

LYCEE PRIVÉ BIYA DE NIAMANA (LPBNI)Composition du Premier TrimestreAnnée Scolaire 2025 – 2026Comité Pédagogique de Mathématiques**Épreuve de Mathématiques**Classe : TSEDurée : 4 HeuresCoeff : 5**Exercice 1** : (04,5 Points)

I. Soit φ la fonction définie par
$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{ax^2+bx-1}{x^2+1}, & \text{si } x \geq 2 \\ \varphi(x) = 3x + c, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Détermine les réels a, b et c pour que les trois (3) conditions soient réalisées :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x)$; c) φ est continue en $x_0 = 2$. (0,75pt)

II. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 - |1-x|}{|x|}$

Étudie la dérivabilité de g en $x_0 = 1$ puis interprète graphiquement le résultat. (1pt)

III. Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{2x^4-32}$.

1°) Détermine l'ensemble de définition de h . (0,5pt)

2°) h est – elle prolongéable par continuité en $x_0 = 2$? Si oui donne sa fonction prolongée. (0,5pt)

IV. Soit f la fonction de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}$.

1°) Calcule la dérivée de f . (0,5pt)

2°) Montre que $\forall x \in [1 ; 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. (0,5pt)

3°) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montre que

$\forall x \in [1 ; 2]$, on a : $|f(x) - 2| \leq \frac{2}{3}|x - 1|$. En – déduis un encadrement de f sur

$[1 ; 2]$ par deux fonctions affines. (0,75pt)

Exercice 2 : (04 Points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on donne $A ; B$ et I les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)i$.

1°) a) Mets les nombres complexes complexes z_A et z_B sous la forme

trigonométrique. **(0,5pt)**

b) Justifie que A et B sont situés sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2. **(0,5pt)**

c) Vérifie que I est le milieu du segment $[AB]$. **(0,25pt)**

d) Construis le cercle (C) ainsi que les points $A ; B$ et I . **(0,5pt)**

2°) a) Justifie que la demi – droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. **(0,5pt)**

b) Vérifie que : $(\vec{OA} ; \vec{OB}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$. **(0,5pt)**

c) Montre que : $(\vec{u} ; \vec{OI}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$. **(0,5pt)**

d) En – déduis que $z_I = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right]$ et

que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **(0,75pt)**

Problème : (11,5 Points)**Partie A :**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.

1°) Étudie et dresse le tableau de variations de g . **(0,5pt)**

2°) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . **(0,25pt)**

3°) Vérifie que $\alpha \in]0 ; 1[$ puis donne le signe de $g(x)$. **(0,5pt)**

Partie B :

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{|x^2 + 3x + 2|} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2cm.

1°) Détermine le domaine de définition de f . **(0,5pt)**

2°) Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur puis calcule les limites aux bornes de son domaine de définition. **(01pt)**

3°) Étudie la continuité et dérivabilité de f en -1 . **(01pt)**

- 4°) Interprète géométriquement les résultats. **(0,5pt)**
- 5°) Étudie la dérivabilité de f en -2 . **(0,75pt)**
- 6°) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. **(0,25pt)**
- 7°) Étudie la position relative de (C_f) par rapport à la droite (D) . **(0,25pt)**
- 8°) Étudie la branche infinie de la courbe (C_f) en $-\infty$. **(0,25pt)**
- 9°) Étudie sur $] -\infty ; -2[$ la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta): y = -x - \frac{3}{2}$. **(0,5pt)**
- 10°) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. **(0,5pt)**
- 11°) Montre que f est dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ et que pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$. **(0,75pt)**
- 12°) Calcule la dérivée f' de f sur les autres intervalles où f est dérivable. **(0,75pt)**
- 13°) Dresse le tableau de variations complet de f . **(0,5pt)**
- 14°) Soit k la restriction de f à l'intervalle $[-2 ; -1]$ et (C_k) sa courbe représentative. Montre que la droite $(D'): x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C_k) . **(0,25pt)**
- 15°) Trace (C_f) et ses asymptotes dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5pt)**

Partie C :

On considère maintenant h la restriction de f à l'intervalle $I =] -\infty ; -2[$.

- 1°) Montre que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,25pt)**
- 2°) Sa bijection réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? **(0,25pt)**
- 3°) Calcule $(h^{-1})'(\sqrt{2})$. **(0,5pt)**
- 4°) Dresse le tableau de variation de h^{-1} . **(0,5pt)**
- 5°) Trace $(C_{h^{-1}})$ et ses asymptotes dans le même repère. **(0,5pt)**

Bon courage !!!