

Composition de la 2 ^{ème} période 2025-2026		
Série: 12 ^{ème} Sciences Exactes.		
Épreuve de: Mathématiques.	Durée: 4h.	Coeff: 5.

Exercice 1 (4,5pts)

I°) 1) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

Déduisez-en la valeur de l'intégrale

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2) On considère la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$

a) Calcule la dérivée f' de la fonction f .

b) Déduisez-en à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de

$$J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$$

II°) Résous dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$1) 3(\log x)^2 + 14\log x - 5 = 0 \quad ; \quad 2) \begin{cases} e^{x+\ln 2} + e^{y+\ln 5} = 16 \\ e^{x+\ln 3} + e^{y+\ln 3} = 15 \end{cases}$$

III°) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Exercice 2 : (5,5pts)

I) Soit (U_n) une suite arithmétique croissante d'entiers naturels

1) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$; calcule U_2

2) On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3 .

Sachant que $\frac{m}{d} = 12$; détermine U_1 et U_3 .

3) En déduire l'expression de U_n en fonction de n . Calcule $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n . Trouve n pour S_n soit égale à 525. (d'après bac 2004)

II)

1) Détermine la solution générale de l'équation différentielle $y''+4y'+4y=0$.

2) Trouve la solution particulière f dont la courbe représentative (C) admet au point $A(0;1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $3x+y-2=0$. Quelles sont les coordonnées de l'extremum de (C) ?

Problème ----- (10 points)

A// Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1°/ Vérifie que le tableau de variation de f est bien le suivant :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+	+
$f(x)$	0	1	0	$+\infty$

2°/ Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.

3°/ Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

a) Détermine $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x .

b) Du signe de $g''(x)$ déduire celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$

c) Etudie la position de (C) par rapport à (T).

4°/ Trace (T) et (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé unité 1cm

B// Pour tout entier naturel n , on pose f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} \text{ et } (C_n) \text{ sa courbe représentative. Prouve que toutes les courbes } (C_n) \text{ passent}$$

par un même point A dont on déterminera les coordonnées.

C// On considère la fonction numérique h de la variable x définie par

$$h(x) = \frac{1}{e-1}e^x - x - \frac{1}{e-1}. \text{ On désigne par (H) la représentation graphique de } h \text{ dans le plan}$$

rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm)

1°/ a) Calcule $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$

b) Dresse le tableau de variation de h .

c) Prouve que la courbe (H) admet une asymptote dont on précisera l'équation

d) Utilise les variations de h pour déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de x

2°/ Trace la courbe (H).

3°/ On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}. \text{ On note } (\Gamma) \text{ la courbe représentative de } \varphi \text{ dans le repère précédent.}$$

a) Etudie le sens de variation de φ en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Prouve que la courbe (Γ) admet une asymptote dont on précisera l'équation

c) Etudie les positions relatives des courbes (H) et (Γ) .

d) Trace la courbe (Γ) dans le même repère que (H)

$$4°/ \text{ a) Etablis que pour tout réel } x \quad \varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t) dt$$

b) Donne une interprétation géométrique de $\varphi(0)$.