

Compositions: 1 ^{ère} période		
Epreuve de Mathématiques		
Série : TSE	Durée : 4heures	Coefficient: 5

Exercice 1: (6 points)

1. Soit θ un nombre réel tel que : $0 \leq \theta \leq \pi$, on considère le nombre complexe $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$.

- a) Ecrire le complexe z sous forme trigonométrique.
b) Déterminer θ pour que z et $1 - z$ aient même module.

2. Résoudre l'équation : $z^4 = 16i$. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{z-2}{2}\right)^4 = i$ puis écrire ces solutions sous forme exponentielle.

3. Pour $n \in \mathbb{C}^*$, soit $P_n(z) = z^3 - 6nz^2 + 12n^2z - 7n^3$.

a) Vérifier que $P_1(1) = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P_1(z) = 0$.

b) En posant $U = \frac{z}{n}$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $P_n(z) = 0$.

c) Soit T_n le triangle défini par les images des solutions de $P_n(z) = 0$.

Démontrer que T_1 est équilatéral. En déduire que, pour tout n , T_n est équilatéral.

Exercice 2: (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, l'équation: $7x - 4y = 4$.

2. Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que :

- $a = \overline{75}$ dans le système de base α et $a = \overline{49}$ dans le système de base t ;
- $b = \overline{310}$ dans le système de base α et $b = \overline{125}$ dans le système de base t .

Déterminer α et t , puis a et b .

3. Soit n un entier naturel non nul. On pose $A = n + 3$ et $B = 3n + 4$.

a) Montrer que tout diviseur commun à A et B , est un diviseur de 5.

b) Pour quelles valeurs de n le PGCD (le plus grand commun diviseur) de A et B est-il égal à 5 ?

4. Soit a et b deux entiers naturels non nuls dont le PPCM est noté m et le PGCD est noté d . Déterminer a et b sachant que : $m^2 + 16d^2 = 16660$.

Problème:.....(10points)

Soit f la fonction numérique la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\mathcal{C}_f) \text{ sa courbe représentative}$$

dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

1. a) Etudier les variation de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1.$$

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; +\infty[$ et vérifier que $1,28 < \alpha < 1,3$.

c) Déterminer le signe de g sur $]1; +\infty[$.

2. a) Justifier que l'ensemble de définition D de f est $[-1; +\infty[$.

- b) Etudier la continuité de f en 1.
3. a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .
4. a) Démontre que :
- Pour tout x élément de $]1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - Pour tout x élément de $] -1 ; 1[$, $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- b) Etudier le signe de f' sur $] -1 ; 1[$.
5. Justifier que: $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0,15 < f(\alpha) < -0,10$.
6. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1 ; +\infty[$.
7. Etudier les branches infinies puis donner l'allure de $(\mathcal{C}_f)$.