

**COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE
2025-2026**

Classe : TSE

Mai 2026

Durée : 4 heures

Coef : 05

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

- Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 : -----[04 points]

A. On considère sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$(E): y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \left(-x + \frac{1}{2} \right).$$

1. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $(E_0) : y'' + 2y' + 2y = 0$. **(0,5 pt)**
2. Détermine les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit solution de l'équation (E) . **(0,75 pt)**
3. Montre qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si la fonction $h - g$ est solution de (E_0) . **(0,5 pt)**
4. Détermine dans $\mathbb{R}$, l'ensemble solution de (E) . **(0,75 pt)**
5. a. Détermine la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{3}{2}$. **(0,75 pt)**
b. Détermine les réels r et ω strictement positifs et $\varphi \in]-\pi; \pi]$ tel que :
 $f(x) = e^{-x} r \cos(\omega x + \varphi) + \left(\frac{1}{2} - x\right) e^{-x}$. **(0,75pt)**

Exercice 2 : -----[5,5 points]

Les parties A et B sont indépendantes

A. Le but de cet exercice est l'étude de la vitesse de rotation angulaire lors du freinage d'un disque dans un disque liquide. Cette vitesse $v(t)$ représente le nombre de tours par minutes à l'instant t exprimé en minutes. La fonction v vérifie l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$

- 1-Détermine la fonction v sachant que $v(0) = 1500$ **(0,5 pt)**
- 2- Calcule la vitesse angulaire à l'instant $t = 1$. **(0,5 pt)**
- 3-Au bout de combien de temps la vitesse angulaire sera t- elle d'un tour par minute ? **(0,5 pt)**
- 4- Calcule la valeur moyenne de v entre les instants $t = 0$ et $t = 1$. **(0,5 pt)**

B. $\mathbf{P}$ est le plan affine euclidien et ABC désigne un triangle de centre de gravité G . Soit g l'application de $\mathbf{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point $M \in \mathbf{P}$;

$g(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ et f l'application de $\mathbf{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : pour tout point M de $\mathbf{P}$; $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

- 1) Démontre que pour tout M de $\mathbf{P}$, on a : $g(M) = 3MG^2 + g(G)$ et $g(G) = -\frac{1}{2}f(G)$.

NB : On rappelle que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ **(1,5pt)**

- 2) Calcule $f(G)$ en fonction de AB , AC et BC et déduis – en $g(M)$ en fonction de MG , AB , AC et BC . (1pt)
- 3) En supposant que le triangle ABC est équilatéral de côté a , ($a \in \mathbb{R}_+^*$) détermine l'ensemble (Γ) des points M de P tels que $\frac{a^2}{4} \leq g(M) \leq \frac{a^2}{2}$. (1 pt)

Problème : -----[10,5 points]

Partie A : n étant un entier naturel non nul, on note f_n la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0; \infty[$ par : $f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln(x)$,

1. Dresse le tableau de variation de f_n . Déduis-en l'existence d'un réel unique a_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$. (1,5 pt)
2. Démontre que $1 \leq a_n \leq e^2$ et que $\ln(a_n) = 2 - \frac{2}{n} a_n$. (0,5 pt)
3. Exprime $f_{n+1}(a_n)$ en fonction de a_n et de n , puis déduis-en le sens de variation de la suite de terme général a_n . (0,75 pt)
4. Démontre que la suite de terme général a_n est convergente. On note l sa limite. (0,5 pt)
5. En utilisant les résultats de la deuxième question, calcule la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n)$. Déduis-en l . (0,75 pt)

Partie B : soit G la fonction définie $]0; \infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}} \text{ et la fonction } h \text{ définie par : } h(x) = \sqrt{x}$$

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ désignent les représentations graphiques de g et h respectivement dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Unité : 2cm).

1. Calcule les limites de g lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$. (0,5 pt)
2. Vérifie que : $g'(x) = \frac{f_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ Déduis-en le tableau de variation de g . (1,5 pt)
3. Calcule la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $[g(x) - h(x)]$. Interprète le résultat. (0,5 pt)
4. Précise les positions relatives de deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. (0,5 pt)
5. Trace les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$. (1 pt)
6. On pose : $I = \int_1^2 g(x) dx$
 - a. Calcule $J = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{2x\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties. (0,75 pt)
 - b. Déduis-en la valeur de I . (0,5 pt)

7. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

a. En utilisant les variations de g sur $[1; +\infty[$, montre que :

$$\frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{\left(1+\frac{k}{n}\right)}^{\left(1+\frac{k+1}{n}\right)} g(x) dx \leq \frac{1}{n} g\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \text{ où } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1 \quad (0,5 \text{ pt})$$

b. Déduis-en que :

$$u_n - \frac{g(2)}{n} \leq I \leq u_n - \frac{g(1)}{n} \quad \text{puis que} \quad I + \frac{g(1)}{n} \leq u_n \leq I + \frac{g(2)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad (0,75 \text{ pt})$$