

RECUEIL DE COMPOSITIONS
MATHEMATIQUES
TSE - TSI

PRIMIERE PERIODE

EXERCICE 1: (5pts)

1°/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$; b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5+2\sqrt{3} = 0$.

2°/ On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1+\sqrt{3} + i$; $z_C = 1+\sqrt{3} - i$; $z_D = 1 - 2i$.

a) Placer les points A, B, C et D et préciser la nature du quadrilatère ABCD.

b) Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peut-on dire pour les droites (AB) et (BD) ?

c) Prouver que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (Γ).

3°/ On considère l'équation :

$$z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + 5+ 4\cos\theta = 0 \quad \textcircled{1} ; \quad \text{où } \theta \text{ est un nombre réel}$$

a) Résoudre l'équation $\textcircled{1}$ dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les images des solutions de $\textcircled{1}$ appartiennent au cercle (Γ).

EXERCICE 2 : (5pts)

1°/ Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.

2°/ a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne par 7 de 3^n .

b) Soit le nombre $A = (2243)^{325} + (1179)^{154}$. Quel est le reste de la division euclidienne de A par

7.

c) Le nombre B s'écrit dans le système de numération de base trois $\overline{121010201}$.

Trouver le reste de la division euclidienne de B par 7.

Déterminer l'écriture de B dans le système hexadécimal.

3°/ Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $a + b = 120$ et $\text{PGCD}(a, b) = 12$

PROBLEME : (10pts)

A/ Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2_x - \sqrt{1+x^2}$

1°/ Étudier les variations de g

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

3°/ Calculer $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x élément de $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} - x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans

le plan muni d'un repère orthogonal. On note $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ les droites d'équations respectives $y = -3x$ et $y = x$.

1°/ Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°/ Montrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout réel x par $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

En déduire le tableau de variation de f .

3°/ a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-3x)]$. Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?

b) Montrer que la droite $(\mathcal{D}')$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

4°/ Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$