

Composition de la première période
Epreuve : De Mathématiques

Classe : TSE

Durée : 4H

Coef : 5

Exercice 1 : (6 points)

A) 1) Montre que : $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha/2}$ et $1 - e^{i\alpha} = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha/2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Résous dans $\mathbb{C}$:

a) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0$ (Tu pourras utiliser la question 1) pour donner une écriture simple des solutions).

B) 1) Soit φ un réel de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et z le nombre complexe défini par :

$$z = \frac{1}{2}(\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi))$$

Détermine en fonction de φ , le module et un argument de z .

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z - i$ et $\frac{z}{z - i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z - i}$.

Détermine les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0; \pi[$. Représente ces ensembles.

Exercice 2 : (5 points)

1) a) Montre en utilisant l'algorithme d'Euclide qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $324u + 245v = 1$.

b) Dédus de ce qui précède une solution particulière $(x_0; y_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : $324u - 245v = 7$ et résous dans $\mathbb{Z}^2$ cette équation.

2) On considère la fraction $A(n) = \frac{n+16}{n-2}$ où n est un entier naturel strictement supérieur à 2.

a) Montre que tu peux écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \frac{b}{n-2}$ où a et b sont deux entiers naturels à déterminer.

b) Pour quelle valeur de n , $A(n)$ est-il un entier naturel ?

c) Pour quelle valeur de n , $A(n)$ est-il irréductible ?

3) Détermine l'entier naturel n tel que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par 11.

4) Trouve les couples d'entier naturel $(a; b)$ tels que $2m - d = 220$ où $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.

Problème : (9 points)

Les parties A/ et B/ sont indépendantes.

A/ Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Etudie les variations de f , puis trace (C).

2) Montre que f ne réalise pas une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$.

3) On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0; 1]$.

a) Montre que g réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle J que tu préciseras.

b) Trace la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C).

c) Donne une équation de la tangente (T) à la courbe (C') au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{4}$.

d) Explicite g^{-1} et retrouve le résultat précédent.

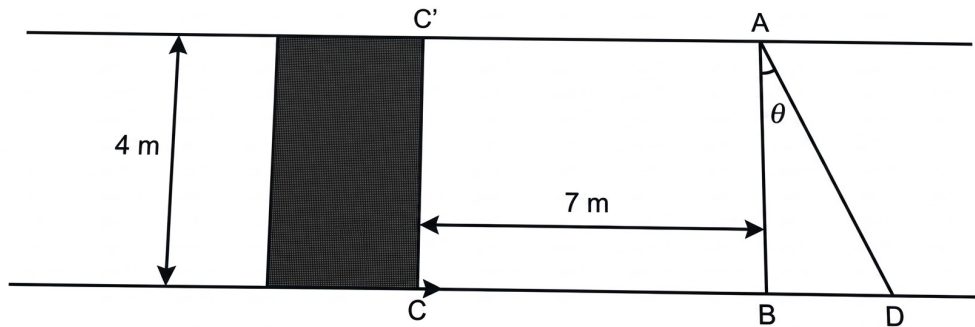
B/ Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.

Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.

Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités ; c'est-à-dire à 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$, avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radian).



1) Détermine les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD .

2) On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan(\theta) - \frac{4}{\cos \theta}$.

Montre que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3) Conclus.