

COMPOSITION : 2^{ème} PERIODE

Série : TSE	Epreuve de : Mathématiques	2025-2026	Durée : 4 heures	Coef. : 5
-------------	----------------------------	-----------	------------------	-----------

Exercice 1 : -----[4 points]

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

- a) Calcule $P(3)$ et détermine les nombres complexes a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b). \quad (0, 5\text{pt})$$

- b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. $(0, 75\text{pt})$

- c) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\text{Im}(z_A) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$.

Calcule l'abscisse du point G barycentre du système $\{A; 2\}, (B; -2), (C; 2)\}$ et place les points A, B, C et G dans le repère. $(0, 5\text{pt})$

2. On définit l'application f du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$.

Montre que l'application f est une translation dont on précisera l'abscisse du vecteur. $(0, 5\text{pt})$

3. Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M du plan vérifiant :

$$\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|. \quad (0, 5\text{pt})$$

4. a) Détermine suivant les valeurs du nombre réel k , l'ensemble (E_k) des points M du plan vérifiant : $2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2 = k$. $(0, 75\text{pt})$

- b) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$2MA^2 - 2MB^2 + 2MC^2 = 10. \quad (0, 5\text{pt})$$

Exercice 2 : -----Les parties A, B et C sont indépendantes-----[6 points]

- A. On considère l'équation différentielle $(E_1): y'' - 4y' + 8y = (4x^2 + 2)e^{2x}$

- 1) Détermine les nombres réels a, b et c pour que la fonction g définie par

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \text{ soit solution de } (E_1). \quad (0, 75\text{pt})$$

- 2) Démontre que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2): y'' - 4y' + 8y = 0$. $(0, 5\text{pt})$

- 3) Résous l'équation différentielle (E_2) et déduis-en les solutions de (E_1) . $(0, 75\text{pt})$

B. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$

1. Soit la fonction φ définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Calcule la dérivée de la fonction φ et déduis-en la valeur de I . $(0, 5\text{pt})$

2. a) Vérifie que : $I + J = K$. $(0, 25\text{pt})$

- b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K , trouve une relation liant K et J . $(0, 75\text{pt})$

- c) Déduis-en les valeurs de J et K . $(0, 5\text{pt})$

C. Pour tout entier naturel n , on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x dx$.

1. En utilisant la méthode de l'intégration par parties, montre que $2I_n + nJ_n = 2$ et

$$nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}. \quad (1\text{pt})$$

2. Déduis de 1. les expressions de I_n et J_n en fonction de n , pour tout entier naturel n . (0, 5pt)

3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ? (0, 5pt)

Problème : -----[10 points]

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Etudie les variations de g sur $[0; +\infty[$. (0, 75pt)
2. Démontre l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1,14 < \alpha < 1,15$. (0, 5pt)
3. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0, 25pt)

Partie B :

- 1) a) Démontre que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. (0, 5pt)
b) Déduis-en le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. (0, 25pt)
- 2) a) Démontre que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. (0, 25pt)
b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat trouvé. (0, 5pt)
- 3) a) Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$. (0, 5pt)
b) Donne un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} (on pourra utiliser la partie A). (0, 5pt)
- 4) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. (0, 5pt)
- 5) a) Montre que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x + 1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$. (0, 5pt)
b) Etudie le sens de variation de φ sur $[0; +\infty[$ et déduis-en le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; +\infty[$. (0, 75pt)
c) Déduis des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) . (0, 5pt)
d) Trace (C) et (T) . (0, 75pt)

Partie C :

1. a) Détermine une primitive F de f sur $[0; +\infty[$. (On pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la partie B). (0, 5pt)
b) Calcule en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D du plan limité par la courbe (C) , la tangente (T) , les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (0, 5pt)
2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.
a) Calcule V_0 , V_1 et V_2 (on donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près). (0, 75pt)
b) Interprète graphiquement V_n . (0, 25pt)
c) Montre que, pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$. (0, 5pt)
Déduis-en le sens de variation de la suite (V_n) à partir de $n = 1$. (0, 25pt)
d) Détermine la limite de la suite (V_n) . (0, 25pt)