

Composition de la première période 2025-2026

Situation 1 : (6pts)

I. Un triangle rectangle et isocèle

Un élève de la TSE voudrait obtenir un triangle rectangle et isocèle en utilisant des affixes de nombres complexes. Il choisit au hasard deux nombres complexes d'affixes $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = -3 + i$.

Consigne

Détermine l'affixe d'un point C pour que ce triangle soit rectangle et isocèle en B.

II. Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe (E) : $(i + z)^3(i - \tan \alpha) = (-i + z)^3(-i + \tan \alpha)$.

1) Soit z une solution de (E).

a) Montre que $|i + z| = |-i + z|$.

b) En déduis que z est un réel.

2) a) Exprime $\frac{i + \tan \alpha}{-i + \tan \alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b) Soit z un nombre réel, on pose $z = \tan \theta$ où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Ecris l'équation portant sur θ traduisant (E) et le résoudre.

c) Détermine les solutions z_1 ; z_2 et z_3 de (E).

Situation 2 : (6pts)

A. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et de femmes dans une association.

1) On considère l'équation (E): $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 8x + 5y = 1$.

a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E). Démontre que $3x \equiv 1[5]$.

b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 1[5]$.

c) En déduis l'ensemble des solutions de (E).

2) Résous l'équation (E'): $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 8x + 5y = 300$.

3) Le Jelma est une association composée d'hommes et de femmes autour de la culture des livres. Les cotisations sont de 800 F CFA pour les hommes et de 500 F CFA pour les femmes. Pour sa fête annuelle, le président de l'association désire habiller les membres de Bôgôlan. Il ne connaît pas le nombre exact d'hommes et de femmes de cette association. Cependant il sait que les cotisations de tous les membres s'élèvent à 30 000 F CFA.

Détermine le nombre d'hommes et de femmes qui pourra y être dans cette association.

B. Poses et effectues opérations suivantes :

$$\overline{5341}^6 + \overline{4213}^6 + \overline{1023}^6 ;$$

$$\overline{10110}^2 + \overline{1342}^5 + \overline{4512}^7 ;$$

$$\overline{451}^7 + \overline{561}^7 - \overline{4213}^7 ;$$

$$\overline{1203}^4 \times \overline{23}^4 ;$$

$$\overline{546}^8 \div \overline{13}^8 .$$

Situation 3 : (8pts)

Partie : 1

Une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 2x - 3| - |x - 2|$ sont des réels.

1. Ecris f sans le symbole de la valeur absolue.
2. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1 , 2 et 3 .
3. Etudie les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Etudie la concavité de f .
5. Trace la représentation graphique de f .

Partie 2

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

1. Etudie les variations de g sur $[3; +\infty[$.
2. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . En déduis un encadrement de $0,1$ près de α .
3. En déduis le signe de $g(x)$ sur $[3; +\infty[$.

Partie 3

On donne la fonction h définie sur $[3; +\infty[$ par $h(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{2x - 3}$.

1. Montre que $h'(x) = -\frac{4 \times g(x)}{(2x-3)^2}$.
2. Montre que $\forall x \in [3; +\infty[, h'(x) \leq \frac{4}{9}$.
3. En déduis que $\forall x \in [3; +\infty[, \left| h(x) + \frac{59}{7} \right| \leq \frac{4}{9} |x - 5|$.
4. Dresse le tableau de variation de h .
5. Trace la représentation graphique de h .