

EXAMEN DE FIN D'ANNEE		
SERIE : TSE	DUREE : 4h	COEFFICIENT : 4

Exercice1 : 5pts

I// Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, i, j) , on considère le polynôme $p(Z)$ telque : $p(Z) = Z^3 + 2(1 - 2\cos 2\theta)Z^2 + 4(1 - 2\cos 2\theta)Z + 8$

- 1) Calculer $p(-2)$.
- 2) Factoriser $p(Z)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
- 3) On désigne par Z_1 ; Z_2 et Z_3 les solutions de l'équation $p(Z) = 0$.
Calculer le module et un argument de Z_1 ; Z_2 et Z_3 .
- 4) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3 .

Pour quelles valeurs de θ , le triangle ABC , est –il équilatérale ? (3pts)

II/ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1er chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- Le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? (2pts)

NB: Les parties I/ et II/ sont indépendantes

Exercice2 : 5pts

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule Si elle est rouge, il gagne 10 F, si elle est jaune, il perd 5 F, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F.

- 1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
- 2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
 - a) Etablir la loi de probabilité de la variable X
 - b) Calculer l'espérance de X

3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Problème : 10pts

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (**E1**) : $y' - 2y = xe^x$

1) Résoudre l'équation différentielle (**E2**) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)e^x$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (**E1**).

b) Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (**E1**) si et seulement si $u - v$ est solution de (**E2**).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (**E1**).

3) Déterminer la solution de l'équation (**E1**) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x - x - 2.$$

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C : Etude de la fonction principale Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^x en facteur).

2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .

3) Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

4) Etablir le tableau de variation de f .

5) Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$

2/3

2) a) Calculer $\int_m^0 x e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\int_m^0 f(x) dx$

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.