

Exo : on définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$

1°) Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante
 2°) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$

b) En déduire que :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \quad (1) \quad \leftarrow n/n-1$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = I_{n+4} - I_n$.

Utiliser (1) pour démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

3°) a) Calculer I_2

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

4°) a) Calculer I_1

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Réponse :

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}.$$

10) Démontrons que (I_n) est positive et décroissante

Soit $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$, on a : $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan(0) \leq \tan(x) \leq \tan \frac{\pi}{4}$ car la fonction $x \mapsto \tan x$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

on a : $0 \leq \tan x \leq 1$.

$$\Rightarrow 0 \leq \tan^n x \leq 1 \Rightarrow \tan^n x \geq 0 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{4}]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \tan^n x \geq 0 \Rightarrow \boxed{I_n \geq 0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (I_n) est donc positive.

$$\begin{aligned} \text{* on a : } I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/4} (\tan^{n+1} x - \tan^n x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\tan^n x)(\tan x - 1) \, dx. \end{aligned}$$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a: $0 \leq \tan x \leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \tan^n x \leq 1 \\ \tan x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \tan^n x \leq 1 \\ \tan x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\tan^n x)(\tan x - 1) \leq 0 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{4}]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \tan^n x (\tan x - 1) dx \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite (I_n) est décroissante

2°/ a) Dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^n x$

La fonction dérivée est:

$$x \mapsto (n+1)(1 + \tan^2 x) \tan^n x$$

b) Déduis-on en que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{on a: } I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x \cdot dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \tan^n x dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x - 1) \tan^n x dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \tan^n x dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/4} (n+1)(1 + \tan^2 x) \tan^n x dx - I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \left[\tan^{n+1} x \right]_0^{\pi/4} - I_n$$

$$\Rightarrow I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \left[\tan^{n+1} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \tan^{n+1}(0) \right]$$

$$\Rightarrow I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} [1 - 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}} \quad \text{Q.E.D.} \quad (1)$$

• Deducisons-en que :

$$\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- Comme la suite (I_n) est positive alors:
 $0 \leq I_{n+2} \quad / + I_n$

$$\Leftrightarrow I_n + 0 \leq I_n + I_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_n \leq \frac{1}{n+1}} \text{ car } I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

- on a $I_{n+2} \leq I_n$ (I_n) est décroissante

$$\Leftrightarrow I_n + I_{n+2} \leq I_n + I_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq 2I_n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2n+2} \leq I_n}$$

$$\text{on a: } \begin{cases} I_n \leq \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2n+2} \leq I_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

CQFD

o Réduisons-en que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

ona: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Comme $\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (Théorème des gendarmes)

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = I_{n+4} - I_n$.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

ona: $\left\{ \begin{array}{l} I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \\ I_{n+2} + I_{n+4} = \frac{1}{(n+2)+1} \end{array} \right.$ d'après (1)

$(\Rightarrow) \left\{ \begin{array}{l} -I_n - I_{n+2} = -\frac{1}{n+1} \\ I_{n+2} + I_{n+4} = \frac{1}{n+3} \end{array} \right.$

ona: $I_{n+4} - I_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$

$(\Rightarrow) \boxed{f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}} \quad \text{CQFD.}$

30/ a) Calcul de I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x - 1) \, dx$$

$$= [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - (0 - 0) = \frac{4 - \pi}{4}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{4 - \pi}{4}}$$

b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$$

$$f(2) = \cancel{I_6} - I_2$$

$$f(6) = \cancel{I_{10}} - \cancel{I_6}$$

$$f(10) = \cancel{I_{14}} - \cancel{I_{10}}$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$f(4n-2) = I_{4n+2} - \cancel{I_{4n-2}}$$

somme

$$f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$$

(Q.E.D.)

c) Déduisons-en que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

on sait que : $f(2) + f(6) + f(10) + \dots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{4n+2} = 0$$

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow I_0 + I_2 = 1 \Rightarrow I_0 = 1 - I_2$$

$$f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}$$

$$f(2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

$$f(6) = \frac{1}{9} - \frac{1}{7}$$

$$f(4n-2) = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1}$$

$$f(2) + f(6) + \dots + f(4n-2) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}$$

$$I_{4n+2} - I_2 = -1 + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right)$$

$$1 - I_2 + I_{4n+2} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right)$$

DMC :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - I_2 + I_{4n+2})$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (I_0 + I_{4n+2})$$
$$= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

(CFD)

4) a) Calcul de I_1 : $I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

$$\Rightarrow I_1 = - \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)}{\cos x} \, dx = \left[-\ln |\cos x| \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\ln 1 \right) = \ln \frac{2}{\sqrt{2}} = \ln \frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \boxed{I_1 = \frac{1}{2} \ln 2}$$

b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$$

on a: $f(n) = I_{n+4} - I_n$, donc

$$f(1) = I_5 - I_1$$

$$f(5) = I_9 - I_5$$

$$f(9) = I_{13} - I_9$$

$$\vdots$$

$$f(4n-3) = I_{4n+1} - I_{4n-3}$$

somme:

$$f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = I_{4n+1} - I_1$$

Q.F.D.:

c) Déduisons-en que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

$$\text{on a: } f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} \text{ ; donc:}$$

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$f(5) = \frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right)$$

$$f(9) = \frac{1}{12} - \frac{1}{10} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \right)$$

$$f(4n-3) = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n-2} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} \right)$$

$$f(1) + f(5) + f(9) + \dots + f(4n-3) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$I_{4n+1} - I_1 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-2I_{4n+1} + 2I_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}}$$

on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{4n+1} = 0$.

Donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2I_{4n+1} + 2I_1) = -2(0) + 2\left(\frac{1}{2} \ln 2\right) = \ln 2$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

CQFD