

Lycée KODONSO C.P - MATHS	COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES SÉRIE : TSE	Année scolaire : 2025 - 2026 Durée : 4 heures Date : 09/03/2026
---------------------------------	---	---

EXERCICE 1 : (5pts)

On considère la suite d'intégrale (J_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; J_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx.$$

1. Calcule J_1 .
2. En intégrant par parties, montre que $\forall n \in \mathbb{N}; J_n = \frac{n-1}{n+2} J_{n-2}$. (On pourra remarquer que $x^n = x^{n-1} \times x$)
3. En déduis J_3 et J_5 .

EXERCICE 2 : (5pts)

I. Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants

$$1^\circ) \begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = 6 \ln 2 \end{cases} \quad 2^\circ) \begin{cases} xy = 243 \\ \log_x^y + \log_y^x = \frac{17}{4} \end{cases}$$

II. Soit le polynôme $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

1°) Calcule $q(1)$ puis résous l'équation $q(x) = 0$ et l'inéquation $q(x) \geq 0$.

2°) En déduis la résolution de :

a°) $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8 \ln x + 3 = 0$

b°) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 8e^x + 3 = 0$

PROBLEME : (10pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie en partie : $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$. On note par (C) sa graphique.

1°) a) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Etudie les variations de f .

2°) a) Détermine une équation de la droite (D) tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b) Etudie la position de (C) par rapport à (D) .

3°) Construis la droite (D) et la courbe (C) .

Partie B

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \text{ et } (\Gamma)$$

sa représentation graphique.

1°) a) Etudie la continuité de g en 0.

b) Calcule la limite en 0 de $\frac{g(x)}{x}$ et interprète le résultat.

2°) a) Calcule la dérivée g' de g sur $]0; +\infty[$. (tu pourras te servir de la fonction t définie par : $t(x) = \ln x$ et remarques que $g = f \circ t$).

b) Détermine le signe de $g'(x)$. En déduis les variations de g .

c) Détermine une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 1.

d) Calcule la limite de g en $+\infty$.

3°) Construis (Γ) .

4°) soit g_1 la restriction de g à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

a) Démontre que g_1 réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}; e\right]$ sur un intervalle K que tu préciseras.

b) Détermine les variations de g_1^{-1} , la bijection réciproque de g_1 .

c) Trace dans le même repère que (Γ) , la courbe (Γ'_1) de la bijection g_1^{-1} .

5°) On pose : $A = \int_1^e g(x) dx$ et $I = \int_1^e \ln x dx$.

a) Calcule I à l'aide d'une intégration par parties.

b) Vérifie que pour tout nombre réel x , on a : $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

c) Démontre que pour tout x de $[1; e]$, on a : $0 \leq g(x) \leq \frac{4}{3} \ln x$.

d) En déduis que : $0 \leq A \leq \frac{4}{3}$.

Partie C

Soit h la fonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $h(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1}$.

1°) Détermine l'ensemble de définition de h .

2°) On pose : $Z = h(-1+i)$. Calcule Z , $\frac{1}{Z}$ et Z^3 . Tu donneras chacun des résultats sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

3°) On pose : $z = e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel. Démontre que dans ce cas, $\overline{h(z)} = h(\bar{z}) = h(z)$ où $\bar{z}$ étant le conjugué de z .