

COMPOSITION DE LA 2^{ème} PERIODEEPREUVE : de MathématiquesSérie : T.S.ECOEF : 05 DUREE : 04HEXERCICE1 : 05ptsOn considère les intégrales I_n et J_n définies :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* ; I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx ;$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* J_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x (\sin x)^n dx \text{ et soit la fonction } f: \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \text{ vers } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

1a) Calcule J_0 et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de n b) Calcule $I_2 - I_0$ puis démontre que $I_{n+2} - I_n = \frac{-1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$ 2) Calcule I_1 et I_3 3a) Démontre que pour tout $x \in \mathbb{R} \cos x = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ b) Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, on pose $U(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ Calcule $\frac{U'}{U}$; puis déduis –en une primitive de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ c) Calcule I_0 ; I_2 et I_4 EXERCICE2 : 03pts1) Résous l'équation différentielle $(E_1): y'' + 2y' + 2y = 0$ 2) On considère l'équation $(E_2): y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(-x + \frac{1}{2})$ a) Détermine les réels a et b tels que la fonction $g(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit une solution de l'équation (E_2) .b) La fonction h désignant une solution quelconque de l'équation E_1 , montre que la fonction f telle que : $f(x) = g(x) + h(x)$ est solution de (E_2) .c) Détermine la fonction f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{3}{2}$ PROBLEME 12ptsPartie ASoit la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation

2) Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln 2$.3) Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

- a) Détermine $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x
- b) Du signe de $g''(x)$, déduis celui de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$
- c) Etudie la position de (C) par rapport à (T) .
- 4) Trace (T) et (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité graphique $1cm$

Partie B :

Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) =$

$\frac{e^x}{(x+1)^n}$ et (C_n) la courbe représentative. Prouve que toutes (C_n) passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées

Partie C :

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par $(\mathcal{H})$ la représentation graphique de h dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique $2cm$

1a) Calcule $h(0)$; $h(1)$; $h(2)$

b) Dresse le tableau de variation de h .

c) Prouve que la courbe $(\mathcal{H})$ admet une asymptote que l'on précisera l'équation

2) trace la courbe $(\mathcal{H})$

3) On considère la fonction numérique φ de la variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère précédent.

a) Etudie le sens de variation de φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition

b) Prouve que la courbe (Γ) admet une asymptote que l'on précisera

c) Etudie les positions relatives des courbes $(\mathcal{H})$ et (Γ) .

d) Trace la courbe (Γ) sur le même repère que la courbe $(\mathcal{H})$.

4a) Etablis que, pour tout réel x : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} h(t) dt$

b) Donne une interprétation géométrique de $\varphi(0)$