

I - Divisibilité dans $\mathbb{Z}$:

Activité 1 p 165 :

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $3^{n+5} - 3^n$ est un multiple de 11.

1^{re} Méthode (Par récurrence)

la propriété est : $3^{n+5} - 3^n = 11k ; k \in \mathbb{Z}$

✦ Pour $n=0$ on a : $3^5 - 3^0 = 243 - 1$

$$= 243 - 1 = 242 = 11 \times 22$$

D'où la propriété est vraie pour $n=0$

✦ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$3^{n+5} - 3^n = 11k$ et montrons que

$$3^{n+6} - 3^{n+1} = 11k' \quad (k' \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{On a : } 3^{n+6} - 3^{n+1} = 3(3^{n+5} - 3^n)$$

$$= 3 \times 11k$$

$$= 11k' \text{ avec } k' = 3k$$

D'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : 3^{n+5} - 3^n$ multiple de 11

2^e Méthode

$$\begin{aligned} 3^{n+5} - 3^n &= 3^n (3^5 - 1) = 3^n (243 - 1) \\ &= 3^n \times 242 = 3^n \times 11 \times 22 = 11 \times \underbrace{(3^n \times 22)}_k \\ &= 11k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Et par suite $3^{n+5} - 3^n \in M_{11}$

Définition:

Soit a et b deux entiers relatifs.

- 📎 On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que $a = bk$
- 📎 Si $b \neq 0$, on dit que b divise a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$ c.à.d a multiple de b .

Remarques:

① Les multiples d'un entier a est

$$\dots -na, \dots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots, na, \dots$$

Exp: les multiples de 3 sont :

$$\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

② Tout entier relatif a non nul divise 0 mais 0 ne divise aucun entier relatif.

③ Tout entier relatif a non nul et différent de 1 admet au moins (4) diviseurs qui sont $\{-a, -1, 1, a\}$.

Exp: les diviseurs de 2 sont $\{-2, -1, 1, 2\}$

les diviseurs de 12 sont:

$$\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Activité 3 p 165:

- 1) $a \text{ divise } b \Leftrightarrow b = ak \quad k \in \mathbb{Z}$
 $b \text{ divise } a \Leftrightarrow a = bk' \quad k' \in \mathbb{Z}$
d'où $b = bkk'$ sig $kk' = 1$, or $k \in \mathbb{Z}$
et $k' \in \mathbb{Z}$ donc $k = 1$ et $k' = 1$ ou $k = -1$ et $k' = -1$
Alors $a = b$ ou $a = -b$

Si $a|b$ et $b|a$ alors $a=b$ ou $a=-b$

- 2) $a \text{ divise } b \Leftrightarrow b = ak \quad ; k \in \mathbb{Z}$
 $b \text{ divise } c \Leftrightarrow c = bk' \quad ; k' \in \mathbb{Z}$
 $c = bk' = a k k' = a k'' \quad : k'' = k k' \in \mathbb{Z}$
Donc $a \text{ divise } c$

Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$

- 3) $a \text{ divise } b$ alors $b = ak \quad ; k \in \mathbb{Z}$
 $a \text{ divise } c$ alors $c = ak' \quad ; k' \in \mathbb{Z}$
 $nb + mc = nka + mk'a = a(\underbrace{nk + mk'}_{k''})$

$$= a k''$$

$$k'' \in \mathbb{Z}$$

Alors a divise $nb + mc$

Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid nb + mc$
 $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Propriétés:

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls et différents de 1, on a:

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid a \end{array} \right\} \text{ alors } a = b \text{ ou } a = -b$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array} \right\} \text{ alors } a \mid c$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array} \right\} \text{ alors } a \mid ub + vc \quad u, v \in \mathbb{Z}$$

Activité 2 p 166:

On note x le premier entier relatif, le deuxième est $x+1$, le troisième sera $x+2$

$$x + (x+1) + (x+2) = 3x + 3 = 3(x+1) \\ = 3k ; k \in \mathbb{Z}$$

Donc la somme de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 3

Activité 5 p 166:

a) $\frac{8}{n-2} \in \mathbb{Z} \quad \text{sig } n-2 \in D_8$
 $\text{sig } n-2 \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
 $\text{sig } n \in \{-6, -2, 2, 0, 1, 3, 4, 6, 8\}$

b) $\frac{n+2}{n-4} \in \mathbb{Z}$
$$\frac{n+2}{n-4} = \frac{n-4+6}{n-4} = \frac{n-4}{n-4} + \frac{6}{n-4} = 1 + \frac{6}{n-4}$$

$$\frac{n+2}{n-4} \in \mathbb{Z} \quad \text{sig } 1 + \frac{6}{n-4} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } \frac{6}{n-4} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } n-4 \in D_6 = \{-6, -3, -2, 1, 2, 3, 6\}$$

$$\text{sig } n \in \{-2, 1, 2, 5, 6, 7, 10\}$$

$$c) \quad \frac{2n+8}{n-2} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \frac{2n+8}{n-2} &= \frac{2n-4+12}{n-2} = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{12}{n-2} \\ &= \frac{2(\cancel{n-2})}{\cancel{n-2}} + \frac{12}{n-2} = 2 + \frac{12}{n-2} \end{aligned}$$

$$\frac{2n+8}{n-2} \in \mathbb{Z} \quad \text{sig } \frac{12}{n-2} \in \mathbb{Z} \quad \text{sig } n-2 \in D_{12}$$

$$\text{sig } n-2 \in \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\text{sig } n \in \{-10, -4, -2, -1, 0, 1, 4, 5, 6, 8, 14\}$$

II - Division euclidienne:

Activité 2 p 167:

$A = 13B + 50$ ne représente pas une division euclidienne car $50 > 13$

Ecrire la division euclidienne de A par 13

$$\begin{array}{r|l} 50 & 13 \\ 39 & \\ \hline 11 & 3 \end{array} \quad (11 < 13)$$

Donc $A = 13B + 13 \times 3 + 11 = 13(B+3) + 11$

d'où $A = 13(B+3) + 11$ représente la division euclidienne de A par 13 .

Dans $\mathbb{N}$:

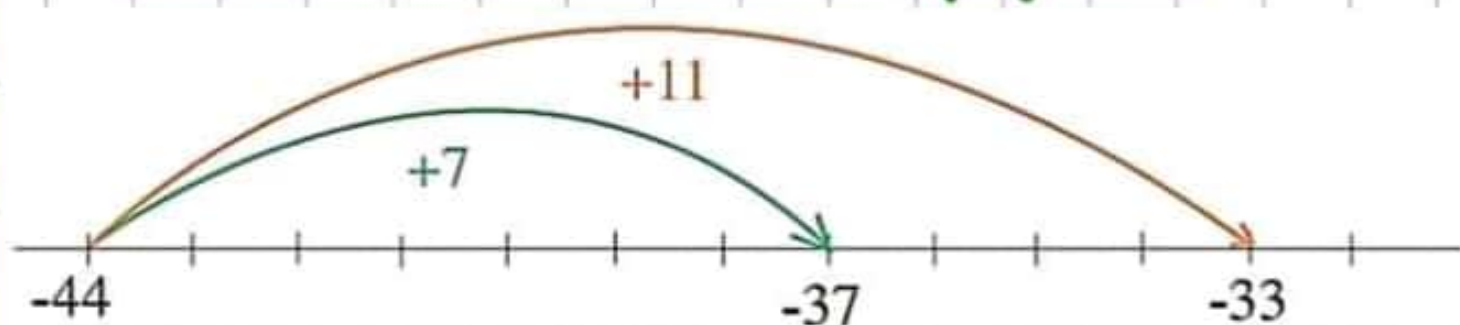
$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

$$a = bq + r \quad \text{avec } 0 \leq r < b$$

Ecrire la division euclidienne de $3A + 20$ par 13 .

$$\begin{aligned}
 3A + 20 &= 3(13B + 50) + 20 \\
 &= 3 \times 13B + 170 \\
 &= 3 \times 13B + 13 \times 13 + 1 \\
 &= 13(3B + 1) + 1
 \end{aligned}$$

Activité de découverte page 167:



Donc $-44 < -37 < -33$

-44 et -33 deux multiples consécutifs de 11 .

$$-37 = -44 + 7 = -4 \times 11 + 7.$$

L'écriture $-37 = -4 \times 11 + 7$ est appelé la division euclidienne de l'entier relatif -37 par 11 .

Vocabulaire:

- 37 est le dividende
- 11 est le diviseur
- 4 est le quotient
- 7 est le reste

D'une façon générale:

Soient a et b deux entiers relatifs tel que $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver le couple d'entiers relatifs (q, r) tel que $a = bq + r$ ou $0 \leq r < |b|$

Application 1:

Sachant que $356 = 17 \times 20 + 16$.

Déterminer le quotient q et le reste r de la division euclidienne de -356 par 17 .

Solution:

Méthode 1

$$-356 = -17 \times 20 - 16$$

$$= 17 \times (-20) - 16 - 1 + 1$$

$$= 17 \times (-20) - 17 + 1$$

$$= 17(-20 - 1) + 1$$

$$= 17(-21) + 1$$

Donc on obtient

$$-356 = 17(-21) + 1$$

Méthode 2

$$-356 = -17 \times 20 - 16$$

$$= 17 \times (-20) - 16 + 17 - 17$$

$$= 17 \times (-20) + 1 - 17$$

$$= 17 \times (-20 - 1) + 1$$

$$= 17(-21) + 1$$

Application 2:

Ecrire la division euclidienne de 118 par 23 puis celle de -118 par 23 puis celle de 118 par -23.

Solution:

$118 = 23 \times 5 + 3$

$$\begin{aligned} -118 &= -23 \times 5 - 3 = 23(-5) - 3 \\ &= 23(-5) - 3 + 23 - 23 \\ &= 23(-5) + 20 - 23 \\ &= 23(-5-1) + 20 \\ &= 23 \times (-6) + 20 \end{aligned}$$

$118 = (-23) \times \underbrace{(-5)}_q + \underbrace{3}_r$
 $0 \leq r = 3 < |-23| = 23.$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \neq 0$, il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tel que :

$$a = bq + r \quad \text{ou} \quad 0 \leq r < |b|$$



Remarques:

- 1 On dit que l'entier b divise a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul
- 2 Si $a = bq + r$, alors le reste ne peut prendre que l'une des valeurs:
 $1, 2, 3, 4, \dots, |b| - 1$.

Application 1 p 168:

a)

$$\begin{array}{r|l} 117 & 28 \\ 112 & \\ \hline 5 & 4 \end{array}$$

$$117 = 28 \times 4 + 5$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 317 & 21 \\ 315 & \\ \hline 2 & 15 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 317 &= 21 \times 15 + 2 \\ -317 &= 21 \times (-15) - 2 \\ &= 21 \times (-15) - 2 + 21 - 21 \\ &= 21 \times (-15) + 19 - 21 \end{aligned}$$

$$-317 = 21 \times (-16) + 19$$

c)

671	6
07	111
11	
5	

$$671 = 6 \times 111 + 5$$

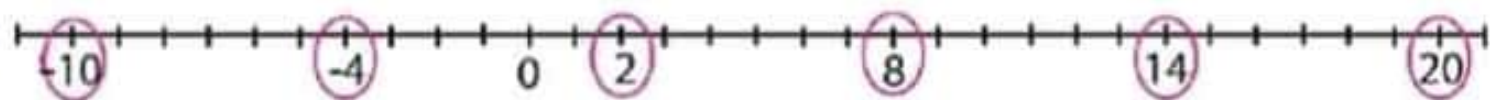
$$\begin{aligned}
 -671 &= -6 \times 111 - 5 \\
 &= -6 \times 111 - 5 + 6 - 6 \\
 &= -6 \times 111 + 1 - 6 \\
 &= -6(111 + 1) + 1 \\
 &= -6 \times 112 + 1
 \end{aligned}$$

Done

$$-671 = (-6) \cdot 112 + 1$$

III - Congruence :

Activité 3 p 169:



1) la différence entre deux d'entre eux égale à 6.

2) $a = nq + r$ et $a' = nq' + r'$
avec $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$

Si $r = r'$

$$\begin{aligned} a - a' &= nq + r - (nq' + r') = nq + \cancel{r} - nq' - \cancel{r'} \\ &= nq - nq' = n(q - q') = nk \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Donc $a - a'$ est un multiple^k de n

Réciproquement :

On a : $a - a' = nk$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{sig } nq + r - a' = nk \quad \text{sig } a' = nq - nk + r$$

$$\text{sig } a' = n(\underbrace{q - k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + r \quad \text{sig } a' = nk' + r$$

D'où r le reste de la division euclidienne de a par n .

Définition:

Soit n un entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.

On dit que a et b sont **congrus modulo n** lorsque a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

On note $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b [n]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{Z}$. On a:

$a \equiv b [n]$ ssi $a-b$ multiple de n



Exp:

$$10 \equiv 2 [4] \text{ car } 10 - 2 = 8 \in M_4$$

$$-5 \equiv 3 [4] \text{ car } -5 - 3 = -8 \in M_4$$

Activité 4 p 170:

1) $a \equiv b [n] \text{ sig } a - b = kn ; k \in \mathbb{Z}$
 $\text{sig } -(a - b) = -kn$
 $\text{sig } b - a = k'n : k' \in \mathbb{Z}$
 $\text{sig } \boxed{b \equiv a [n]}$

2) $a \equiv b [n] \text{ sig } a - b = kn \text{ (1)} : k \in \mathbb{Z}$
 $b \equiv c [n] \text{ sig } b - c = k'n \text{ (2)} : k' \in \mathbb{Z}$

(1) + (2) donne $a - \cancel{b} + \cancel{b} - c = kn + k'n$

$$\text{sig } a - c = n(k + k') = nk'' : k'' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } \boxed{a \equiv c [n]}$$

$$3) \quad a \equiv b [n] \text{ sig } a - b = kn \quad (1); \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$c \equiv d [n] \text{ sig } c - d = k'n \quad (2); \quad k' \in \mathbb{Z}$$

$$(1) + (2) \text{ donne : } a - b + c - d = kn + k'n$$

$$\text{d'où } (a+c) - (b+d) = n(k+k') = nk''$$

$$\text{donc } \boxed{a+c \equiv b+d [n]}$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } a - b - c + d = kn - k'n$$

$$\text{d'où } (a-c) - (b-d) = \overset{t}{(k-k')}n = tn : t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{donc } \boxed{a-c \equiv b-d [n]}$$

$$4) \quad a \equiv b [n] \text{ et } c \equiv d [n]$$

$$a \equiv b [n] \text{ sig } a - b = kn : k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } d(a-b) = dkn$$

$$\text{sig } \boxed{ad - bd = dkn} \quad (1)$$

$$c \equiv d [n] \text{ sig } c - d = k'n : k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } a(c-d) = ak'n$$

$$\text{sig } \boxed{ac - ad = ak'n} \quad (2)$$

$$(2) + (1) \quad ac - \cancel{ad} + \cancel{ad} - bd = ak'n + dk'n$$

$$\text{sig } ac - bd = n(ak' + dk)$$

$$\text{sig } ac - bd = n k'' \quad ; k'' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sig } ac \equiv bd [n]$$

5) Si $p \in \mathbb{N}^*$

$$a \equiv b [n]$$

$$\begin{matrix} \times \\ a \equiv b [n] \end{matrix}$$

$\vdots$

$$\begin{matrix} \times \\ a \equiv b [n] \end{matrix}$$

} p fois

$$a^p \equiv b^p [n]$$

Propriétés:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

1

$$a \equiv a[n]$$

2

$$\text{Si } a \equiv b[n] \text{ alors } b \equiv a[n]$$

3

$$\text{Si } \begin{cases} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{cases} \text{ alors } a \equiv c[n]$$

4

$$\text{Si } \begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} a+c \equiv b+d[n] \\ a-c \equiv b-d[n] \end{cases}$$

5

$$\text{Si } \begin{cases} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{cases} \text{ alors } ac \equiv bd[n]$$

6

$$\text{Si } a \equiv b[n] \text{ alors } a^p \equiv b^p[n] : p \in \mathbb{N}$$

Remarque:

Pour l'addition, la soustraction les règles de calculs sur les égalités se transmettent aux congruences.

Application 2 p 171:

- 1) Comment écrire par une congruence que a est un multiple de m ?
- 2) Compléter les congruences suivantes :

$$17 \equiv \dots [5] \quad ; \quad -3 \equiv \dots [8] \quad ; \quad 21 \equiv \dots [3].$$

- 3) Les congruences suivantes sont-elles vraies ?

$$27 \equiv 37 [3] \quad ; \quad 145 \equiv 1315 [5] \quad ; \quad -5 \equiv -4 [2].$$

1) $m \in \mathbb{Z}, a \in M_m$ sig $a - 0 \in M_m$
sig $a - 0 = km \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$
sig $a \equiv 0 [m]$

$$a \in M_m \text{ sig } a \equiv 0 [m]$$

$$2) \quad 17 \equiv 2 [5] \quad ; \quad 17 \equiv -8 [5]$$

$$-3 \equiv 5 [8] \quad ; \quad -3 \equiv -11 [8]$$

$$21 \equiv 0 [3] \quad ; \quad 21 \equiv -6 [3]$$

$$3) \quad \star 27 \equiv 37 [3] \quad \text{Faux}$$

$$\text{car } 27 - 37 = -10 \notin M_3$$

$$\star 145 \equiv 1315 [5] \quad \text{Vrai}$$

$$\text{car } 145 - 1315 = -1170 \in M_5$$

$$\star -5 \equiv -4 [2] \quad \text{Faux}$$

$$\text{car } -5 + 4 = -1 \notin M_2$$

Application 3 p 171:

3) Vérifier que :

$$10 \equiv 3 [7] \quad , \quad 100 \equiv 2 [7] \quad , \quad 1000 \equiv -1 [7] \quad , \quad 10000 \equiv -3 [7] \quad , \quad 100000 \equiv -2 [7]$$

$$1000000 \equiv 1 [7]$$

En déduire, parmi ces nombres, ceux qui sont multiples de 7 :

4 123 ; 321 083 ; 39 398 ; 1 111 117 ; 3 333 337.

$$\text{📎 } 10 - 3 = 7 \in M_7 \text{ donc } 10 \equiv 3 [7]$$

$$\text{📎 } 100 - 2 = 98 \in M_7 \text{ donc } 100 \equiv 2 [7]$$

 $1000 + 1 = 1001 \in M_7$ donc $1000 \equiv -1 [7]$

De même on montre que:

$10000 \equiv -3 [7]$ et $100000 \equiv -3 [7]$

$1000000 \equiv 1 [7]$

 $4123 = 4 \times 1000 + 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3$

On a: $1000 \equiv -1 [7]$ donc $4 \times 1000 \equiv -4 [7]$

$100 \equiv 2 [7]$

$10 \equiv 3 [7]$ donc $2 \times 10 \equiv 6 [7]$

$3 \equiv -4 [7]$

Donc $4123 \equiv (-4 + 2 + 6 - 4) [7]$

alors $4123 \equiv 0 [7]$ d'où $4123 \in M_7$

 $321083 = 3 \times 100000 + 2 \times 10000 + 1000 + 8 \times 10 + 3$

$100000 \equiv -2 [7]$ donc $300000 \equiv -6 [7]$

$10000 \equiv -3 [7]$ donc $20000 \equiv -6 [7]$

$$1000 \equiv -1 [7]$$

$$10 \equiv 3 [7] \text{ donc } 80 \equiv 24 [7]$$

$$et \ 3 \equiv -4 [7]$$

$$\text{Ainsi } 321083 \equiv (-6 - 6 - 1 + 24 - 4) [7]$$

$$\text{d'où } 321083 \equiv 7 [7]$$

$$\equiv 0 [7]$$

$$\text{Ainsi } 321083 \in M_7$$

IV - PPCM et PGCD de deux entiers relatifs:

Activité:

1) Déterminer D_9 et D_{12} . En déduire

$$\text{PGCD}(9, 12)$$

2) Déterminer $\text{PGCD}(63, 84)$.

Solution:

$$1) \ D_9 = \{1, 3, 9, -1, -3, -9\}$$

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12\}$$

$$\text{PGCD}(9, 12) = 3$$

Méthode d'Algorithme d'Euclide

$$12 = 9 \times 1 + 3$$

$$9 = 3 \times 3 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul
d'où $\text{PGCD}(12, 9) = 3$

$$2) \quad 84 = 63 \times 1 + 21$$

$$63 = 21 \times 3 + 0$$

Donc

$$\text{PGCD}(84, 63) = 21$$

AUTREMENT

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(84, 63) &= \text{PGCD}(7 \times 12, 7 \times 9) \\ &= 7 \times \text{PGCD}(12, 9) \\ &= 7 \times 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Définition:

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, le plus grand entier qui divise à la fois les entiers a et b s'appelle le plus grand commun diviseur, on note par : $\text{PGCD}(a, b)$ ou $a \wedge b$

Propriétés:

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

$$a \wedge b = |a| \wedge |b|$$

$$(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$$

Remarque:

Si $a \wedge b = 1$, on dit que a et b sont premiers entre eux

Application

Déterminer $580 \wedge 400$ et $35 \wedge 84$ par l'algorithme d'Euclide.

Solution:

$$580 = 400 \times 1 + 180$$

$$400 = 180 \times 2 + 40$$

$$180 = 40 \times 4 + 20$$

$$40 = 20 \times 2 + 0$$

Donc $580 \wedge 400 = 20$

$$84 = 35 \times 2 + 14$$

$$35 = 14 \times 2 + 7$$

$$14 = 7 \times 2 + 0$$

Donc $84 \wedge 35 = 7$

Activité:

1) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Déterminer M_a (M_a : les multiples de a)

2) Déterminer les six premiers multiples de 6 et 8.

3) Déterminer PPCM (6, 8).

Solution:

1) $M_a = \{ \dots, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \dots \}$

on constate que l'ensemble M_a n'est pas finie.

2) $M_6 = \{ 0, 6, 12, 18, 24, 30 \}$

$$M_8 = \{ 0, 8, 16, 24, 32, 40 \}$$

3) $\text{PPCM}(6, 8) = 24$

on on écrit

$$6 \vee 8 = 24$$

Définition:

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, le plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a et b s'appelle le plus petit commun multiple, on note par :

$$\text{PPCM}(a, b) \text{ ou } a \vee b$$

Propriétés:

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

$$a \vee b = |a| \vee |b|$$

$$(ka) \vee (kb) = k(a \vee b)$$

$$\text{PPCM}(a, b) \times \text{PGCD}(a, b) = a \times b$$

V - Théorème de Bézout :

Activité 1 p 174 :

- 1) Ecrire l'algorithme d'Euclide pour déterminer $PGCD(145, 55)$.
- 2) En partant de la dernière égalité où le reste est non nul et en exprimant celui-ci successivement en fonction des restes précédents, déterminer un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tels que : $145u + 55v = PGCD(145, 55)$.



E Bézout

$$1) \quad 145 = 55 \times 2 + 35$$

$$55 = 35 \times 1 + 20$$

$$35 = 20 \times 1 + 15$$

$$20 = 15 \times 1 + 5$$

$$15 = 5 \times 3 + 0$$

Donc $PGCD(145, 55) = 5$

On a : $20 = 15 \times 1 + 5$

sig $5 = 20 - 15 \times 1$

sig $5 = 20 - (35 - 20 \times 1) \times 1$

sig $5 = 20 - 35 + 20 \times 1$

sig $5 = 20 \times 2 - 35$

sig $5 = (55 - 35 \times 1) \times 2 - 35$

sig $5 = 55 \times 2 - 35 \times 2 - 35$

sig $5 = 55 \times 2 - 35 \times 3$

sig $5 = 55 \times 2 - (145 - 55 \times 2) \times 3$

sig $5 = 55 \times 2 - 145 \times 3 + 55 \times 6$

sig $5 = 145 \times (-3) + 55 \times 8$

Ainsi $(u, v) = (-3, 8)$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $d = \text{pgcd}(a, b)$

Il existe deux entiers u et v

tel que : $au + bv = d$

Théorème de Bézout

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$
 a et b sont premiers entre eux
si et seulement si, il existe deux
entiers relatifs u et v tel que :

$$au + bv = 1$$



L'égalité $au + bv = 1$ s'appelle
relation de Bézout (ou identité de Bézout)

Application:

- 1) Déterminer : $212 \wedge 87$.
- 2) Justifier qu'il existe deux entiers relatifs u et v tel que : $212u + 87v = 1$
- 3) Déterminer un couple (u, v) tel que
 $221u + 87v = 1$

Solution:

$$\begin{aligned}1) \quad 212 &= 87 \times 2 + 38 \\ 87 &= 38 \times 2 + 11 \\ 38 &= 11 \times 3 + 5 \\ 11 &= 5 \times 2 + 1 \\ 5 &= 1 \times 5 + 0\end{aligned}$$

Donc $212 \wedge 87 = 1$

2) On a: $212 \wedge 87 = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tel que

$$212u + 87v = 1$$

$$\begin{aligned}3) \quad 1 &= 11 - 5 \times 2 \\ &= 11 - (38 - 11 \times 3) \times 2 \\ &= 11 - 38 \times 2 + 11 \times 6 \\ &= 11 \times 7 - 38 \times 2\end{aligned}$$

$$= (87 - 38 \times 2) \times 7 - 38 \times 2$$

$$= 87 \times 7 - 38 \times 14 - 38 \times 2$$

$$= 87 \times 7 - 38 \times 16$$

$$= 87 \times 7 - (212 - 87 \times 2) \times 16$$

$$= 87 \times 7 - 212 \times 16 + 87 \times 32$$

$$= 212 \times (-16) + 87 \times 39$$

Donc $(u, v) = (-16; 39)$

Application 2 p 176:

2 Pour $a = 4$ et $b = 9$, vérifier que les couples $(-2; 1); (7; -3); (97; -43)$ sont tous des couples $(u; v)$ vérifiant l'égalité $au + bv = 1$.

$$a = 4; b = 9$$

$$\text{① } -2 \times 4 + 9 \times 1 = -8 + 9 = 1$$

$$\text{② } 7 \times 4 + 9 \times (-3) = 28 - 27 = 1$$

$$\text{③ } 97 \times 4 + 9 \times (-43) = 388 - 387 = 1$$



n'oubliez pas

Le théorème de Bézout est un
théorème d'existence mais
pas d'unicité

A B C

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

① Tout diviseur commun de
 a et b divise leur PGCD

② L'équation $ax + by = c$
(c entier fixe non nul)
admet des solutions
entières si et seulement si
 c multiple de $\text{PGCD}(a, b)$

3) Si a divise bc et a ne divise pas b alors a divise c



VII - Résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'équation de type $ax + by = c$ où a, b et $c \in \mathbb{Z}$:

Activité de découverte page 178:

1) On a $\text{PGCD}(37, 27) = 1$ donc $37x + 27y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

2) Solution particulière

$$37 = 27 \times 1 + 10$$

$$27 = 10 \times 2 + 7$$

$$10 = 7 \times 1 + 3$$

$$7 = 3 \times 2 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

$$1 = 7 - 3 \times 2$$

$$= 7 - (10 - 7 \times 1) \times 2$$

$$= 7 - 10 \times 2 + 7 \times 2$$

$$= 7 \times 3 + 10 \times (-2)$$

$$= (27 - 10 \times 2) \times 3 + 10 \times (-2)$$

$$= 27 \times 3 - 10 \times 6 + 10 \times (-2)$$

$$= 27 \times 3 + 10 \times (-8)$$

$$\begin{aligned}
 &= 27 \times 3 + (37 - 27 \times 1) \times (-8) \\
 &= 27 \times 3 + 37 \times (-8) + 27 \times 8 \\
 &= 37 \times (-8) + 27 \times 11
 \end{aligned}$$

Donc $(-8, 11)$ est une solution particulière de $37x + 27y = 1$

3) On a : $37x(-8) + 27x11 = 1$

donc $1000 \times (37x(-8) + 27x11) = 1000$

alors $37 \times (-8000) + 27 \times (11000) = 1000$

Ainsi $(x_0, y_0) = (-8000, 11000)$ est

une solution particulière de $37x + 27y = 1000$

4) (x, y) solution de (E), donc $37x + 27y = 1000$

(x_0, y_0) solution de (E), donc $37x_0 + 27y_0 = 1000$

D'où $37x + 27y = 37x_0 + 27y_0$

si q $37x - 37x_0 = 27y_0 - 27y$

Alors $37(x - x_0) = -27(y - y_0)$

5) On a: $37(x - x_0) = 27(y_0 - y)$

alors 37 divise $27(y_0 - y)$

or $27 \wedge 37 = 1$, d'après Lemme de Gauss 37 divise $y_0 - y$, d'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 37k$

alors $y = y_0 - 37k$

$$37(x - x_0) = 27(y - y_0)$$

sig $\cancel{37}(x - x_0) = 27 \times \cancel{37}k$

sig $x - x_0 = 27k$

sig $x = x_0 + 27k$

Réciproquement:

$$37(x_0 - 27k) + 27(y_0 - 37k)$$

$$= 37x_0 - \cancel{999}k + 27y_0 - \cancel{999}k$$

$$= 37x_0 - 27y_0$$

$$= 1$$

6) Comme $x_0 = -8000$ et $y_0 = 11000$

Donc

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(-8000 + 27k, 11000 - 37k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

Méthode de résolution, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de l'équation $ax + by = c$ où a, b et c sont des entiers relatifs.

1) On détermine $d = \text{PGCD}(a, b)$.

2) Si c n'est pas un multiple de d , on en déduit que l'équation n'a pas de solutions entières. Sinon, on divise a, b et c par d . on obtient alors une équation de la forme $Ax + By = C$, avec A et B premiers entre eux.

3) On détermine une solution particulière (u, v) de l'équation. Pour cela, on peut déterminer une solution particulière de l'équation $ax + by = d$ (équivalente à $Ax + By = 1$) à l'aide de l'algorithme d'Euclide et multiplier les nombres obtenus par $\frac{c}{d} = C$.

4) On écrit
$$\begin{cases} Ax + By = C \\ Au + Bv = C \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, on obtient l'équation : $A(x-u) = -B(y-v)$.

A et B étant premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $y-v = kA$

d'où par substitution $x-u = -kB$.

Finalement l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples de la forme : $(u-kB; v+kA)$ où k désigne un entier relatif arbitraire.

Exemple 1 :

$$(E) : 2x + 10y = 3$$

$$\text{On a : } 2 \wedge 10 = 2$$

3 n'est pas multiple de 2 donc l'équation $2x + 10y$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exemple 2:

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $88x + 56y = 16$

$$88 = 56 \times 1 + 32$$

$$56 = 32 \times 1 + 24$$

$$32 = 24 \times 1 + 8$$

$$24 = 8 \times 3 + 0$$

Donc $88 \wedge 56 = 8$. On a 16 multiple de 8 donc l'équation $88x + 56y = 16$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

1^{re} Etape: Simplification

$$\frac{88}{8}x + \frac{56}{8}y = \frac{16}{8} \text{ sig } 11x + 7y = 2$$

2^{de} Etape: Solution particulière de $11x + 7y = 2$

$$11 = 7 \times 1 + 4$$

$$7 = 4 \times 1 + 3$$

$$4 = 3 \times 1 + 1$$

$$3 = 1 \times 3 + 0$$

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \times 1 \\
&= 4 - (7 - 4 \times 1) \times 1 \\
&= 4 - 7 \times 1 + 4 \times 1 \\
&= 4 \times 2 - 7 \times 1 \\
&= (11 - 7 \times 1) \times 2 - 7 \times 1 \\
&= 11 \times 2 - 7 \times 2 - 7 \times 1 \\
&= 11 \times 2 + 7 \times (-3)
\end{aligned}$$

Donc $(2, -3)$ est une solution particulière de $11x + 7y = 1$, alors $(4, -6)$ est une solution particulière de $11x + 7y = 2$

3^{ème} Etape: Solution générale

$$11x + 7y = 2 \quad \text{et} \quad 11 \times 4 + 7 \times (-6) = 2$$

$$\text{donc} \quad 11x + 7y = 11 \times 4 + 7 \times (-6)$$

$$\text{sig} \quad 11x - 11 \times 4 = 7 \times (-6) - 7y$$

$$\text{sig} \quad 11(x - 4) = 7(-6 - y)$$

Alors 11 divise $7(-6-y)$ et
comme $11 \wedge 7 = 1$, d'après Lemme
de Gauss 11 divise $-6-y$, d'où
il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-6-y = 11k$

ainsi $y = -6 - 11k$

$$11(x-4) = 7(-6-y) = 7(11k)$$

sig $x-4 = 7k$ sig $x = 4 + 7k$

Réciproquement:

$$\begin{aligned} & 11(4+7k) + 7(-6-11k) \\ &= 44 + 77k - 42 - 77k \\ &= 2 \end{aligned}$$

Alors

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (4+7k; -6-11k); k \in \mathbb{Z} \}$$

Utilisation des équations diophantiennes:

Résoudre système de congruence:

On veut résoudre
$$\begin{cases} x \equiv 1 [11] \\ y \equiv 3 [4] \end{cases}$$

Par définition, il existe u et v entiers relatifs tels que $x = 11u + 1$
et $x = 4v + 3$

On doit donc résoudre $11u + 1 = 4v + 3$
c'est à dire $11u - 4v = 2$

C'est bien une équation diophantienne

Solution particulière $(u_0, v_0) = (2, 5)$

Puis solution générale $u = 4k + 2$

et $v = 11k + 5$

Donc $x = 11u + 1 = 11(4k + 2) + 1$

Ainsi

$$x = 23 + 44k$$



Déterminer un PGCD:

Il s'agit évidemment de déterminer en fonction de n le PGCD de deux nombres définis avec n .

Exp:

Soit $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.

Déterminer n pour que $a \wedge b = 50$

Supposons $d = 50$, alors il existe x et y tels que $a = 50x$ et $b = 50y$
donc $50x = 11n + 3$

On doit donc résoudre $50x - 11n = 3$
(c'est une équation diophantienne).

De la même façon, $50y = 13n - 1$,
donc à résoudre $50y - 13n = 1$
(c'est aussi équation diophantienne)

Réolvons la première: $50x - 11n = 3$

→ solution particulière: $(x_0, n_0) = (6, 27)$

→ solution générale:

$$x = 11k + 6 \quad \text{et} \quad n = 27 + 50k$$

Il n'est pas nécessaire de résoudre la deuxième équation mais il faut vérifier que cette solution convient

On pose $n = 27 + 50k$

$$\begin{aligned} \text{Alors } a = 11n + 3 &= 11(27 + 50k) + 3 \\ &= 300 + 550k = 50 \times (6 + 11k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = 13n - 1 &= 13(27 + 50k) - 1 \\ &= 350 + 650k = 50 \times (7 + 13k) \end{aligned}$$

$$\text{Or } 13(6 + 11k) - 11(7 + 13k) = 1$$

d'après le théorème de Bézout

$6 + 11k$ et $7 + 13k$ sont premiers

entre eux, alors $\text{PGCD}(a, b) = 50$

Notre réponse est donc :

$$a \wedge b = 50 \quad \text{ssi} \quad n = 27 + 50k$$