

DUREE : 4H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite d'intégrale (I_n) définie par : $I_n = \int_1^e \frac{\ln^n x}{\sqrt{x}} dx$

1. Calcule I_0 et I_1 (On pourra calculer I_1 par parties). **1pt**
2. a-/ Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$ puis conclus **0.5pt**
 b-/ Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0$ puis conclus **0.5pt**
 c-/ En déduire la convergence de la suite (I_n) **0.25pt**
3. a-/ En intégrant par parties, montre que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n$ **0.75pt**
 b-/ En déduire I_1 et I_2 **0.5pt**
4. a-/ En utilisant 2. a-/ et 2. b-/ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{e}}{n+1}$ **0.5pt**
 b-/ En déduire la limite de la suite I_n et nI_n quand $n \rightarrow +\infty$ **0.5pt**

EXERCICE 2 : (6 points)

A- On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' + 2y' + 5y = 20e^{3x}$$

- 1- Résous l'équation différentielle (E_1) **0.5pt**
- 2- Détermine le réel a que la fonction h définie par $h(x) = a e^{3x}$ soit solution de (E_2) **0.5pt**
- 3- Démontre qu'une fonction f est solution de (E_2) , si et seulement si $(f - h)$ est solution de (E_1) **0.5pt**
 a- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E_2) **0.5pt**
 b- Détermine la solution f dont la courbe représentative (Cf) passe par le point $A(0; -1)$ en admet en ce point une tangente parallèle à la droite $(D) : y - 2x + 1 = 0$. **0.5pt**

B- On considère la suite de (z_n) définie par ; $\forall n \in \mathbb{N}; z_n = (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{i}{2}\right)^n$

- 1- Ecris z_0 et z_1 sous formes algébriques. **0.5pt**
- 2- Démontre que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison **0.5pt**
- 3- Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par M_n le point d'affixe z_n
 Calcule la distance OM_n en fonction de n **0.5pt**
- 4- $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose la longueur $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$
 a- Montre que la distance $M_n M_{n+1} = \sqrt{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **0.5pt**
 b- Calcule L_n en fonction de n puis détermine sa limite. **0.5pt**
 c- Détermine en fonction de n , une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_n})$ **0.5pt**
 d- Détermine les valeurs de n pour lesquelles les points $O; M_0$ et M_n sont alignés. **0.5pt**

PROBLEME :

(10 points)

Partie A :

(3 points)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

- 1- Démontre que la fonction g est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et calcule les limites. **1pt**
- 2- Etudie les variations de g et dresse le tableau de variation sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. **1pt**
- 3- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]4, 5[$ et en précise un encadrement de α à $0,1$ près. **0.5pt**
- 4- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ **0.5pt**

Partie B :

(5.5 points)

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Unité graphique $2cm$.

Soit la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
 on note (Cf) sa représentation graphique

- 1- Vérifie que f est bien définie pour tout réel $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ **0.5pt**
- 2- Calcule les limites de f aux bornes de $\mathbb{R} - \{1\}$ puis interprète les résultats. **1pt**
- 3- Etudie la continuité de f en 0 **0.5pt**
- 4- On admet que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{1}{2}$
Montre que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{6}$ puis interprète graphiquement le résultat. **0.5pt**
- 5- Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ puis encadre $f(\alpha)$ à $0,1$ près **0.75pt**
- 6- a-/ Montre que pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ **0.5pt**
b-/ Calcule $f'(x)$ pour $x \leq 0$ **0.5pt**
- 7- Dresse le tableau de variation de f **0.5pt**
- 8- Trace la courbe (Cf) **0.75pt**

Partie C :

(1.5 points)

- 1- a-/ Détermine les réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$; $\frac{6x}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}$ **0.5pt**
b-/ En déduire que $\frac{6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \frac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}} - \frac{6e^{-x}}{e^{-x}+1}$ **0.5pt**
- 2- Calcule l'aire du domaine du plan limité par la courbe (Cf) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$ **0.5pt**