

Compositions du 2ème Trimestre

Epreuve de MathématiquesDurée : 3 heuresNiveau : TC

Exercice 1 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on considère les points $A(a = 1 + 2i)$, $B(b = \bar{a})$, $C\left(c = \frac{3(3+i)}{2}\right)$, $D\left(d = \frac{3(1+i)}{2}\right)$ et $\Omega(\omega = \frac{5}{2})$.

- 1) Vérifier que a et b sont solutions de l'équation : $Z^2 - 2Z + 5 = 0$ et déduire que l'abscisse du point P milieu de $[AB]$ est $p = 1$.
- 2) Vérifier que : $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$. En déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .
- 3) Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\pi/2}$. En déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires.
- 4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme $M(Z)$ en $M'(Z')$. On pose $h(p) = G$.
 - a) Montrer que : $Z' = \frac{2}{3}Z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
 - b) Montrer que : Ω, G et D sont alignés.

Exercice 2 :

On dispose de deux urnes contenant chacune trois jetons numérotés de 0 à 2. Dans la première urne les jetons sont rouges et dans la seconde les jetons sont bleus. On tire au hasard un jeton de la première urne et on note son numéro a et un jeton de la seconde urne et on note son numéro b .

A ce couple $(a; b)$, on associe le nombre complexe $Z = a + ib$.

- 1) Quelle est la probabilité pour que Z vérifie l'équation :
(E) : $Z^2 - (3 + 2i)Z + 2 + 4i = 0$
- 2) Quelle est la probabilité pour que :
 - a) Z soit réel ?
 - b) Z soit imaginaire non nul ?
- 3) On considère la variable aléatoire X qui à chaque épreuve constituée d'un tirage d'un jeton rouge et d'un jeton bleu, associe le module de Z .
 - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer $E(X)$.

Problème :

On considère la fonction h définie par :
$$h(x) = \begin{cases} -2(x-1)\ln(x-1) + e^{x-1} & \text{si } x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

- 1) a) Quel est l'ensemble de définition de h ?
b) Etudier la continuité de h en 1.
c) Etudier la dérivabilité de h en 1. Interpréter le résultat.
- 2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x-1)e^{x-1} - 2$.
 - a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 \in]1, 6; 2[$.
 - c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.
- 3) Soit f une fonction définie par : $f(x) = e^{x-1} - 2[1 + \ln(x-1)]$.
 - a) Montrer que $\forall x > 1$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x-1}$. Etudier les variations de f .
 - b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]1; +\infty[$.
- 4) a) En déduire le sens de variation de h .
b) Etudier la limite de h en $+\infty$.
c) Dresser le tableau de variation de h .
d) Etudier la branche infinie de h .
- 5) Tracer $(\mathcal{C}_h)$ dans un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$.