

Composition de la 2^{ème} période

Epreuve de : Mathématiques

Série : TS.E

Durée : 4 heures

Coff. : 05

Situation 1 [5 points]

I) On considère l'application f_n définie pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x(x^n+1)}, \text{ où } n \text{ est un entier strictement positif.}$$

1) Détermine les réels a ; b et c tels que : $\forall x > 0, f_n(x) = \frac{ax^{n-1}+b}{x^n+1} + \frac{c}{x}$ (0,5pt)2) Montre que: $A = \int_1^2 f_n(x)dx = \ln \left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}} \right)$. (0,5pt)3) A l'aide d'une intégration par parties, calcule: $B = \int_1^2 \frac{x^{n-1} \ln x}{(x^n+1)^2} dx$. (0,5pt)II) On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ par:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

1) On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ a) Calcule $I+J$ et $J-I$. (1pt)b) Déduis-en les valeurs de I et J . (0,5pt)2) On note $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2 dx$ et $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x))^2 dx$.a) Calcule $f'(x)$. Déduis-en la somme $K+L$. (1pt)b) En t'inspirant de la première question, calcule les valeurs de K et L . (0,5pt)c) Déduis-en la valeur de $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$. (0,5pt)

Situation 2 [5 points]

I) 1) Résous l'équation différentielle (E): $y'' + 2y' + 5y = 0$. (0,5pt)2) En déduis la fonction f , solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$. (0,75pt)3) On pose $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$ a) Prouve que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis donne son expression. (0,75pt)b) En déduis la valeur exacte de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$. (0,5pt)II) Soit V_n la suite définie par
$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{10^n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$
1) Calcule v_2 ; v_3 ; v_4 ; v_5 . (1pt)

2) Montre que v_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,5pt)

3) En déduis une expression de v_n en fonction de n . (0,5pt)

4) On pose $s_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Montre que $s_n = \frac{10n}{9} + \frac{10}{81} \left(\frac{1}{10^n} - 1 \right)$ (0,5pt)

Situation 3 [5 points]

Partie I

Etudie et représente la fonction h définie par $h(x) = \tan x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ dans un repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1,5pt)

Partie II

A) Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x + (1+x)e^{-2x}$ et (C_f) sa courbe.

1) a) Calcule f' et f'' (1pt)

b) Etablis le tableau de variation de la fonction f' puis donne le signe de f' (1pt)

c) En déduis le tableau de variation de la fonction f (0,5pt)

2) Prouve que la droite d'équation $(D): y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) (0,5pt)

3) a) Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique α et que $1 \leq \alpha \leq 2$ (1pt)

b) Construis (C_f) et (D) sur un même graphique. (1pt)

B) Soit la fonction g définie sur $I = [1; +\infty[$ par $g(x) = 1 + (x+1)e^{-2x}$

1) Etudie les variations de g sur I puis en déduis que $\forall x \in I, g(x) \in I$ (0,5pt)

2) Montre que $\forall x \in I$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$ puis $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |x - \alpha|$ (0,75pt)

3) Soit (V_n) la suite d'éléments de I définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2} |u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2} \right)^n$ (0,75pt)

b) Etudie la convergence de la suite de terme général u_n (0,5pt)

c) Détermine un entier p pour lequel on s'assure d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$ (0,5pt)

d) Calcule u_p à 10^{-3} près. (0,5pt)

Bonne chance.