



BP : 780 Parakou ;

Date : 19/11/2019

Tel : 95 49 98 55 / 97 72 91 74

Classe : T^{le} C

République du Bénin

Durée : 4h

COMPOSITION DU PREMIER TRIMESTRE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Contexte : Communication stratégique du centre de recherche Agrolabo.

Agrolabo est un centre de recherche agricole possédant plusieurs sites d'expérimentation. Ses responsables envisagent d'introduire des innovations concernant les aires à emblaver, l'entretien des semis et la récolte. En vue de protéger ces innovations, le centre opte, dans le cadre de sa communication avec les sites, pour le cryptage des données. La pièce maitresse de cette technique est un solide en forme d'un cube ABCDEFGH. Ce cube détermine la nature et les caractéristiques de l'innovation, dans le sens que chaque quadruplet de points distincts, parmi ces sommets, détermine l'action à mener. Pour les besoins de calculs, les sommets A,B,C,D,E,F,G,H dans cet ordre, sont identifiés aux éléments $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ de l'ensemble $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. C'est ainsi que la résolution du système (Σ) ci-dessous permet d'accéder au mode de fonctionnement des moissonneuses.

$$(\Sigma) : \begin{cases} 7x + 3y \equiv 13[8] \\ 5y - 7z \equiv -18[8] \\ z - 5t \equiv -21[8] \\ -x + 3t \equiv 14[8] \end{cases}$$

Méré, élève en classe de terminal scientifique, est intéressé par le fonctionnement des moissonneuses, les techniques de cryptage ainsi que la technique de calcul des aires emblavées.

Tâche : Tu es invité à trouver des réponses aux différentes préoccupations de Méré en résolvant les trois problèmes ci-après

Problème 1 :

- 1- a) Démontre que pour tout entier relatif u , $\hat{u}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ si et seulement u est impair.
b) Réalise la table de multiplication de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Déduis les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et précise l'inverse de chacun d'eux.
- 2- a) Démontre que le système (Σ) est équivalent au système (Σ') ci après :

$$(\Sigma') : \begin{cases} 2x \equiv 2[8] \\ y \equiv (5+5x)[8] \\ z \equiv (5-x)[8] \\ t \equiv (2+3x)[8] \end{cases}$$

- b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x \equiv 2[8]$
- 3- Détermine les quadruplets de sommets du cube qui illustrent le mode de fonctionnement des moissonneuses.

Problème 2:

Partie A :

Pour le cryptage des données les techniciens utilisent un point S du cube dont les coordonnées sont des entiers naturels dans un repère de l'espace bien choisi. S appartient aux plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives $x+2y+2z-16=0$ et $11x+9y-2z-19=0$.

- 4- a) Démontre que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ) .
 b) Démontre que si $M(x, y, z)$ est un point de (Δ) , alors $12x+11y=35$.
 c) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x+11y=35$, d'inconnue (x, y) .
 d) Détermine les points de (Δ) dont toutes les coordonnées sont des entiers relatifs.
- 5- Détermine les coordonnées du point S.

Partie B :

Les messages codés sont transmis par des signaux électriques à travers l'application $\varphi = f \circ d$ où f est l'application de l'espace dans lui-même dont l'expression analytique est

$$\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z - 1 \\ 3y' = 2x - y - 2z + 2 \\ 3z' = x - 2y + 2z + 1 \end{cases} ; \text{ et } d \text{ le demi-tour d'axe la droite } (D) \text{ dont un système d'équations}$$

cartésiennes est

$$-x + 2 = \frac{y-1}{2} = z + 1$$

- 6- a-Détermine l'ensemble des points invariants par f
 b-Détermine la nature de f .
- 7- Détermine l'expression analytique de d
- 8- Détermine la nature et l'élément caractéristique de φ . Déduis son expression analytique

Problème 3 :

Les aires emblavées sont calculées en utilisant l'application qui à tout point M du plan complexe d'affixe z différent de i associe le point M' d'affixe z' tels que $z' = \frac{z^2}{i-z}$. L'aire est en unité d'aire la valeur absolue de la partie réelle de z' . On pose $z = x + iy$

- 9- Détermine les points M du plan confondus avec leur image M' .
- 10-Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et de y .
- 11-La superficie emblavée par un agriculteur, est déterminée à partir de $z = a+ib$ avec $a < b$ telles que $(a; b)$ soit solution du système
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}$$
- a) Démontre que $\text{pgcd}(a; b) = 1$ ou $\text{pgcd}(a; b) = 5$.

b) Détermine en unité d'aire la superficie emblavée par cet agriculteur.