

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE

Epreuve de Mathématiques

DUREE : 4H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4.5 points)**Consigne :** Dire preuve à l'appui si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.**Proposition 1 :** 4789 n'est pas un nombre premier. 0.75pt**Proposition 2 :** $\forall n \in \mathbb{N} ; 2 \times 4^{3n+1} + 3^{2n+1}$ est multiple de 11. 0.75pt**Proposition 3 :** $123^{3729} \equiv 1[7]$ 0.75pt**Proposition 4 :** $PGCD(300, 60, 396) = 12$ et $PPMC(300, 60, 396) = 9300$ 0.75pt**Proposition 5 :** Ce 15 Décembre 2025 est un lundi, le 15 Décembre l'an 2072 est un mercredi. 0.75pt**Proposition 6 :** $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ 0.75pt**EXERCICE 2 :** (5.5 points)

I- Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$p = \left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{787} \quad \underline{0.5pt} \quad q = \frac{(\sin 2x - i \cos 2x)e^{-ix}}{x - ix} \quad \underline{0.5pt} \quad r = e^{ix} - e^{i3x} \quad \underline{0.5pt}$$

$$NB : x < 0 \text{ et } \sin x > 0$$

II- Soit le complexe $u = 1 + (-1 + \sqrt{2})i$

$$\text{Montre que } u^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1 + i) \quad \underline{0.5pt}$$

1- a- Ecris u^2 et u sous forme trigonométrique. 0.75ptb- En déduire la valeur exacte de $tg\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 0.75ptIII- Soit $v = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ 1- Détermine les racines cubiques de v 1pt2- Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ Montre que $\frac{2z-1}{z} = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \cot g\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 0.5pt3- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2z-1)^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)z^3$ 0.5pt

PROBLEME :

(10 points)

PARTIE A :**(5 Points)**

Un entier naturel K s'écrit $\overline{abac}$ dans la base 4 et $\overline{bca}$ dans la base 7.

- 1- Donne les contraintes sur a, b et c **0.25pt**
- 2- Montre que $67a - 33b - 6c = 0$ **0.5pt**
- 3- En déduire que a est multiple de 3, puis détermine les valeurs de a **0.75pt**
- 4- Dans cette question on prendra $a = 3$
 - a- Détermine $33 \wedge 6$ **0.25pt**
 - b- En déduire les valeurs de b et c **1pt**
- 5- Dans cette question on prendra $a = 3$; $b = 5$ et $c = 6$
 - a- Ecris K dans le système décimal. **0.5pt**
 - b- Ecris K dans le système binaire sans passer par le système décimal. **0.5pt**
- 6- Décompose K en produit de facteurs premiers. **0.5pt**
 - a- En déduire tous les diviseurs positifs de K **0.5pt**
 - b- En déduire les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(a \wedge b) + (a \vee b) = K$ et $7 < (a \wedge b) < 20$ **1.25pt**

PARTIE B :**(5 Points)**

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives $-2i$; $1 + i$; $4 + 2i$ et 2

- 1- Place les quatre points dans le plan. **0.5pt**
- 2- Calcule la distance AC et la mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \widehat{CA})$, **0.75pt**
- 3- Prouve que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0.5pt**
- 4- Prouve que I est milieu du segment $[AC]$ **0.5pt**
- 5- On désigne par D le symétrique du point C par rapport au point I .
 - a- Détermine l'affixe z_D du point D . **0.5pt**
 - b- Montre que le quadrilatère $ABCD$ est un losange. **0.5pt**
 - c- $ABCD$ est-il un carré ? **0.25pt**
- 6- Détermine les ensembles suivants :
$$E = \left\{ M(z) \in (\mathcal{P}) / \left| \frac{z-1-i}{z+2i} \right| = 1 \right\} \quad \mathbf{0.5pt} \qquad F = \left\{ M(z) \in (\mathcal{P}) / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^* \right\} \quad \mathbf{0.5pt}$$
- 7- Détermine et construis l'ensemble $G = \left\{ M(z) \in (\mathcal{P}) / \arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \right\}$ **0.5pt**