

Composition du 1^{er} TrimestreEpreuve : MathématiquesClasse : T^{le}CDurée : 4heures 00min**Contexte : Ensemble, pour la justice climatique.**

Les changements climatiques constituent ces dernières années une préoccupation planétaire majeure du fait de leurs impacts néfastes prononcés sur l'environnement et l'activité socio-économique. Toutes les régions du monde subissent aujourd'hui ses effets sous diverses formes : inondations plus fortes et plus fréquentes, vagues de chaleur plus intenses, vents de plus en plus violents, etc. En Afrique de l'Ouest, les impacts des changements climatiques sont considérablement néfastes pour la nature et les populations, affectant particulièrement les plus vulnérables, et les mesures d'adaptation déjà en place sont loin d'être suffisantes. Le leitmotiv pour limiter le réchauffement climatique à moins de $\text{pgcd}(2^{445} + 7; 15)$ degrés reste encore utopique. Dans un secteur, la quantité des émissions pourrait être évaluée à $\eta = \text{pgcd}(2^{23500} - 1; 2^{62181} - 1) + 1$ gigagrammes équivalents CO₂. Afin de déterminer η , on désigne par a , un entier naturel supérieur ou égal à 2 et m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \leq n$ et $d = \text{pgcd}(a^n - 1; a^m - 1)$.

Tâche : *Participe à la justice climatique à travers la résolution des trois problèmes ci-après.*

Problème 1

1. Etablis que $\text{pgcd}(2^{445} + 7; 15) = 3$.

- 2.(a) Démontre que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
- (b) Déduis-en que $2^{6557} - 1$ n'est pas premier.
3. On note r le reste de la division euclidienne de n par m .
- (a) Démontre que $a^n \equiv a^r[a^m - 1]$.
- (b) Prouve que $d = \text{pgcd}(a^r - 1; a^m - 1)$.
4. Déduis-en que $d = a^{\text{pgcd}(n;m)} - 1$.
- 5.(a) Etablis que $\eta = 2^{47}$.
- (b) Déduis-en le nombre de chiffres de η lorsqu'il est écrit dans le système décimal puis le nombre de chiffres de η lorsqu'il est écrit dans le système octal.

Problème 2

Dans le but de réduire le taux de carbone, on se propose d'installer un micro-climat dans un pays. Il s'agit d'un domaine ABC tel que $AB = AC = 3m$ et $BC = 2m$. Il sera creusé un puits sur l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que

$$4MA^2 + 6MB^2 = (\sqrt{44} - \sqrt{6}\overrightarrow{MC}).(\sqrt{44} + \sqrt{6}\overrightarrow{MC})$$

de sorte qu'un tuyau d'une pompe à eau passe par le point G , barycentre des points pondérés $(A; 2)$, $(B; 3)$ et $(C; 3)$. L'espace orienté $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 1 \\ y' = 2x - y + z + 2 \\ z' = 3x - 4y - z - 2 \end{cases}$$

6. Démontre que f est une transformation affine de l'espace puis établis l'expression analytique de sa réciproque.

7. Etablis que G est le milieu de $[IJ]$ où I est le milieu de $[BC]$ et J est le milieu de $[AI]$.
- 8.(a) Justifie que $AI = 2\sqrt{2}m$
- (b) Calcule AG , BG et CG .
- (c) Déduis-en que (Γ) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
9. Démontre que les droites (AB) , (AC) et (BC) ont chacune un unique point de commun avec (Γ) .
10. Détermine le lieu des symétriques de G par rapport aux points de (Γ) .

Problème 3

Afin de faire un bon dimensionnement de l'espace, on se donne l'application φ_λ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} - \lambda \overrightarrow{Mp(H)} = \vec{0}$ où p est la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur le plan (α) d'équation cartésienne $x = y$ avec λ , un paramètre réel et l'ensemble (δ) des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que $x^2 - y^2 = 0$. Le nombre d'espèces végétales à planter est le pgcd de $a = 9n + 17$ et $b = 2n + 2$ où n est un entier relatif.

- 11.(a) Démontre que (δ) est une réunion de deux plans dont (α) .
- (b) Déduis-en une représentation paramétrique de la droite d'intersection de ces deux plans.
- 12.(a) Détermine l'expression analytique de p .
- (b) Déduis-en l'expression analytique de φ_λ .
- (c) Déduis-en l'expression analytique de la réflexion de plan (α) .
13. Détermine suivant les valeurs de l'entier relatif n , le nombre d'espèces végétales à planter.

Foi et courage