

COMPOSITION DE LA PREMIÈRE PÉRIODE

Classe : TSE

Épreuve : Mathématiques
heures

Coeff :4

Durée :4

Exercice 1 :

- 1) a) Quels sont les nombres complexes solutions de l'équation : $Z^4 = 1$.
 b) Déterminer la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solution de l'équation : $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.
 c) Vérifier que $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.
 d) En déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes solution de l'équation : $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
- 2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- 3) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels tels $\begin{cases} m - 4d = 20 \\ 1 < d < 4 \end{cases}$

Avec $d = \text{pgcd}(x; y)$ et $m = \text{ppcm}(x; y)$

- 4) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 2y = 94$
2. Soit a et b deux entiers relatifs. On pose $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$.
 a) Montrer que $(a; -b)$ est une solution de (E).
 b) Déterminer le reste de la division Euclidienne de n par 22.
3. Alassane est né en $19\alpha\beta^{10}$. En 2004, son âge était curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance.
 Quel était son âge en 2004 ?

Problème :

- A. L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 1 = 0$
 - 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations (E) : $z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$ et (F) : $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$
 - 2) On appelle z_1 la solution d'une des deux équations (E) et (F) dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Exprimer les autres solutions en fonction de z_1 .
 - 3) Trouver le réel a tel que pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^2 + az + 1)(z^2 - az + 1)$$
 - 4) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de $z^6 + 1 = 0$
 - 5) Montrer que le produit des six solutions de l'équation $z^6 + 1 = 0$ est un carré parfait réel.
- B. Mettre les complexes $a = 1 + i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $(ab)^{2020}$.
- C. Un étranger A revient dans votre famille chaque 24 jours et un autre B y revient chaque 18 jours. Le jour du baptême d'Ali les deux étrangers étaient présents chez vous.
 - a. À partir de ce jour, combien de jours s'écouleront pour que l'étranger A et l'étranger B se retrouvent pour la première fois chez vous ?
 - b. En déduire le nombre de jours à observer pour qu'ils se retrouvent chez vous pour la cinquième fois.
 À cette date, combien de retours chez vous auront fait les deux étrangers ?