

Mathématiques – Transformations du plan complexe

(Terminale D/C)

I. Rappel : Affixe d'un point

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, à tout point $M(x; y)$, on associe le nombre complexe :

$$z = x + iy$$

z est l'affixe de M .

Pour deux points A et B d'affixes z_A et z_B :

$$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A \quad \text{et} \quad AB = |z_B - z_A|$$

II. Translation

Soit T la translation de vecteur d'affixe a .

Si $M(z)$ a pour image $M'(z')$, alors :

$$z' = z + a$$

Exemple : $a = 2 - i$, $z = 3 + 4i$

$$- z' = 3 + 4i + (2 - i) = 5 + 3i$$

III. Homothétie

Soit H une homothétie de centrée $A(a)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R}$).

Si $M(z)$ a pour image $M'(z')$, alors :

$$z' - a = k(z - a) \Leftrightarrow z' = kz + (1 - k)a$$

Cas particulier : centrée O ($a = 0$) : $z' = kz$

Exemple : $a = 1 + i$, $k = 2$, $z = 3 - i$

$$- z' = 2(3 - i) + (1 - 2)(1 + i) = 5 - 3i$$

IV. Rotation

Soit R une rotation de centrée $A(a)$ et d'angle θ .

Si $M(z)$ a pour image $M'(z')$, alors :

$$z' - a = e^{i\theta}(z - a) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - a) + a$$

$$\text{avec : } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Cas particulier : centrée O ($a = 0$) : $z' = e^{i\theta}z$

Exemple : $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 2 + i$

$$- z' = i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$$

V. Similitude directe

Une similitude directe est une transformation qui conserve les angles orientés et multiplie les longueurs par un même nombre positif.

Elle s'écrit : $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$)

On pose : $a = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$).

Alors : rotation d'angle θ , homothétie de rapport ρ , et éventuellement une translation.

VI. Similitude directe de centrée $A(a)$

Si la similitude a pour centrée $A(a)$, alors :

$$z' - a = \lambda(z - a) \quad \text{avec} \quad \lambda = \rho e^{i\theta}$$

On a : $|z' - a| = \rho |z - a|$ et $\arg\left(\frac{z' - a}{z - a}\right) = \theta$

VII. Symétrie centrale

La symétrie centrale de centrée $A(a)$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$.

A est le milieu de $[MM']$:

$$z' = 2a - z$$

Cas particulier : centrée O : $z' = -z$

VIII. Symétrie axiale

1. Par rapport à l'axe réel : si $z = x + iy$, alors :

$$z' = x - iy = \bar{z}$$

2. Par rapport à l'axe imaginaire :

$$z' = -\bar{z}$$

IX. Reconnaître une transformation

Une expression de la forme :

- : $z' = z + a$ $\rightarrow$ translation
- : $z' = kz$ $\rightarrow$ homothétie (centrée O)
- : $z' = e^{i\theta}z$ $\rightarrow$ rotation (centrée O)
- : $z' = -z$ $\rightarrow$ symétrie centrale (centrée O)
- : $z' = \bar{z}$ $\rightarrow$ symétrie axe réel
- : $z' = -\bar{z}$ $\rightarrow$ symétrie axe imaginaire
- : $z' = az + b$ ($a \neq 0$) $\rightarrow$ similitude directe

X. Conservation des distances et des angles

Transformation	Distances	Angles
Translation	conserve	conserve
Rotation	conserve	conserve
Homothétie	multiplie par $ k $	conserve
Similitude directe	multiplie par $ a $	conserve (orientés)

XI. Méthode type Bac

Pour une transformation : $z' = az + b$

1. Identifier a et b .
2. Calculer $|a|$.
3. Déterminer un argument de a .
4. Interpréter :
 - $|a| = 1 \rightarrow$ isométrique directe.
 - a réel $\rightarrow$ homothétie/translation.
 - $a = e^{i\theta} \rightarrow$ rotation (+ translation).
 - a complexe quelconque $\rightarrow$ similitude directe.

XII. Formules à retenir

$T : z' = z + a$	$S_{\text{axe réel}} : z' = \bar{z}$
$H : z' - a = k(z - a)$	$S_{\text{axe imag.}} : z' = -\bar{z}$
$R : z' - a = e^{i\theta}(z - a)$	Sim. dir. : $z' = az + b$
$S_c : z' = 2a - z$	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Koffi Blaise (KKB)