

COMPOSITION : 1^{ère} PERIODE				
Série : TSE	Epreuve de : Mathématiques	2025-2026	Durée : 4 heures	Coef. : 5

Exercice 1 : -----[4 points]

A. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 + (2 + 5i)z^3 - (17 - 18i)z^2 - (60 + 31i)z + 18 - 64i$$

1. Montre que $z_0 = -1 - 2i$ est une racine de $P(z)$. (0,5pt)
2. Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on précisera. (0,5pt)
3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. (1pt)
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B, C et D du plan complexe dont les affixes respectives $z_A; z_B; z_C$ et z_D sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$ telles que la partie réelle de z_A est positive, $z_B = z_0$ et $z_C = z_1$.
 - a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe S telle que $S(A) = B$ et $S(C) = D$. (0,5pt)
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de S . (0,5pt)
 - c) Détermine l'expression analytique de S . (0,5pt)
 - d) Détermine puis construis l'image (C') du cercle (C) de centre A et de rayon $2\sqrt{2}$ par S . (0,5pt)

Exercice 2 : -----[6 points]

- A. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{27x^2 - 30x + 3}{(9x^2 - 1)^2}$.
1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f puis détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{a}{(3x+1)^2} + \frac{b}{(3x-1)^2}$. (0,75pt)
 2. Déduis-en une primitive F de f sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$. (0,5pt)
- B. 1. Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 4^n par 7. Déduis-en le reste de la division euclidienne $4^{2026} - 5$ par 7. (0,75pt)
1. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}; 3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11. (0,5pt)
 2. Détermine tous les entiers naturels a et b tels que $m^2 - 189d^2 = 1575$ où $m = \text{PPCM}(a; b)$ et $d = \text{PGCD}(a; b)$. (1pt)
 3. a) Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $7x - 4y = 4$. (0,5pt)
b) Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}^x$ et $\overline{49}^y$. Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}^x$ et $\overline{125}^y$.
Détermine x et y puis a et b . (1pt)
 4. Une association de 1230 membres dispose de cars de 50 places et de 70 places pour transporter ses membres au congrès annuel. Sachant que le nombre de cars de 50 places est inférieur à celui des cars de 70 places et que toutes les places sont occupées, détermine le nombre de cars de 50 places et celui des cars de 70 places. (1pt)

Problème : -----[10 points]

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 7|x|}{x^2 + 2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x + \frac{5}{3} - \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

Partie A

1. Justifie que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. (0,5pt)
2. Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue pour $x < 1$. (0,25pt)
3. Etudie la continuité de f en 0 et en 1. (0,5pt)
4. Etudie la dérivabilité de f en 0 et en 1 puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus. (1,25pt)
5. a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis interprète graphiquement les résultats des limites. (1pt)
b) Montre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. (0,25pt)
c) Etudie la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sur $]-\infty; -1]$. (0,25pt)

Partie B

On considère la fonction g définie sur $D_1 =]1; +\infty[$ par : $g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$ et la fonction p définie sur $D_2 =]-\infty; 0]$ par $p(x) = x^4 + 13x^2 - 14$.

1. Montre que $\forall x \in D_1 =]1; +\infty[; g''(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$. (0,5pt)
2. Dresse le tableau de variation de g' et déduis-en le signe de g' sur $]1; +\infty[$. (0,5pt)
3. Dresse le tableau de variation de g sur D_1 . (0,25pt)
4. Déduis-en le signe de $g(x)$ sur D_1 . (0,25pt)
5. a) Démontre que $\forall x \in \left[\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right]; \frac{1}{4} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$. (0,25pt)
b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que :
 $\forall x \in \left[\frac{5}{4}; \frac{5}{3}\right]; \frac{1}{16}(4x + 3) \leq g(x) \leq \frac{1}{3}(2x - 1)$. (0,5pt)
6. Montre que $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 14)$ puis étudie son signe sur D_2 . (0,5pt)

Partie C

1. Montre que pour tout $x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$ puis donne le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$. (0,5pt)
2. Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty; 1[$. (0,25pt)
3. Dresse le tableau de variation de f sur D_f . (0,25pt)
4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1]$.
a) Montre que h est une bijection de $]-\infty; -1]$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0,25pt)
b) Démontre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [-3; -2]$. (0,25pt)
c) Détermine la valeur exacte de α . (0,25pt)
d) Calcule $h(-4)$ puis détermine l'équation de la tangente à la courbe (C') de h^{-1} au point d'abscisse -2 . (0,5pt)
5. Trace la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis déduis-en la courbe (C') de h^{-1} . (1pt)