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$. **(0, 75 pt)**

c) Détermine une mesure de l'angle $(\vec{OM_0}; \vec{OM_n})$ en fonction de n . **(0, 25 pt)**

d) Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n sont-ils alignés ? **(0, 25 pt)**

Exercice 2 : -----[3 points]

A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t , exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta \cdot Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1°) Montre qu'on a $Q(t) = 2,5e^{-\beta t}$. (0,5 pt)

2°) Calcule la valeur de β , sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près. (0,5 pt)

3°) Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan P. (1,5 pt)

4°) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ?

On donnera la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 10^{-2} près. (0,5 pt)

Problème : -----[11 points]

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x + 2)^{n+1}e^{-x-1}$ et on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm).

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + y = 2e^{-x-1}$

1) Démontre que f_1 est solution de (E) et déduis-en une primitive de f_1 . (0,5 pt)

2) Démontre qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - f_1$ est solution de l'équation différentielle (E_0): $y'' + 2y' + y = 0$. (0,5 pt)

3) Résous l'équation différentielle (E_0) et déduis-en les solutions de (E). (0,5 pt)

Partie B :

- 1) Détermine la fonction dérivée f'_n de f_n . (0, 5 pt)
- 2) a) Pour tout $n \geq 1$, donne l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n-1} . (0, 25 pt)
 b) Dédus-en une relation entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$. (0, 25 pt)
 c) Donne une interprétation graphique de I_0 . Calcule I_0 et déduis-en I_1 . (0, 75 pt)
- 3) Dresse le tableau de variations de f_n suivant la parité de n . (1, 5 pt)
- 4) Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées. (0, 5 pt)
- 5) Etudie les positions relatives de (C_0) et (C_1) . (0, 5 pt)
- 6) Détermine, suivant la parité de n , la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ? (0, 75 pt)
- 7) Trace les courbes (C_0) et (C_1) dans le même repère. (1 pt)

Partie C :

Soit g la restriction de f_1 sur $\left[1; \frac{7}{5}\right]$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

- 1) a) Démontre que pour tout $x \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$; $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$. (0, 5 pt)
 b) Démontre que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$. (0, 5 pt)
- 2) a) Montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$ (0, 25 pt)
 b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5} |u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$. (0, 5 pt)
 c) Dédus-en la limite de la suite (u_n) . (0, 25 pt)
 d) Détermine le plus petit entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (0, 25 pt)

Partie D :

Soit h la restriction de f_1 sur $[0; 1]$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n h\left(\frac{p}{n}\right)$.

1. En utilisant le sens de variation de h sur $[0; 1]$, démontre que pour tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n-1$, on a : (0, 25 pt)

$$\frac{1}{n} h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x) dx \leq \frac{1}{n} h\left(\frac{p}{n}\right).$$

2. Dédus-en que : $S_n \leq \int_0^1 h(x) dx \leq S_n + \frac{4e-9}{ne^2}$. (0, 5 pt)
3. Démontre que $I_1 - \frac{4e-9}{ne^2} \leq S_n \leq I_1$ et déduis-en la limite de (S_n) . (0, 5 pt)