

COMPOSITION DU DEUXIEME TRIMESTRE 2025-2026

Epreuve de MATHEMATIQUES

Classe : TSE

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice 1.....(3 points)

I/ Ecris le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivies de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

1. La fonction $\ln$ est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
3. Les solutions de l'équations différentielles $y'' - 4y = 0$ sont de la forme $x \mapsto A \cos 2x - B \sin 2x; (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. Si f est négative sur un l'intervalle $[a; b]$, alors l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{A} = \int_b^a f(x)dx$.

II/ Ecris le numéro de chacune des énoncés ci-dessous suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir la proposition vraie.

1. Si h est une fonction continue et paire sur l'intervalle $[-3; 3]$, alors $\int_{-3}^3 h(t)dt$ est ...
A. 0 ; B. $2 \int_0^3 h(t)dt$; C. $\frac{1}{2} \int_0^3 h(t)dt$; D. $2 \int_3^0 h(t)dt$
2. Le limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^x \ln(1 + e^{-x})$ est ...
A. 0 ; B. $+\infty$; C. 1 ; D. $-\infty$
3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos x - x \sin x$ est la fonction ...
A. $x \mapsto \cos x - \sin x$; B. $x \mapsto x \cos x$; C. $\sin x - \cos x$; D. $-x \cos x$
4. Les solutions de l'équations différentielles $y' = -7y$ sont de la forme ...
A. $x \mapsto ke^{7x} (k \in \mathbb{R})$; B. $x \mapsto 7ke^x (k \in \mathbb{R})$; C. $x \mapsto ke^{-7x} (k \in \mathbb{R})$; D. $x \mapsto ke^x (k \in \mathbb{R})$

Exercice 2.....(4 points)

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x dx$.

- 1) a) Calcule I_0 .
b) En utilisant une intégration par parties, calcule I_1 .
- 2) En effectuant deux intégrations parties successives, détermine, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n .
- 3) Sans calculer l'intégrale I_n .
a) Montre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
b) Pour tout nombre n entier naturel non nul, compare I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$.
c) Détermine la limite de I_n .

Problème.....(9 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$.

- 1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
- 3) a) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,5 < \alpha < 1$.
b) Déduis le signe $f(x)$ de suivant les valeurs de x .
- 4) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
Calcule $g'(x)$ et vérifie que $g'(x) = \frac{2}{x}f(x)$. En déduis le tableau de variation de g .

Partie B

- 1) Montre que le réel α définie dans la partie A// -a) est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x)$.
- 2) a) Calcule $h'(x)$ et étudie son signe sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
b) Prouve que $h\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
c) Calcule $h''(x)$ et étudie son signe $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
d) En déduis que $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a $0 \leq h'(x) \leq 0,3$.

Partie C

On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = h(U_n)$.

- 1) Montre pour tout entier naturel, $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$, et que la suite (U_n) est décroissante.
- 2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montre que l'on a :
 $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq 0,3|U_n - \alpha|$, puis que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,3)^n$.
- 3) En déduis que la suite (U_n) converge vers α .
- 3) Détermine un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indique la valeur de U_{n_0} donnée par la calculatrice. (Avec 5 décimales).

Situation complexe.....(4 points)

Au cours d'une conférence prononcée dans un lycée, la conférencière a donné, entre autres, les informations suivantes : « L'atmosphère terrestre contient de l'azote qui est transformé, en carbone¹⁴, radioactif, noté ^{14}C . Les êtres vivants contiennent donc du ^{14}C qui est renouvelé constamment. À leur mort, il n'y a plus d'emprunt de ^{14}C à l'extérieur et le ^{14}C qu'ils contiennent se désintègre. Le temps écoulé depuis la mort d'un être peut donc être évalué en mesurant la proportion de ^{14}C qui lui reste.

On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Il a été démontré que le nombre $N(t)$ d'atomes ^{14}C existant à l'instant t , exprimé en années, dans un échantillon de matière organique vérifie la relation : $N'(t) = -0,0001238N(t)$. Des archéologues ont découvert récemment des fragments d'os ayant perdu 30% de leur teneur en carbone. »

De retour en classe, un élève de Terminale confie à ses amis que selon lui, il est impossible de déterminer la période du carbone ^{14}C et que les os découverts par les archéologues n'ont pas plus de 100 ans.

Ses amis cherchent à vérifier ces affirmations.

Détermine l'âge des os découverts par les archéologues.