

Algèbre linéaire

OBJECTIFS :

Ce thème vise à :

Ce thème vise à :

- Mettre en évidence une méthode adaptée (Méthode du pivot de Gauss) pour résoudre un système linéaire donné.
- Mettre en équation un problème donné.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires du premier degré et à la manipulation des matrices.

Commentaires

La résolution des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues est développée avec la méthode du pivot de Gauss qui est à la base de nombreux algorithmes de résolution numérique par ordinateur de ces systèmes d'équations.

La résolution des systèmes de deux équations et trois équations du premier degré est partiellement connue dans les classes antérieures. En classe de terminale, on approfondira cette notion pratique par des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Volume horaire : 10 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Vecteurs. • Base et dimension. • Application linéaire. • Matrices. • Systèmes linéaires.	• Somme de deux vecteurs : - Associativité - Élément neutre, - Opposé - Distributivité à gauche et à droite • Définir et reconnaître une base et sa dimension. • Somme et multiplication de deux matrices. • Résoudre un système linéaire par la méthode du Pivot de Gauss.

Remarques et suggestions

On peut introduire la notion de résolution d'équations non linéaires par la méthode de Newton qui est très utile pour la recherche des points d'intersection entre deux courbes.

Exemple : Recherche de l'intersection de la parabole $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ avec la courbe $y = \ln x$. Ce qui nous conduit à l'équation $1 - \frac{x^2}{2} - \ln x = 0$ qu'aucune méthode mathématique ne peut résoudre.

1) Opération dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 3$ et $n \in \mathbb{N}$)

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des familles de **n nombres réels**.

$\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n)$ où $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, **est un vecteur**.

a- Addition :

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n) \quad \text{et} \quad \vec{b} = (b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n) + (b_1 ; b_2 ; \dots ; b_n) = (a_1 + b_1 ; a_2 + b_2 ; \dots ; a_n + b_n)$$

Exemple :

$$\text{Soient } \vec{a} = (1 ; 2 ; 4 ; -1) \quad \text{et} \quad \vec{b} = (3 ; 0 ; 2 ; 6)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 3 ; 2 + 0 ; 4 + 2 ; -1 + 6) = (4 ; 2 ; 6 ; 5)$$

NB : cette addition :

- Est Associative : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Est Commutative : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Admet un opposé : $-\vec{a} = (-a_1 ; -a_2 ; \dots ; -a_n)$
- Admet un neutre : $\vec{a} = (0 ; 0 ; \dots ; 0)$

b- Multiplication par un réel :

La multiplication par un réel est l'application qui au couple $(\lambda ; \vec{a})$, associe le vecteur $\lambda \vec{a}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n) \Leftrightarrow \lambda \vec{a} = (\lambda a_1 ; \lambda a_2 ; \dots ; \lambda a_n)$$

2) Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ constitués de réels **tous nuls** sauf un seul qui est égal à **1**.

Nous désignerons par $\vec{e}_i$ celui de ces vecteurs où **1** est le **$n^{ième}$** réel non nul, c'est-à-dire la **$n^{ième}$** Position.

D'où on a :

$$\vec{e}_1 = (1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 \dots ; 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 \dots ; 0)$$

$$\vec{e}_3 = (0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 \dots ; 0)$$

.

.

$$\vec{e}_n = (0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 \dots ; 1)$$

Théorème :

Pour tout vecteur $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^n$, il existe une famille $(a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n)$ de nombres réels et une seule telle que : $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 ; a_2 \vec{e}_2 ; \dots ; a_n \vec{e}_n$.

Définition :

On appelle base d'un espace vectorielle E, toute suite de vecteur de E : $(\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \dots ; \vec{e}_p)$ telle que pour tout vecteur x de E, il existe une suite de nombres réels et une seule $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_p)$ vérifiant la relation : $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_p \vec{e}_p$.

3) Combinaison linéaire

a- Définition :

Soit $(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \dots ; \vec{v}_p)$ une famille de p vecteurs de E et $(\lambda_1 ; \lambda_2 ; \dots ; \lambda_p)$, une suite de nombres réels.

On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_i$ avec $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; p\}$ et de coefficient λ_i , tout vecteur $\vec{v}$ de la forme $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$.

Exemple :

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1(1 ; 3 ; 4)$; $\vec{v}_2(2 ; 6 ; 7)$ et $\vec{v}_3(0 ; 4 ; 6)$.

La combinaison linéaire de $(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \vec{v}_3)$ de coefficients respectifs : $3 ; -4 ; -\frac{1}{2}$ est :

$$\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2 - \frac{1}{2} \vec{v}_3.$$

$$= 3(1 ; 3 ; 4) - 4(2 ; 6 ; 7) - \frac{1}{2}(0 ; 4 ; 6).$$

$$= (3 ; 9 ; 12) + (-8 ; -24 ; -28) + (0 ; -2 ; -3).$$

$$= (3 - 8 + 0 ; 9 - 24 - 2 ; 12 - 28 - 3)$$

$$= (-5 ; -17 ; -19) \Rightarrow \vec{v} = (-5 ; -17 ; -19)$$

b- Famille libre :

Soit $(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \dots ; \vec{v}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E.

Cette famille est dite **libre** si la seule combinaison **nulle** a ces coefficients **nuls** c'est-à-dire :

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

On dit alors que les vecteurs $\vec{v}_1 ; \vec{v}_2 ; \dots ; \vec{v}_p$ sont indépendants.

Toute famille de vecteurs qui n'est pas **libre** est dite **liée**.

c- Base d'un espace vectoriel E :

Pour qu'un système de vecteur soit une base, il faut et il suffit qu'il soit à la fois **libre** et **générateur**.

Si une base de E comporte p vecteurs, on dit que E est de dimension p .

Exemple :

- $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.
- $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4.
- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n .

d- Détermination d'une application linéaire par des vecteurs images d'une base :

Soit $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_p)$ une base de l'espace.

Pour tout système de p vecteurs de $(\vec{v}_1; \vec{v}_2; \dots; \vec{v}_p)$ de E , il existe une application linéaire $f: E \rightarrow F$ Et un seule tel que : $f(\vec{e}_1) = \vec{v}_1$; $f(\vec{e}_2) = \vec{v}_2$; $f(\vec{e}_p) = \vec{v}_p$

4) Système linéaires

a- Définition

On appelle système de **n équations à p inconnues**, tout système noté **S** pouvant se ramener

$$\text{Sous la forme (S):} \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Dans lequel $a_{n,p}$ et b_n sont des réels ou des complexes donnés.

NB :

$$\text{L'écriture } M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

Est appelé matrice complète à **n lignes et p colonnes** du système **S** .

b- Résolution et opération élémentaires

- Résolution :

Pour résoudre un système de **n équations à p inconnues**, on utilise la méthode du **PIVOT DE GAUSS** ou encore appelé méthode **triangulaire**.

- Opérations élémentaires

On note de haut en bas $L_1; L_2; \dots; L_n$ les n équations ou lignes du système.

On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites **élémentaires** :

- Echange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul : $L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in \mathbb{R}^*)$
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } i \neq j)$

On admet ainsi le théorème suivant :

Théorème :

Etant donné un système linéaire de p lignes $L_1; L_2; \dots, L_p$, on obtient un système équivalent en effectuant une des opérations élémentaires suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in \mathbb{R}^*)$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } i \neq j)$

La méthode du pivot de Gauss consiste à exécuter, dans un ordre bien déterminé, des opérations élémentaires sur les lignes d'un système, conduisant à un système triangulaire (équivalent) plus facile à résoudre ; cette méthode est en fait un algorithme susceptible d'être exécuté par un ordinateur.

Exemple 1 :

Résons le système suivant : (S)
$$\begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 22y + 19z = 35 \end{cases}$$

On va ramener la résolution de (S) à celle d'un système de $(3 - 1)$ équations à $(3 - 1)$ inconnues. Pour cela on forme un système équivalent à (S), en éliminant une inconnue dans deux équations du système.

- Echangeons les lignes 1 notée L_1 , et 2 notée L_2 .

Codage

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

Système

$$(S_1) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 12y + 17z = 53 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

- Multiplions les deux membres de L_1 par -2 et ajoutons l'équation obtenue à L_2 , membre à membre, afin d'éliminer x dans la deuxième équation. Procédons de même avec L_3 .

Codage

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

Système

$$(S_2) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2y + 3z = 9 \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

- Appliquons à nouveau le procédé au système de 2 équations à 2 inconnues en éliminant y dans L_3 .

Codage

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}$$

Système

$$(S_3) \begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ 7y - 2z = -31. \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \quad (S_4) \left\{ \begin{array}{l} x + 5y + 7z = 22 \\ y + \frac{3}{2}z = \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2}z = -\frac{125}{2} \end{array} \right.$$

Nous obtenons un système triangulaire (S_4) . On vérifie que :

(S_4) est équivalent à (S) ;

(S_4) admet une solution et une seule : $(2 ; -3 ; 5)$

On en déduit que (S) admet une solution et une seule $(2 ; -3 ; 5)$.

Exemple 2 :

Résous dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20. \end{cases}$$

Solution

1^{ère} Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de x_1 dans la première ligne.

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

2^{ème} Etape :

On élimine x_1 dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0 + 0 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 0 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{cases}$$

3^{ème} Etape :

Le pivot de rang 2, coefficient de x_2 dans la deuxième équation, est nul, on échange L_2 et une autre ligne de façon à obtenir un pivot non nul.

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22. \end{cases}$$

Puis on élimine x_2 dans la ligne 4.

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

4^{ème} Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de x_3 dans la troisième ligne, puis on élimine x_3 dans la ligne 4.

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

En résolvant L_4 , puis L_3 , L_2 et L_1 , on obtient $x_4 = -1$, $x_3 = 3$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 0$.

Le système admet donc une solution unique (0 ; 1 ; 3 ; -1)

Remarque :

Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul on dit que la méthode de Gauss "se bloque" ; c'est le cas dans l'exercice 2.

a) Système carré

En particulier, un système est dit carré si $p = n$.

Un système carré est dit **triangulaire à diagonale unité** si l'on a :

$a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ et $a_{i,i} = 1$, avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Par exemple, la forme générale d'un système de 3 équations à 3 inconnues, triangulaire à diagonale unité est :

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est très simple et, de plus on admet :

Propriété

Un système triangulaire à diagonale unité admet, quelque soit le second membre, une et une seule solution.

5) Interprétation vectorielle de la méthode du pivot de Gauss

Soit S , un système linéaire de n équations à p inconnues tel que :

$$(S): \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $B = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots; \vec{e}_p)$.
Considérons les vecteurs :

$\vec{a}_1$ de coordonnées $(a_{1,1}; a_{2,1}; \dots; a_{n,1})$

$\vec{a}_2$ de coordonnées $(a_{1,2}; a_{2,2}; \dots; a_{n,2})$

.

.

.

$\vec{a}_p$ de coordonnées $(a_{1,p}; a_{2,p}; \dots; a_{n,p})$

Et $\vec{b}$ de coordonnées $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ tel que $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$

Résous le système S , revient à chercher les **combinaisons linéaires** des vecteurs

$\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_p$ égales au vecteur $\vec{b}$

Supposons $a_{1,1}$ **non nul** et posons $\vec{f}_1 = \frac{1}{a_{1,1}}\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\vec{e}_2 + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\vec{e}_n$.

On a une nouvelle **base** lorsqu'on remplace un **vecteur de base** par la **combinaison linéaire** des autres.

$B' = (\vec{f}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_n)$.

Posons $\vec{f}_2 = \frac{1}{a_{2,2}}\vec{a}_2 = \vec{e}_2 + \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}}\vec{e}_3 + \dots + \frac{a_{n,2}}{a_{2,2}}\vec{e}_n$.

On a une autre base $B'' = (\vec{f}_1; \vec{f}_2; \vec{e}_3; \dots; \vec{e}_n)$

Si l'un des coefficients $a'_{i,i}$ est nul, on permute **deux vecteurs** de base avant de poursuivre les opérations.

La méthode de **Pivot de Gauss** consiste donc à rechercher en effectuant des opérations

élémentaires sur la base **initiale** une base dans la quelle, pour tout $i \in \{1; 2; \dots; p\}$, le vecteur $\vec{a}_i = (0; 0; \dots; a_{i,i}; \dots)$ ait des coordonnées **toutes nulles** sauf la $n^{ième}$ qui est égale à **1**.

Exercices

1 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 12y + 17Z = 53 \\ x + 5y + 7Z = 22 \\ 2x + 22y + 19Z = 35 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y + 5Z = 8 \\ x + 4y + 5Z = 2 \\ x + y - 10Z = 2 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2Z = 3 \\ 2x + 5y + 2Z = 9 \end{cases}$$

2 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résous dans $\mathbb{R}^4$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 2Z + t = 5 \\ x + 2y + Z + 2t = -5 \\ 2x + y + Z + 2t = 0 \\ x + y + 2Z + t = 2 \end{cases}$$

3 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résous dans $\mathbb{R}^5$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - 2Z + t - u = 0 \\ 2x - y + Z - t + u = 3 \\ 3x + 2y - Z + 3t - u = 1 \end{cases}$$

4 Ecris dans $\mathbb{R}^4$ le système admettant pour solution $(1; 1; 1; 1)$ et de matrice complète

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 4 & 9 & 16 & c \\ 1 & 8 & 27 & 64 & d \end{array} \right)$$

Détermine une application polynôme p de $\mathbb{R}$ de degré 3 telle que :
 $p(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) - p(x-1) = x^2$

5 Détermine les coefficients a, b, c, d de la fonction.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sachant que $f(1) = -4$; $f(-1) = 4$; $f(2) = 1$ et que f admet un minimum pour 1.

Solutions

1 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } (S) \begin{cases} 2x + 12y + 17Z = 53 & L_1 \\ x + 5y + 7Z = 22 & L_2 \\ 2x + 22y + 19Z = 35 & L_3 \end{cases}$$

La matrice complète du système est :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 12 & 17 & 53 \\ 1 & 5 & 7 & 22 \\ 2 & 22 & 19 & 35 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad (S_1) \begin{cases} x + 5y + 7Z = 22 \\ 2x + 12y + 17Z = 53 \\ 2x + 22y + 19Z = 35 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 3L_1 \end{aligned} \quad (S_2) \begin{cases} x + 5y + 7Z = 22 \\ 2y + 3Z = 9 \\ 7y - 2Z = -31 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad (S_3) \begin{cases} x + 5y + 7Z = 22 \\ y + \frac{3}{2}Z = \frac{9}{2} \\ 7y - 2Z = -31 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \quad (S_4) \begin{cases} x + 5y + 7Z = 22 \\ y + \frac{3}{2}Z = \frac{9}{2} \\ -\frac{25}{2}Z = -\frac{125}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y + 7Z = 22 \\ y + \frac{3}{2}Z = \frac{9}{2} \\ Z = 5 \end{cases}$$

En remplaçant $Z = 5$ par sa valeur dans $y + \frac{3}{2}Z = \frac{9}{2}$, on obtient $y = -3$

De même en remplaçant $Z = 5$ et $y = -3$ par leur valeur dans $x + 5y + 7Z = 22$, on obtient $x = 2$

On en déduit que (S) admet une solution et une seule $S = \{(2; -3; 5)\}$.

$$\text{b) } (S) \begin{cases} 2x + 3y + 5Z = 8 & L_1 \\ x + 4y + 5Z = 2 & L_2 \\ x + y - 10Z = 2 & L_3 \end{cases}$$

La matrice complète du système est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 8 & | \\ 1 & 4 & 5 & | & 2 & | \\ 1 & 1 & -10 & | & 2 & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{aligned} \quad (S_1) \begin{cases} 2x + 3y + 5Z = 8 \\ \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}Z = -2 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{25}{2}Z = -2 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{5}L_2 \quad (S_2) \begin{cases} 2x + 3y + 5Z = 8 \\ \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}Z = -2 \\ -12Z = -\frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5Z = 8 \\ \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}Z = -2 \\ Z = \frac{1}{5} \end{cases}$$

En remplaçant $Z = \frac{1}{5}$ par sa valeur dans $\frac{5}{2}y + \frac{5}{2}Z = -2$, on obtient $y = -1$

De même en remplaçant $Z = \frac{1}{5}$ et $y = -1$ par leur valeur dans $2x + 3y + 5Z = 8$, on obtient $x = 5$

On en déduit que (S) admet une solution et une seule $S = \left\{\left(5; -1; \frac{1}{5}\right)\right\}$.

$$c) (S) \begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ y + 2Z = 3 & L_2 \\ 2x + 5y + 2Z = 9 & L_3 \end{cases}$$

Posons $t = Z$ dans L_2 avec $t \in \mathbb{R}$, on a :

$y = -2t + 3$ puis en remplaçant $y = -2t + 3$ par sa valeur dans L_1 , on a : $x = 4t - 3$.

Le triplet $(4t - 3 ; -2t + 3 ; t)$ est aussi solution du système tel que :

$$(4t - 3 ; -2t + 3 ; t) = (4t ; -2t ; t) + (-3 ; 3 ; 0) \Leftrightarrow$$

$$(4t - 3 ; -2t + 3 ; t) = t(4 ; -2 ; 1) + (-3 ; 3 ; 0)$$

Ainsi l'ensemble solution est la droite affine passant par le point de coordonnée $(-3 ; 3 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(4 ; -2 ; 1)$

2 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résolvons dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + y + 2Z + t = 5 \\ x + 2y + Z + 2t = -5 \\ 2x + y + Z + 2t = 0 \\ x + y + 2Z + t = 2 \end{cases}$$

La matrice complète est $M = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$

$$L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$L_4 \leftarrow L_1 - 2L_4$$

$$\Rightarrow M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{matrix}$$

$$L'_4 \leftarrow L'_2 - L'_4$$

$$\Rightarrow M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 14 \end{array} \right) \begin{matrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \\ L'_4 \end{matrix}$$

$$L''_4 \leftarrow \frac{1}{2}L'_4$$

$$\Rightarrow M'' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

Les deux dernières lignes prouvent que (S) n'admet pas de solution $S = \emptyset$.

3 En utilisant la méthode du Pivot de Gauss, Résolvons dans $\mathbb{R}^5$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - 2z + t - u = 0 \\ 2x - y + z - t + u = 3 \\ 3x + 2y - z + 3t - u = 1 \end{cases}$$

La matrice complète est $M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right)$

$$L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2$$

$$L_3 \leftarrow -3L_1 + L_3$$

La matrice complète est $M' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$

$$L_2 \leftrightarrow L'_3$$

La matrice complète est $M'' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right)$

$$L''_2 \leftarrow -L'_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$L''_3 \leftarrow 3L''_2 + L''_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$L''_3 \leftarrow -\frac{1}{10}L''_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & 0 \end{array} \right)$$

Résolvons ainsi le système

$$\begin{cases} x + y - 2z + t - u = 0 \\ y - 5z + 0t - 2u = -1 \\ z + \frac{3}{10}t + \frac{3}{10}u = 0 \end{cases}$$

Posons $t = \alpha$ et $u = \beta$ avec α et β des nombres réels.

Ainsi le système dévient :

$$\begin{cases} x + y - 2Z + \alpha - \beta = 0 \\ y - 5Z + 0\alpha - 2\beta = -1 \\ Z + \frac{3}{10}\alpha + \frac{3}{10}\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z = -\frac{3}{10}\alpha - \frac{3}{10}\beta$$

$$y - 5\left(-\frac{3}{10}\alpha - \frac{3}{10}\beta\right) + 0\alpha - 2\beta = -1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - 1$$

$$x + y - 2Z + \alpha - \beta = 0$$

$$\Rightarrow x = -y + 2Z - \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow x = -\left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - 1\right) + 2\left(-\frac{3}{10}\alpha - \frac{3}{10}\beta\right) - \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{10}\alpha - \frac{1}{10}\beta + 1$$

Le quintuplet $(x ; y ; Z ; t ; u)$ est solution de S .

$$(x ; y ; Z ; t ; u) = \left(1 - \frac{1}{10}\alpha - \frac{1}{10}\beta ; -1 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta ; -\frac{3}{10}\alpha - \frac{3}{10}\beta ; \alpha ; \beta\right)$$

$$= (1 ; -1 ; 0 ; 0) + \left(-\frac{1}{10} ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{10} ; 1 ; 0\right)\alpha + \left(-\frac{1}{10} ; \frac{1}{2} ; -\frac{3}{10} ; 0 ; 1\right)\beta$$

$$\text{Posons } \vec{u} = \left(-\frac{1}{10} ; -\frac{3}{2} ; -\frac{3}{10} ; 1 ; 0\right) \text{ et } \vec{v} = \left(-\frac{1}{10} ; \frac{1}{2} ; -\frac{3}{10} ; 0 ; 1\right)$$

Calculons $\det(\vec{u} ; \vec{v})$

$$\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{20} - \frac{3}{10} = -\frac{1}{5} \neq 0$$

D'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires par conséquent ils forment une base du plan.

L'ensemble des solutions du système proposé est le plan contenant le point $A(1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 0)$ et de vecteurs de base $(\vec{u} ; \vec{v})$.

4

1) Ecrivons dans $\mathbb{R}^4$ le système admettant pour solution $(1 ; 1 ; 1 ; 1)$ et de matrice complète

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{a} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{b} \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \mathbf{c} \\ 1 & 8 & 27 & 64 & \mathbf{d} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 4 & b \\ 1 & 4 & 9 & 16 & c \\ 1 & 8 & 27 & 64 & d \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ Z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + Z + t = a \\ x + 2y + 3Z + 4t = b \\ x + 4y + 9Z + 16t = c \\ x + 8y + 27Z + 64t = d \end{cases}$$

Le quadruplet $(1 ; 1 ; 1 ; 1)$ est solution de S.

vient donc de dire que : $a = 4$; $b = 10$; $c = 30$ et $d = 100$

$$\text{Donc S s'écrit : } \begin{cases} x + y + Z + t = 4 \\ x + 2y + 3Z + 4t = 10 \\ x + 4y + 9Z + 16t = 30 \\ x + 8y + 27Z + 64t = 100 \end{cases}$$

2) Déterminons une application polynôme p de $\mathbb{R}$ de degré 3 telle que :

$p(0) = 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) - p(x-1) = x^2$

Soit $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ce polynôme de degré 3 où a ; b ; c et d sont tous des nombres réels donnés.

$$p(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \quad (1)$$

$$p(1) - p(0) = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1 \quad (2)$$

$$p(2) - p(1) = 4 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c = 5 \quad (3)$$

$$p(3) - p(2) = 9 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c = 14 \quad (4)$$

Des relations (1) ; (2) ; (3) ; (4) , on le système S ' suivant :

$$(S): \begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow (S'): \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \\ d = 0 \end{cases}$$

D'où le polynôme de degré 3 cherché est $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

5 Déterminons les coefficients a, b, c, d de la fonction.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sachant que $f(1) = -4$; $f(-1) = 4$; $f(2) = 1$ et que f admet un minimum pour 1.

$$f(1) = -4 \Leftrightarrow a + b + c + d = -4 \quad (1)$$

$$f(-1) = -4 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 4 \quad (2)$$

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 1 \quad (3)$$

f Admet un minimum pour 1 $\Leftrightarrow f'(1) = 0$ avec $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + c = 0 \quad (4)$$

Des relations (1) ; (2) ; (3) ; (4) , on le système S suivant :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -4 \\ -a + b - c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Ainsi la résolution de ce système donne pour solution $S = \{1 ; 1 ; -5 ; -1\}$