

SIMILITUDE PLANE INDIRECTE

Par M. Almame Traoré prof de maths au LBF -LPMT

1) Définition :

On appelle similitude plane indirecte, la composée d'une homothétie et d'une réflexion

On a : $S = h(\Omega, k) \circ S_{(\Delta)} \Rightarrow S = \text{Sim}(\Omega, k, \Delta)$ où $\Omega \in (\Delta)$

Ainsi S est la composée commutative de $h(\Omega, k)$ et $S_{(\Delta)}$

Propriété : Etant donné une droite Δ , toute similitude indirecte f est la composée d'une réflexion σ d'axe Δ et d'une similitude directe S

D'où forme réduite : $f = S \circ \sigma = S \circ S_{\Delta}$

Propriété : Une transformation est une similitude indirecte si et seulement si, son écriture complexe est sous la forme : $Z' = a\bar{Z} + b$ ($a \neq 0$)

2) Eléments caractéristiques

Les éléments caractéristiques d'une similitude plane indirecte sont : le centre Ω , le rapport k et l'axe (Δ)

L'axe (Δ) de S

Soit Ω le centre de la similitude plane indirecte S

Si $S(A) = A'$ alors l'axe (Δ) de S est la bissectrice de l'angle $(\Omega A, \Omega A')$

3- Similitude plane indirecte définie comme composée d'une homothétie et d'une réflexion :

Soit $f = h(A, k) \circ S_{(\Delta)}$

a) L'axe de la réflexion contient le centre de l'homothétie

Soit $f = h(A, k) \circ S_{(\Delta)}$

$A \in (\Delta)$ alors le centre Ω de la similitude est le point A

- Si $k > 0$ alors $f = \text{Sim}(\Omega, k, \Delta)$
- Si $k < 0$ alors $f = h(\Omega, k) \circ S_{(\Delta)} \Rightarrow f = h(\Omega, |k|) \circ R(\Omega, \pi) \circ S_{(\Delta)}$

or $\Omega \in (\Delta) \Rightarrow R(\Omega, \pi) = S_{(D)} \circ S(\Delta)$ avec $\begin{cases} (\Delta, D) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \{\Omega\} = (\Delta) \cap (D) \end{cases}$

Où (D) est la perpendiculaire à (Δ) en Ω

ACTIVITE 1: Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O et de sens direct.

1- Faire la figure.

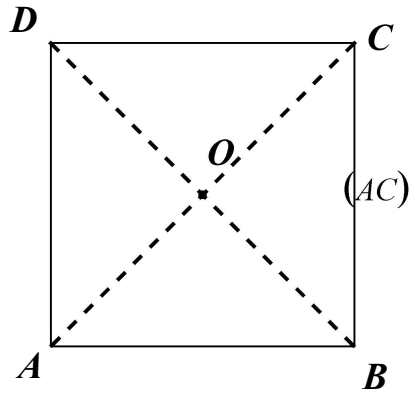
2- Caractériser la similitude plane indirecte f dans les cas suivants :

a) $f = h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ S_{(AC)}$ et b) $f = h(O, -2) \circ S_{(AC)}$

Correction

1. Figure

On place le carré ABCD dans le sens direct (antihoraire) :



2. Caractérisation des similitudes

Rappel : une similitude indirecte conserve les rapports de distances mais inverse l'orientation des angles. La composée d'une symétrie axiale (indirecte) et d'une homothétie (directe) est bien une similitude indirecte.

a) $f = h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ S_{(AC)}$

- $S_{(AC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AC) . Elle fixe A et C , et échange B et D .

- $h\left(A, \frac{1}{2}\right)$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$

On détermine les images de quelques points :

$$f(A) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(S_{(AC)}(A)) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(A) = A ,$$

$$f(C) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(S_{(AC)}(C)) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(C) = \text{milieu de } [AC] = O$$

$$f(B) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(S_{(AC)}(B)) = h\left(A, \frac{1}{2}\right)(D) = \text{milieu de } [AD] .$$

Ainsi, fixe A. De plus, le rapport de la similitude est $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

En identifiant l'expression complexe (en plaçant A à l'origine) , on obtient :

$$f(z) = \frac{i}{2} \bar{z}$$

ce qui correspond à une similitude indirecte de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : f est la similitude indirecte de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

b) $f = h(O, -2) \circ S_{(AC)}$

- $S_{(AC)}$ agit comme précédemment.

- $h(O, -2)$ est l'homothétie de centre O et de rapport -2 , équivalente à un agrandissement de rapport 2 suivi d'une symétrie centrale de centre O.

Cherchons un point fixe. On résout $f(M) = M$. En coordonnées complexes (avec O à l'origine) , on a:

$$f(z) = -2i\bar{z} + b$$

et on montre que $f(O) = O$. Ainsi, O est invariant.

Le rapport est $|-2| = 2$

Conclusion : f est la similitude indirecte de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Synthèse

Cas	Centre	Rapport	Angle
(a) $h\left(A, \frac{1}{2}\right) \circ S_{(AC)}$	A	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(b) $h(O, -2) \circ S_{(AC)}$	O	2	$-\frac{\pi}{2}$

b) L'axe de la réflexion ne contient pas le centre de l'homothétie

- $f = h(A, k) \circ S_{(\Delta)}$ où A n'appartient pas à (Δ)

Soit I le projeté orthogonal de A sur (Δ) , alors le centre Ω de f est tel que:

$$\overrightarrow{A\Omega} = \left(\frac{2k}{1+k}\right) \overrightarrow{AI} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{I\Omega} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right) \overrightarrow{IA}$$

Donc $f = \text{Sim}(\Omega, k, D)$ où D est la parallèle à (Δ) passant par Ω

ACTIVITÉ 2 : ABC est un triangle équilatéral de sens direct. I, J, K les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC], [AB]$.

Soit f l'application définie par : $f = h(A, 2) \circ S_{(BC)}$

Détermine et construis le centre Ω de f .

Correction

Nature de f

f est la composée d'une symétrie axiale (indirecte) et d'une homothétie (directe) alors f est une similitude plane indirecte de rapport 2.

Recherche du centre Ω

On cherche Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.

Méthode analytique (complexes)

Plaçons

$$Z_B = -1, Z_C = 1, Z_A = i\sqrt{3}$$

$$S_{(BC)}(Z) = \overline{Z}, \quad h(A, 2)(Z) = 2Z - Z_A$$

Donc :

$$f(Z) = 2\overline{Z} - Z_A$$

Réolvons $f(\Omega) = \Omega$:

$$Z_\Omega = 2\overline{Z_\Omega} - Z_A$$

Posons $Z_\Omega = x + iy$:

$$x + iy = 2(x - iy) - i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x \\ y = -2y - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

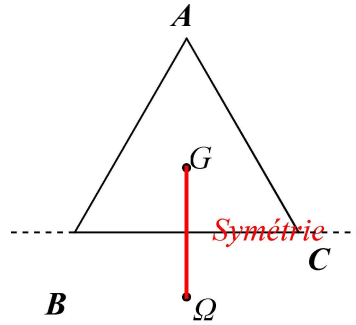
$$\text{Donc :} \quad Z_\Omega = -i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Interprétation géométrique

Le point Ω est le symétrique du centre de gravité G du triangle ABC par rapport à la droite (BC) .

$$\text{En effet : } Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{i\sqrt{3}}{3} \quad Z_\Omega = \overline{Z_G} = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$$

Figure



Conclusion

Le centre Ω de la similitude indirecte $f = h(A, 2) \circ S_{(BC)}$ est :

$$\Omega = \text{symétrique du centre de gravité } G \text{ par rapport à } (BC)$$

- $f = S_{(\Delta)} \circ h(A, k)$ où A n'appartient pas à (Δ)

Soit I le projeté orthogonal de A sur (Δ) , alors le centre Ω de f est tel que :

$$\overrightarrow{A\Omega} = \left(\frac{2}{1+k} \right) \overrightarrow{AI} \quad \text{Donc} \quad f = \text{Sim}(\Omega, k, D) \quad \text{où } D \text{ est la parallèle à } (\Delta) \text{ passant par } \Omega$$

ACTIVITE 3 : ABC est un triangle équilatéral de sens direct. I, J, K les milieux respectifs des côtés $[BC], [AC], [AB]$.

Soit f l'application définie par : $f = S_{(AC)} \circ h(B, 2)$

Détermine et construis le centre de f .

Correction

Nature de f

f est la composée d'une homothétie (directe) et d'une symétrie axiale (indirecte) alors f est une **similitude plane indirecte** de rapport 2.

Recherche du centre Ω

On cherche Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$, c'est-à-dire :

$$S_{(AC)}(h(B, 2)(\Omega)) = \Omega \Rightarrow h(B, 2)(\Omega) = S_{(AC)}(\Omega)$$

Cela signifie que l'image de Ω par l'homothétie est le symétrique de Ω par rapport à (AC) .

Méthode analytique (complexes)

Plaçons le triangle dans le plan complexe

Choisissons :

$$Z_B = 0, \quad Z_M = 1, \quad Z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{pour que ABC soit équilatéral direct.}$$

Expression de la symétrie orthogonale par rapport à (AC)

Soit Z un point du plan . la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) peut s'écrire :

$$S_{(AC)}(Z) = Z_A + e^{2i\theta} \cdot \overline{Z - Z_A}$$

où θ est l'angle que fait la droite (AC) avec l'axe réel.

Calculons θ :

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = 1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a :

$$|Z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 1$$

$$\text{et } \arg(Z_{AC}) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc : } e^{2i\theta} = e^{-\frac{i2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{(AC)}(z) = Z_A + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \overline{Z - Z_A}$$

Recherche du point fixe Ω

On cherche Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$, donc :

$$Z_\Omega = Z_A + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \overline{2Z_\Omega - Z_A}$$

Posons $Z_\Omega = x + iy$ et $Z_A = a + ib = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors :

$$2Z_\Omega - Z_A = 2x + 2iy - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2x - \frac{1}{2}\right) + i\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Son conjugué : } \overline{2Z_\Omega - Z_A} = \left(2x - \frac{1}{2}\right) - i\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Multiplions par } e^{-\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{-\frac{i2\pi}{3}} \overline{2Z_\Omega - Z_A} = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\left(2x - \frac{1}{2}\right) - i\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Calculons ce produit :

$$= -\frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-i\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2x - \frac{1}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-i\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Regroupons les parties réelles et imaginaires :

Partie réelle :

$$= -\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -x + \frac{1}{4} - \sqrt{3}y + \frac{3}{4} = -x - \sqrt{3}y + 1$$

Partie imaginaire :

$$\frac{1}{2}\left(2y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2x - \frac{1}{2}\right) = y - \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = y - \sqrt{3}x$$

$$\text{Donc : } f(\Omega) = \left(\frac{1}{2} - x - \sqrt{3}y + 1\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + y - \sqrt{3}x\right)$$

On égalise à $Z_\Omega = x + iy$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - x - \sqrt{3}y + 1 = \frac{3}{2} - x - \sqrt{3}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + y - \sqrt{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - x - \sqrt{3}y + 1 = \frac{3}{2} - x - \sqrt{3}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + y - \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} \\ \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Remplaçons dans la première équation :

$$2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \sqrt{3}y = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3}y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Donc :
$$Z_{\Omega} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Interprétation géométrique

Ce point est le centre de gravité G du triangle ABC, car

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 1}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Conclusion

Le centre Ω de la similitude indirecte $f = S_{(AC)} \circ h(B, 2)$ est :

$$\Omega = \text{centre de gravité G du triangle ABC}$$

4- Similitude plane indirecte dénie par deux couples de points homologues

Soit f une similitude plane directe dénie par : $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$

a) Le rapport k de f : $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \quad k = \frac{A'B'}{AB}$

b) L'axe (Δ) de f : $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \quad \Omega = \text{bar}\{(B, 1); (A, k)\}$

c) L'axe (Δ) de f :

$$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \quad (\Delta) \text{ est la Bissectrice intérieure des angles : } (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}) = \theta [2\pi]$$