

I- Généralité:

1) Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel. Une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est dite affine lorsqu'elle est de la forme $\vec{u} \rightarrow A + \varphi(\vec{u})$ où φ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ (**endomorphisme** de $\mathcal{E}$) dans l'espace après le choix d'une origine O .

Remarque : φ est appelé l'**endomorphisme** associé à l'application affine f .

Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques en changeant les constantes.

2) Propriétés

P₁ : Les applications affines conservent le barycentre de n points pondérés : c'est-à-dire si f est une application affine, l'image du barycentre d'un système de n points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Ainsi nous retenons que :

- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

P₂ : La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Exemples d'applications affines :

L'homothétie de centre Ω et de rapport k ; La translation de vecteur $\vec{u}$; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre Ω et d'angle θ sont des exemples d'applications affines.

3) Application vectorielle associée à une application affine

a) Définition : soit f une application affine du plan P dans P et $A ; B ; C$ et D quatre points du plan d'images respectives $A' ; B' ; C'$ et D' .

On appelle application affine vectorielle associée à f , toute application vectorielle ν dans

ν notée φ tel que : $\forall A \in p \text{ et } \forall B \in p \text{ on a : } \overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$

D'où $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$

b) Propriétés :

Soit f une application affine du plan p dans p et φ l'application linéaire associée à f .

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectorielle ν et pour tout réel α donné, on a les propriétés suivantes :

$$P_1: \varphi(\alpha \vec{u}) = \alpha \varphi(\vec{u}).$$

$$P_2: \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}).$$

$$P_3: \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$P_4: \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\vec{u}_i)$$

4) Points invariants par une application affine f

a) Définition

Soit f une application affine du plan P dans P . L'ensemble des points invariants par f est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton**, soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

b) Propriétés :

P_1 : L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

P_2 : Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles du plan et $(A'B')$ et $(C'D')$ leur images respectives par une application affine f du plan, alors les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles.

P_3 : Soit f une application affine du plan P dans P .

- Si f est bijective alors $f(P) = P$
- Si f n'est pas bijective alors $f(P)$ est un singleton ou une droite.

5) Expression analytique d'une application affine f

a) Définition :

Le plan est muni d'une repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f une application affine du plan et soit φ sont application linéaire associée. Soit $(a; a')$; $(b; b')$ et $(c; c')$ les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{i})$; $\varphi(\vec{j})$ et de O' avec $O' = f(O)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \overrightarrow{O'M'} &= \varphi(\overrightarrow{OM}) \\ &= \varphi(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= x\varphi\vec{i} + y\varphi\vec{j} \\ &= x(a\vec{i} + a'\vec{j}) + y(b\vec{i} + b'\vec{j}) \\ &= xa\vec{i} + xa'\vec{j} + yb\vec{i} + yb'\vec{j} \end{aligned}$$

$$= (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j}$$

$$\Rightarrow (x' - c')\vec{i} + (y' - c')\vec{j} = (ax + by)\vec{i} + (a'x + b'y)\vec{j}$$

Par identification on a :

$$\Rightarrow \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

b) propriété:

Une application f est dite affine lorsque son expression analytique est sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \text{ Avec } a; b; c; a'; b'; c' \text{ tous des nombres réels.}$$

II- Expressions analytiques des transformations

1) Expression analytique d'une translation de vecteur translateur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soient $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan d'affixe $a + ib$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow Z' - Z = a + ib$

$$\Leftrightarrow (x' + iy') - (x + iy) = a + ib \Leftrightarrow (x' - x) + i(y' - y) = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

D'où l'expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2) Expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Soient $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de l'homothétie.

L'homothétie de rapport k et de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donnée par la relation : $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$

$$\Leftrightarrow Z' - \omega = k(Z - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = k[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$$

$$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$$

$$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = k(x - x_0) + ki(y - y_0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx - kx_0 + x_0 \\ y' = ky - ky_0 + y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0 - kx_0 \\ y' = ky + y_0 - ky_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}.$$

D'où l'expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ est :

$$\begin{cases} x' = kx + x_0(1 - k) \\ y' = ky + y_0(1 - k) \end{cases}.$$

3) Expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$

Soient $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $M'\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la rotation

La rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ est donnée par la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = e^{i\Theta} \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow$

$$Z' - \omega = e^{i\Theta}(Z - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (x_0 + iy_0) = e^{i\Theta}[(x + iy) - (x_0 + iy_0)] \Leftrightarrow$$

$$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = e^{i\Theta}[(x - x_0) + i(y - y_0)]. \text{ Or } e^{i\Theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow$$

$$(x' - x_0) + i(y' - y_0) = (\cos\theta + i\sin\theta)[(x - x_0) + i(y - y_0)] \Leftrightarrow$$

$$(x' - x_0) + i(y' - y_0) =$$

$$(xcos\theta - x_0cos\theta - ysin\theta + y_0sin\theta) + i(xsin\theta - x_0sin\theta - ycos\theta - y_0cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0 \\ y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0 \end{cases}$$

D'où l'expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ est:

$$\begin{cases} x' = xcos\theta - ysin\theta - x_0cos\theta + y_0sin\theta + x_0 \\ y' = xsin\theta + ycos\theta - x_0sin\theta - y_0cos\theta + y_0 \end{cases}$$

4) Expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Soient $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan d'affixe Z et $M'' \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ d'affixe Z'' sont symétriques par rapport à l'origine $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'affixe $Z_0 = 0$. Soient $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ un point quelconque du plan d'affixe Z' et $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$ le centre de la symétrie.

La symétrie centrale de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donnée par la relation $\overline{M''M'} = 2\overline{O\Omega} \Leftrightarrow$

$$Z' - Z'' = 2(Z_0 - \omega) \Leftrightarrow (x' + iy') - (-x - iy) = 2(x_0 + iy_0 - 0) \Leftrightarrow$$

$$x' + iy' + x + iy = 2(x_0 + iy_0) \Leftrightarrow (x' + x) + i(y' + y) = 2x_0 + 2iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}.$$

D'où l'expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}.$$

5) Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : ax + by + c = 0$

De même l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta - 2ab \\ y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

6) Expression analytique d'une similitude directe

Soient $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux points quelconques du plan d'affixes respectives Z et Z' .

Soit $z' = az + b$ avec a et $b \in \mathbb{C}^*$, l'expression complexe d'une similitude directe.

$$\text{On a : } z' = az + b \Leftrightarrow x' + iy' = a(x + iy) + b \Leftrightarrow x' + iy' = ax + ai y + b \Leftrightarrow$$

$$x' + iy' = (ax + b) + ai y \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}.$$

D'où l'expression analytique d'une similitude directe est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}.$

7) Expression analytique d'une similitude indirecte

Si $M \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$$z' = a\bar{z} + b \text{ avec } a \text{ et } b \in \mathbb{C}^*,$$

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

8) Expression analytique d'une réflexion d'axe Δ

- Réflexion d'axe Δ par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
- Réflexion d'axe Δ par rapport à la droite d'équation $y = 0$, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Réflexion d'axe Δ par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

III- Les isométries planes

1) Définition :

On appelle isométrie plane, toute application du plan dans lui-même qui **conserve la distance**.

Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N' , on a : $MN = M'N'$.

2) Classification des isométries

a- Isométrie positive ou déplacement

- **Définition** : une isométrie est dite positive ou déplacement lorsqu'elle conserve les angles orientés.

Exemple : la rotation et la translation

- **Expression analytique :**

L'expression analytique d'une isométrie positive est :

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

- **Propriétés :**

P₁ : Tout déplacement (**isométrie positive**) est une similitude directe de rapport $k = 1$

P₂ : Les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (**Rotation ; translation ; symétrie centrale**)

- **Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par f	Nature de la transformation f
Plan P	f est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	f est la translation du vecteur non nul
Singleton $\{A\}$	f est la rotation de centre A

b- Isométrie négative ou antidéplacement

- **Définition :** une isométrie est dite négative ou antidéplacement lorsqu'elle transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemple : la symétrie orthogonale et la symétrie glissée

- **Expression analytique :**

L'expression analytique d'une isométrie négative est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \text{ avec } -a^2 - b^2 = -1$$

- **Propriétés**

P₁ : Tout antidéplacement (**isométrie négative**) est une similitude indirecte de rapport $k = 1$

P₂ : Les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (**symétrie orthogonale ; réflexion ; symétrie glissée**)

- **Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants**

Ensemble des points invariants par f	Nature de la transformation f
Droite (D)	f est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	f est la symétrie glissée

IV- Caractérisation des transformations

1) Cas de la transformation $f : Z' = aZ + b$

- si $a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b .
- si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $w = \frac{1}{2}b$.
- si $a \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ alors f est une rotation d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.
- si $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ alors f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $w = \frac{b}{1-a}$.

2) Cas de la transformation $f : Z' = a\bar{Z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $Z' = Z$.
- Si $|a| \neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$, d'axe $(\Delta) : y = px + q$ et de centre $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ d'affixe $w = \frac{b+a\bar{b}}{1-a\bar{a}}$.

V- Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **une translation** $\vec{u} + \vec{v}$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega ; k_1)$ et $h_2(\Omega ; k_2)$ est **une homothétie** $h(\Omega ; k_1 \cdot k_2)$. Avec $k_1 \neq k_2$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega_1 ; k_1)$ et $h_2(\Omega_2 ; k_2)$ est :
 - Une homothétie $h(\Omega ; k_1 \cdot k_2)$ si $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.
 - Une translation de vecteur $\vec{u}$ si $k_1 \cdot k_2 = 1$.
- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une homothétie $h(\Omega ; k)$ est :
 - Une translation si $k = 1$.
 - Une homothétie si $k \neq 1$ et $\vec{u} = \vec{0}$.
- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.
- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.

- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.
- La composée de deux rotations r et r' d'angles respectifs α et α' est :
 - Une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq 0$
 - Une translation $\alpha + \alpha' = 0$
- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

VI- Notion sur les matrices

1- Définition :

Une **matrice** A est un tableau rectangulaire d'éléments de k nombres réels.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;j} & \dots & a_{1;p} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & \dots & a_{2;j} & \dots & a_{2;p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i;1} & a_{i;2} & \dots & a_{i;j} & \dots & a_{i;p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;j} & \dots & a_{n;p} \end{pmatrix} \quad \text{Ou } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ ou } (a_{i,j})$$

NB :

- La matrice A est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A .
- Le coefficient situé à la i –**ème ligne** et à la j –**ème colonne** est noté $a_{i;j}$.
- Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 avec $a_{1;1} = 1$ et $a_{2;3} = 7$

2- Matrices particulières :

- a- **Matrice carrée :** Une matrice est dite carrée si le nombre de lignes n est égal aux nombres de colonnes p ($n = p$). On la note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}$; $a_{2,2}$; ... ; $a_{n,n}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

- b- **Matrice ligne :** Une matrice est dite ligne si elle n'a qu'une seule ligne ($n = 1$).

On la note : $A = (a_{1,1} ; a_{1,2} \dots a_{1,p})$

- c- **Matrice colonne :** Une matrice est dite colonne si elle n'a qu'une seule colonne

($p = 1$). On la note : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

- d- **Matrice nulle :** Une matrice est dite nulle si elle est de taille $n \times p$ et que tous ces coefficients sont des zéros. On la note : $0_{n \times p}$ ou plus simplement 0.

3- Opération sur les matrices

a- Somme de deux matrices :

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $S = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par : $S_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Autrement dit faire la somme $A + B$, revient à faire la somme des coefficients de même emplacement.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b- Produit d'une matrice par un scalaire :

Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, est la matrice $(\alpha a_{i,j})$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α .

Ce produit est noté $\alpha \bullet A$ ou simplement αA .

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 2$ alors $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

NB : la matrice $(-1)A$ est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par : $A + (-B)$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$: la somme est commutative,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: la somme est associative,
3. $A + 0 = A$: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

c- Produit de deux matrices :

Le produit de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B .

A cet effet si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ est une matrice $p \times q$.

Alors le produit $P = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients P_{ij} sont définis par :

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

Ainsi de manière plus pratique, on peut disposer les calculs de la manière suivante :

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ - & - & - & c_{ij} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow B \\ \leftarrow AB \end{matrix}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut Calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut Calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième. . .

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille

2×2 . Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient

$C_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \quad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est donnée par :

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs u et v .

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à Calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i - ème ligne de A et la j - ème colonne de B .

Pièges à éviter :

- **Premier piège :** Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.

En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA , ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

- **Deuxième piège :** $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Troisième piège :** $AB = AC$ n'implique pas $B = C$ on peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

1. $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

4- Matrice identité

- a- **Définition** : On appelle matrice identité, toute matrice dont ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

Elle se note I_n ou simplement I . Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

b- **Propriété :**

Si A est une matrice $n \times p$, alors : on a : $I_n \times A = A$

5- **Déterminant d'une matrice (Règle de Sarrus)**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle **déterminant** de A , le réel noté

$$\det(M_A) \text{ tel que : } \det(M_A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

6- **Bijection – Projection – Points invariants –Involution**a- **Déterminant :**

Soit f l'application affine tel qu'on ait : $f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$

Soit $\text{mat}(f)$ la matrice A de f tel que $\text{mat}(f) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit $\det(A)$ le déterminant de la matrice A tel qu'on ait : $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

b- **Bijection**

Une application f est dite bijective ou réalise une bijection si et seulement si :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$$

N.B : On utilise la même méthode pour Montre que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \neq 0$

c- **Projection**

Une application f est une projection si et seulement si, $f \circ f = f$, c'est-à-dire s'il existe trois points : $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $M'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M'' = f(M) = f(M') \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases}$$

d- **Points invariants**

Une application f admet un point invariant si et seulement si, $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ c'est-à-dire s'il

existe deux points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in P$ tel que : $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$

e- **Involution**

Une application f est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de f est égale à la matrice identité c'est-à-dire : $Mat(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercices

1 Soit $A(3; 0)$ et $B(1; -1)$ deux points du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montre qu'il existe une application affine telle que : $\begin{cases} f(O) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$

2) Calcule les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M .

3) Calcule $f \circ f$ et déduis la nature et les éléments caractéristiques de l'application f .

2 Détermine la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$

3) f est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + i$

3 Dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points :

$$A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) ; B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) ; C\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) ; A'\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 10 \end{smallmatrix}\right) ; B'\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) ; C'\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A' ; f(B) = B' ; f(C) = C'$.

1) Montre que f est bijective

2) Détermine l'expression analytique de f .

4 Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le