

**Niveau : Tronc commun
sciences**

Cours détaillé 1 :

Ensemble IN et notion d'arithmétique

Collection FMATHS



Prof fayssal

0681399067

www.elboutkhili.jimdofree.com

I) Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

1) Définitions et notations

0, 1, 2, 3, 4 ... Sont des nombres entiers naturels, ils forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$

- 0 est un entier naturel nul.
- $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, et on écrit : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$.
- Tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$, on dit que $\mathbb{N}^*$ **inclus** dans $\mathbb{N}$,
et on écrit : $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ et $(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*)$.
- Si un nombre a **appartient** à $\mathbb{N}$, on écrit $a \in \mathbb{N}$ sinon $a \notin \mathbb{N}$.

Exemples :

$2 \in \mathbb{N}$; $2019 \in \mathbb{N}^*$; $-6 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$

2) Nombres pairs et impairs :

Activité :

Déterminer parmi les nombres suivants les nombres pairs et impairs : 208 ; 37 ; 25 ; -15 ; $\frac{15}{5}$; $\sqrt{81}$; $-\sqrt{2}$

Définition :

On dit qu'un entier naturel a est un nombre **pair**, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.

On dit qu'un entier naturel b est un nombre **impair**, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $b = 2k + 1$.

Exemples :

- 220 est un nombre pair car $220 = 2 \times k$ avec $k = 110$
- 2019 est un nombre impair
car $2019 = 2 \times k + 1$ avec $k = 1009$
- Le nombre $6n + 10$ tel que $n \in \mathbb{N}$ est un nombre toujours pair car
 $6n + 10 = 2(3n + 5)$ avec $k = (3n + 5)$

Exercice 01 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, Etudier la parité des nombres suivants :

$2n + 4$; $4n + 2019$; $2n^2 + 6n + 3$.

Propriétés :

- La somme de deux entiers de même parité est un nombre pair.
- La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.
- **Le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair.**

Exemples :

- L'entier $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs
- L'entier $(n + 5)(n + 6)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs
- L'entier $(5n + 10)(5n + 11)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs

Preuve de 3) :

On a n est un entier naturel donc n soit pair ou impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1) = 2p, \text{ avec } p = k(2k + 1)$$

Donc $n(n + 1)$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1) = (2k + 1)(2k + 2)$$

$$= 2(2k + 1)(k + 1)$$

$$= 2p, \text{ avec } p = (2k + 1)(k + 1)$$

Donc $n(n + 1)$, est pair

Exercice 02 :

Étudier la parité des nombres : $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 5$.

Solution de l'exercice 02 :

1) Étudier la parité des nombres :

$$n^2 - 3n + 4 \text{ et } n^2 + 3n + 4.$$

1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned}
 n^2 - 3n + 4 &= n^2 + n - 4n + 4 \\
 &= n(n + 1) - 4n + 4 \\
 &= 2k - 4n + 4 \quad (*) \\
 &= 2(k - 2n + 2) \\
 &= 2k' \text{ avec } k' = k - 2n + 2
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

(*) $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2^{ème} méthode : (Etude des cas)

n est un entier naturel donc n soit un nombre pair ou bien un nombre impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$\begin{aligned}
 n^2 - 3n + 4 &= (2k)^2 - 3 \times 2k + 4 = 4k^2 - 6k + 4 \\
 &= 2(2k^2 - 3k + 2) \\
 &= 2p, \text{ avec } p = 2k^2 - 3k + 2
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$\begin{aligned}
 n^2 - 3n + 4 &= (2k + 1)^2 - 3 \times (2k + 1) + 4 \\
 &= 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 4 \\
 &= 4k^2 - 2k + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(2k^2 - k + 1) \\
 &= 2p, \text{ avec } p = 2k^2 - k + 1
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

La parité de $n^2 + 3n + 5$

1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned}
 n^2 + 3n + 5 &= n^2 + n + 2n + 5 \\
 &= n(n + 1) + 2n + 5 \\
 &= 2k + 2n + 4 + 1 \quad (*) \\
 &= 2(k + n + 2) + 1 \\
 &= 2k' + 1 \text{ avec } k' = k + n + 2
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 + 3n + 5$ est impair

(*) $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2^{ème} méthode : (Etude des cas)

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 n^2 + 3n + 5 &= (2k)^2 + 3 \times 2k + 5 \\
 &= 4k^2 + 6k + 4 + 1 \\
 &= 2(2k^2 + 3k + 2) + 1 \\
 &= 2p + 1, \text{ avec } p = 2k^2 + 3k + 2
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 + 3n + 5$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 n^2 + 3n + 5 &= (2k + 1)^2 + 3 \times (2k + 1) + 5 \\
 &= 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 5 \\
 &= 4k^2 + 10k + 8 + 1 \\
 &= 2(2k^2 + 5k + 4) + 1 \\
 &= 2p + 1, \text{ avec } p = 2k^2 + 5k + 4
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 + 3n + 5$ est impair

II) Multiples d'un entier naturel :

Activité :

- 1) Déterminer tous les multiples de 6 et 9 qui sont inférieurs à 36.
 - 2) Déterminer les multiples communs de 9 et 6
- Déterminer le plus petit commun multiple commun

Définition 01 :

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$

On dit que **a est un multiple de b**, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : **$a = kb$** .

Exercice 03 :

Soient $a ; b$ et c des entiers non nul

- 1) Monter que $9a+15b$ est un multiple de 3
- 2) Montrer que si a est un multiple de b alors a est un multiple de bc
- 3) Montrer que si a est un multiple de b et de c alors a est un multiple de $a+b$

Définitions 02 :

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b , on le note généralement **$\text{PPCM}(a; b)$** ou $a \vee b$.

III) Diviseurs d'un entier naturel :

Activité :

1. Déterminer tous les diviseurs de 30 et 70.
2. Quel est le plus grand commun diviseur de 30 et 70 ?

Définitions 01 :

Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$

On dit que **b est un diviseur de a**, ou b divise par a , ou a est divisible par b s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : **$a = kb$** .

EXEMPLE : 30 est diviseur de 120

Définitions 02

Le plus grand diviseur commun de a et b est le plus grand entier parmi les diviseurs communs des nombres a et b , on le note **$\text{PGCD}(a; b)$** ou $\Delta(a; b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple

Déterminer le $\text{PGCD}(6; 12)$

Remarque :

Si a est un multiple de b alors b est un diviseur de a .

Exercice 04 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b .

2) En déduire la parité de nombre :

$$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$$

3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .

Solution de l'exercice 01 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b .

$$a = 6n + 11$$

$$= 6n + 10 + 1$$

$$= 2(3n + 5) + 1$$

$$= 2k + 1 \text{ avec } k = 3n + 5$$

Donc a est un entier impair

$$b = 2n + 4$$

$$= 2(n + 2)$$

$$= 2k' + 1 \text{ avec } k' = n + 2$$

Donc b est un entier pair

2) En déduire la parité de nombre :

$$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$$

On a b est un entier pair donc : $(-1)^b = 1$

Et a est impair donc $(-1)^a = -1$

Donc on remplace dans c on trouve que :

$$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$$

$$= 6n + 11 - (2n + 3)$$

$$= 6n + 11 - 2n - 3$$

Propriété : Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9

- Un entier est **divisible par 2** lorsque le **chiffre des unités est pair**.
- Un nombre est **divisible par 5** lorsque le **chiffre des unités est 0 ou 5**.
- Un entier est **divisible par 3** lorsque **la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3**.
- Un entier est **divisible par 9** lorsque **la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9**.

Exemple :

Le nombre 124581 est divisible par 3 car la somme des chiffres est 21 et 21 est un multiple de 3

Exercice 05:

1) Déterminer le chiffre x pour que le nombre $53x2$ soit divisible par 9.

2) Déterminer les valeurs de chiffre y pour que $532y$ soit divisible par 6

Solution de l'exercice 01 :

1) L'entier $53x2$ est divisible par 9

Donc $5 + 3 + x + 2$ est un multiple de 9

Donc $10 + x$ est un multiple de 9

Donc $10 + x = 9$ ou $10 + x = 18$

Donc $x = -1 \notin \mathbb{N}$ ou $x = 8$

D'où le chiffre x pour que le nombre $53x2$ soit divisible par 9 est 8.

2) le nombre $532y$ est divisible par 6

Donc $532y$ est divisible par 2 et 3

Donc y est un chiffre pair

De plus le nombre $5 + 3 + 2 + y$ est un multiple de 3, c-à-dire le nombre $10 + y$ est un multiple de 3

Donc $10 + y = ?$

Donc $10 + y = 12$

Donc $y = 2$ ou bien : $10 + y = 18$ donc $y = 8$

*** les valeurs de chiffre y pour que $532y$ soit divisible par 6 sont 2 ou 8**

VI) Nombres premiers :

Définitions :

Soit p un entier supérieur ou égale à 2

Un entier naturel p est dit **premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.**

Exercice :

Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 64.

Décomposition en facteurs premiers

Activité :

La décomposition en facteurs premiers :

$$12 = 2 \times 6 = 2^2 \times 3.$$

2 et 3 sont premiers, on ne peut pas décomposer plus

Théorème 01 :

Tout entier naturel non premier se décompose en un produit des facteurs premiers, cette décomposition est **unique.**

Théorème 02 : PGCD(a; b)

Le PGCD de deux entiers naturels a et b est le **produit des facteurs premiers communs élevés à la plus petite puissance** trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b

Exemple : PGCD(a; b)

Soient : $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$

Alors : $\text{PGCD}(a; b) = 2^2 \times 3^2$

Remarque :

Si $\text{PGCD}(a; b) = 1$ on dit que a et b sont premiers entre eux

Théorème 03 : PPCM(a; b)

Le PPCM de deux entiers naturels a et b est le **produit des facteurs premiers communs et non communs** aux deux nombres, **élevés à la plus grand puissance** trouvés dans la décomposition de a et b .

Exemple ; PPCM(a; b)

Soient $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$

Alors : $\text{PPCM}(a; b) = 2^3 \times 3^3 \times 7^2 \times 5$

Méthode : Comment savoir qu'un nombre est premier

217 est-il un nombre premier ?

On a : $\sqrt{217} = 14,7309 \dots$ alors $14^2 < 217 < 15^2$.

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 14 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Si l'un de ces nombres divise 217, alors 217 c'est un nombre composé. Sinon, 217 est premier.

On a 2, 3, 5 ne divise 217 mais 7 divise 217

Alors 217 est un nombre composé.

Exercice 06

1) Vérifier que 337 est premier

2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$

2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

Solution de l'exercice 06 :

1) Vérifier que 337 est premier

$$\sqrt{337} = 18,35 \dots$$

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 18 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

On a 2, 3, 5 ne divise pas 337

Avec calculatrice en teste la divisibilité de 337 par 7 ; 11 ; 13 ; 17

On trouve 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divise pas 337

Donc 337 est premier

2) Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$

240	2	;	2022	2
120	2	;	1011	3
60	2	;	337	337
30	2	;	1	
15	3	;		
5	5	;		
1		;		

Donc : $a = 2^4 \times 3 \times 5$ et $b = 2 \times 3 \times 337$

2) En déduire $\text{pgcd}(a; b)$ et $\text{ppcm}(a; b)$.

$a = 2^4 \times 3 \times 5$ et $b = 2 \times 3 \times 337$

$\text{pgcd}(a; b) = 2 \times 3 = 6$

$\text{ppcm}(a; b) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 337$

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{240 \times 2022} &= \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 337} \\
 &= \sqrt{(2^2)^2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 337} \\
 &= 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 2 \times 337} \\
 &= 6\sqrt{3370}
 \end{aligned}$$



Résumé de cours 1 : Ensemble $\mathbb{N}$ et notion d'arithmétique

• Définitions et notations

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \dots\}.$$

Si un nombre a appartient à $\mathbb{N}$, on écrit $a \in \mathbb{N}$ sinon $a \notin \mathbb{N}$.

Exemples :

$$2 \in \mathbb{N} ; 2019 \in \mathbb{N}^* ; -6 \notin \mathbb{N} ; 0 \notin \mathbb{N}^*$$

• Nombres pairs et impairs :

On dit qu'un entier naturel a est un nombre pair, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.

On dit qu'un entier naturel b est un nombre impair, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $b = 2k + 1$.

Exemple : Le nombre $6n + 10$ tel que $n \in \mathbb{N}$ est un nombre toujours pair car $6n + 10 = 2(3n + 5)$ avec $k = (3n + 5)$

Propriétés :

Le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair.

Exemples :

- L'entier $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs
- L'entier $(n + 5)(n + 6)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs

• Multiples d'un entier naturel :

On dit que a est un multiple de b , s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = kb$.

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels a et b , on le note généralement PPCM(a ; b) ou $a \vee b$.

• Diviseurs d'un entier naturel :

On dit que b est un diviseur de a , ou b divise par a , ou a est divisible par b s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = kb$.

Le plus grand diviseur commun de a et b on le note PGCD(a ; b) ou $a \wedge b$

• Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9

- Un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est pair.
- Un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est 0 ou 5
- Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3.
- Un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9.

Exemple : le nombre 124581 est divisible par 3 car la somme des chiffres est 21 et 21 est un multiple de 3

• Nombres premiers :

Un entier naturel est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Comment savoir qu'un nombre est premier

217 est-il un nombre premier ?

On a : $\sqrt{217} = 14,7309 \dots$ alors

$$14^2 < 217 < 15^2.$$

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 14 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Si l'un de ces nombres divise 217, alors 217 c'est un nombre composé. Sinon, 217 est premier.

On a 2, 3, 5 ne divise 217 mais 7 divise 217 Alors 217 est un nombre composé.

PPCM(a ; b) et PGCD(a ; b)

Le PGCD de a et b est le produit des facteurs premiers communs élevés à la plus petite puissance dans la décomposition

Le PPCM de a et b est le produit des facteurs premiers communs et non communs aux deux nombres, élevés à la plus grande puissance

Exemple

Soit : $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$

Alors PGCD(a ; b) = $2^2 \times 3^2$

Alors : PPCM(a ; b) = $2^3 \times 3^3 \times 7^2 \times 5$