

*Composition de la 1<sup>ère</sup> Période*Epreuve : **Mathématiques**Classe : **TSE**Coefficient : **4**Durée : **04 Heures**Exercice 1 (6 points)

I- On considère l'équation (E) :  $8x + 5y = 1$ , où  $(x; y)$  est un couple de nombres entiers relatifs.

1) a) Donne une solution particulière de l'équation (E).

b) Résous l'équation (E).

2) Soit  $N$  un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers  $(a; b)$  vérifiant :  $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montre que le couple  $(a; -b)$  est solution de l'équation (E)

b) Quel est le reste de la division de  $N$  par 40 ?

3) a) Résous l'équation  $8x + 5y = 100$ , où  $(x; y)$  est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au  $VIII^{\text{ème}}$  siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

II- On donne les entiers naturels  $a = 284$ ,  $b = 220$  et  $c = 28$

1) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de  $a$ ,  $b$  et  $c$

2) On appelle diviseur strict d'un entier naturel  $n$ , tout diviseur de  $n$  positif autre que lui – même.

Quels sont les diviseurs strict de  $a$ ,  $b$  et  $c$  ?

3) On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre. Vérifie que  $a$ ,  $b$  sont amiables.

4) On appelle nombre parfait, tout entier naturel égal à la somme des diviseurs stricts (amiables avec lui – même).  $c$  est – il parfait ?

III- Détermine l'ensemble des couples  $(x; y)$  d'entiers naturels tels que :

$$a) \begin{cases} m - 3d = 108 \\ 10 < d < 15 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 96 \\ PGCD(x; y) = 4 \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe  $Z$ , on définit :  $P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4(1 - \sqrt{2})Z - 8$

1) Montre que  $P(Z)$  peut se factoriser par  $Z - 2$

- 2) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation  $P(Z) = 0$   
On notera la solution réelle  $Z_0$  ;  $Z_1$  la solution à partie imaginaire positive et l'autre  $Z_2$
- 3) Montre que  $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$  et détermine le module et un argument de  $Z_1$  et  $Z_2$
- 4) On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct (O ; U ; V) d'unité 2cm.
  - a) Place les points A ; B et C d'affixes respectives  $Z_0$  ;  $Z_1$  et  $Z_2$ .
  - b) Démontre que le triangle OAB est isocèle.
  - c) On note I milieu du segment  $[AB]$  ; trouve l'affixe  $Z_I$  de I sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
  - d) En déduis les valeurs exactes de  $\cos \frac{3\pi}{8}$  et  $\sin \frac{3\pi}{8}$ .

### Problème (10 points)

#### I

Soit la fonction numérique de représentation graphique C dans un repère orthonormé donnée par :

$$h(x) = \frac{x^2 + |x| - 6}{|x + 1|}$$

- 1) Ecris  $h(x)$  sans le symbole de la valeur absolue
- 2) Etudie la dérivabilité de  $h$  sur son ensemble de définition
- 3) Etudie les variations de  $h$  et dresse son tableau de variation

#### II

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$

- 1) Montre que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle J que l'on précisera
- 2) Détermine  $f^{-1}(x)$  ( $f^{-1}$  étant la bijection réciproque de  $f$ )
- 3) Dresse le tableau de variation de  $f^{-1}$  sur J
- 4) Trace les courbes C et C' représentatives de  $f^{-1}$  et  $f$
- 5) Détermine s'il existe les coordonnées de l'intersection de C et C'

#### III

On considère la fonction numérique définie par  $g(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4|}}{x}$

- 1) Etudie la parité de  $g$  et interprète graphiquement ce résultat
- 2) En déduis un domaine d'étude D pour  $g$
- 3) Etudie la dérivabilité et le sens de variation de  $g$  sur D
- 4) Trace la représentation graphique de  $g$  sur D puis achève la construction de la courbe de  $g$  sur son ensemble de définition.