

Exo : un encadrement de π

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $I_n = \int_0^\pi \sin^n x \, dx$.

1°/ Calculer I_0 et I_1

2°/ Sans calculer I_n , démontrer que (I_n) est décroissante.

3°/ À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

4°) a) Calculer I_9, I_{10} et I_{11}

b) En déduire que :

$$\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}.$$

Réponse :

1°/ Calcul de I_0 et de I_1

$$* I_0 = \int_0^\pi 1 \cdot dx = [x]_0^\pi = \pi - 0 \Rightarrow \boxed{I_0 = \pi}$$

$$* I_1 = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1$$

$$\boxed{I_1 = 2}$$

20/ Sans Calculer I_n , montrons que (I_n)
est une suite décroissante

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} (\sin^{n+1} x - \sin^n x) dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} (\sin x - 1) \sin^n x dx$$

$$\text{Pour } x \in [0, \pi], \text{ on a : } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\text{Donc : } 0 \leq \sin x \leq 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \leq 1 \\ \sin^n x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x - 1 \leq 0 \\ \sin^n x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sin x - 1) \sin^n x \leq 0 \text{ sur } [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (\sin x - 1) \sin^n x dx \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow (I_n) \text{ est}$$

une suite décroissante.

3°/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

$$\text{ona: } I_{n+2} = \int_0^\pi \sin^{n+2} x \, dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin^n x \, dx.$$

$$\begin{array}{l|l} U = \sin^{n+1} x & \Rightarrow U' = (n+1)(\cos x) \sin^n x \\ V' = \sin x & V = -\cos x \end{array}$$

$$I_{n+2} = \left[-\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (n+1)(-\cos^2 x) \sin^n x \, dx$$
$$= [0 - 0] + (n+1) \int_0^\pi (\cos^2 x) \sin^n x \, dx$$

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx$$

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^\pi (\sin^n x - \sin^{n+2} x) \, dx.$$

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^\pi \sin^n x \, dx - (n+1) \int_0^\pi \sin^{n+2} x \, dx$$

$$I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$$

$$\text{on a: } (n+1)I_{n+2} + I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\text{Donc } \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n} \quad \text{CQFD.}$$

4°) Calcul de I_9 , I_{10} et I_{11}

$$\text{on a: } I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

$$I_9 = \frac{8}{9} I_7 \quad n=7$$

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 \quad n=5$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 \quad n=3$$

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 \quad n=1$$

Produit

$$I_9 = \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 \quad \text{avec } I_1 = 2$$

$$= \frac{2^3}{3^2} \times \frac{2 \times 3}{7} \times \frac{2^2}{5} \times \frac{2}{3} \times 2$$

$$\boxed{I_9 = \frac{2^8}{3^2 \times 7 \times 5}}$$

$$* I_{11} = \frac{10}{11} I_9 \quad n=9.$$

$$I_{11} = \frac{2 \times 5}{11} \times \frac{2^8}{3^2 \times 7 \times 5}$$

$$I_{11} = \frac{2^9}{3^2 \times 7 \times 11}$$

$$* I_{10} = \frac{9}{10} I_8$$

$$I_8 = \frac{7}{8} I_6$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \quad \text{avec } I_0 = \pi$$

Produit

$$I_{10} = \frac{3^2}{2 \times 5} \times \frac{7}{2^3} \times \frac{5}{2 \times 3} \times \frac{3}{2^2} \times \frac{1}{2} \times \pi$$

$$I_{10} = \frac{3^2 \times 7 \times \pi}{2^8}$$

b) Déduction : (I_n) étant une suite décroissante
alors : $I_{11} \leq I_{10} \leq I_9$.

$$\Rightarrow \frac{2^9}{3^2 \times 7 \times 11} \leq \frac{3^2 \times 7}{2^8} \times \pi \leq \frac{2^8}{3^2 \times 7 \times 5}$$

$$\Rightarrow \frac{2^9}{3^2 \times 7 \times 11} \times \frac{2^8}{3^2 \times 7} \leq \pi \leq \frac{2^8}{3^2 \times 7 \times 5} \times \frac{2^8}{3^2 \times 7}$$

$$\Rightarrow \frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 5 \times 7^2}$$

(Q.F.D.).