

COMPOSITION DE LA 1^{ère} PERIODE**EPREUVE : de Mathématique Série : T.S.E****Coéf : 05 Durée : 04h****EXERCICE 1:.....(05pts)** N et M Sont deux entiers tels que N s'écrit $\overline{1a3a^4}$ et M s'écrit $\overline{bca35^7}$

- 1) Détermine suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division de 6^n par 11
- 2) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $7x + y = 46$
- 3) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple $(b ; c)$ est solution de $7x + y = 46$.
Donne les écritures en base 4 de N et en base 7 de M
- 4) Détermine l'entier n tel que $M^n \equiv 3[5]$.
- 5) a) Ecris dans le système décimal M et N
- a) Résous dans N^2 le système d'inconnues a et b :
$$\begin{cases} PPCM(a, b) = M - N \\ PGCD(a, b) = 5N + 14 \end{cases}$$

EXERCICE2 :.....(07pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 2 + \sqrt{x^2 + 1}$, et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- 1) Détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2a) Justifie que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calcule sa dérivée
- b) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation
- 3) Démontre que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
- 4) En déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B : Etude de la fonction f

- 1) Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
- 2a) Montre pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = g(x)$, en déduis le sens de variations de la fonction f
- b) Dresse le tableau de variation de f
- 3) Démontre que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser
- 4) Démontre que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique sur I
- 5a) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Détermine $f^{-1}(3)$.
- b) Justifie que f^{-1} est dérivable en 3, puis calcule $(f^{-1})'(3)$.
- 6) Explicite l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$
- 7) Explique la construction de la courbe représentative (C^{-1}) de f^{-1} à partir de (C)

PROBLEME :.....(08points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, (unité graphique 1cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

- 1) Montre que $-i$ est une solution de (E)
- 2) Détermine les nombres réels a, b et c tels que :
$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$
- 3) Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i, 4 - i ; -i$.

- 4) Place les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
- 5) Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r . Calcule l'affixe s de S .
- 6) Démontre que les points B ; A ; S ; C appartiennent à un même cercle C dont on déterminera le centre et le rayon.
- 7) **A** tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
 - a) Détermine les affixes des points A' ; B' ; C' associés respectivement aux points A, B, C .
 - b) Vérifie que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P , d'affixe i . Détermine son rayon et $\text{trace}(C')$.
 - c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C) . Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$