

BARYCENTRES :

I- Introduction :

Dans ce qui suit nous faisons allusions au point dans un ensemble noté souvent E où est défini un produit scalaire et appelé espace affine à une dimension (de repère $(o; \vec{i})$ par exemple) où tout point est du type $A(x_A)$, à 2 dimensions (de repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ par exemple) où tout point est du type $A(x_A; y_A)$ ou à 3 dimensions (de repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par exemple) où tout point est du type $A(x_A; y_A; z_A)$ cet espace affine sera toujours associé à un espace vectoriel (ensemble non vide particulier dont les éléments sont des vecteurs munis d'une base).

II- Rappels :

- Dans un espace affine les points A, B, C sont alignés lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ unique tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ on dit que B a pour abscisse k dans le repère de graduation d'origine A et de point unitaire C .
- Lorsque cette condition n'est pas remplie, les points A, B, C ne sont pas alignés on dit alors qu'ils sont coplanaires et déterminent toujours un repère du plan. En fixant A le repère est $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$
- Dans tous les cas :
 - La relation de Charles est vérifiée par : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 - $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = AB$; alors $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

III- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés tout ensemble du type :

$\{(A_1, \alpha_1), (A_1; \alpha_2); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$ où les A_i sont les points d'un espace affine et les α_i sont des nombres réels appelés coefficients de pondération. Chaque α_i est appelé coefficient de pondération.

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre du système de points pondérés $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$, l'unique point G s'il existe tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\beta\frac{\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$

Avec $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \beta\frac{\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$

Ainsi si G est le barycentre de $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$; Alors A, B et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ dans la graduation de repère (A ; B).

Construction du barycentre de deux points pondérés :

Détermine puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

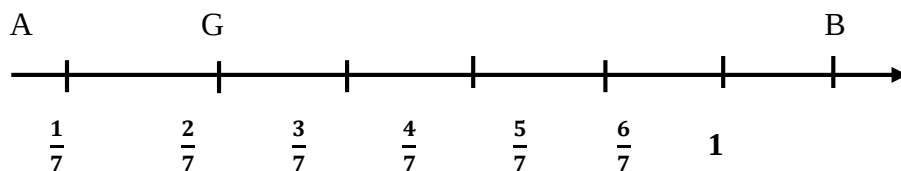
a- $\{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$

b- $\{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$

Solution

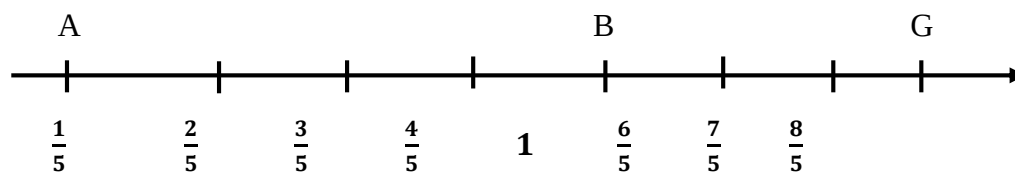
a- $G = \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$

$5 + 2 = 7 \neq 0$ alors G existe et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



a- $G = \{(A ; 3) ; (B ; -8)\}$

$3 - 8 = -5 \neq 0$ donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



3) Barycentre de trois points pondérés

On appelle barycentre de trois points pondérés affectés au système :

$\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta) ; (C ; \gamma)\}$ l'unique point (s'il existe) G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \text{ avec } (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

Construction du barycentre de trois points pondérés :

Détermine puis construis le barycentre G dans chacun des cas suivants :

a- $G = \text{Bary} \{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$

b- $G = \text{Bary} \{(A; 1); (B; -2); (C; 1)\}$

Solution :

a- $G = \text{Bary} \{(A; -3); (B; -2); (C; 3)\}$

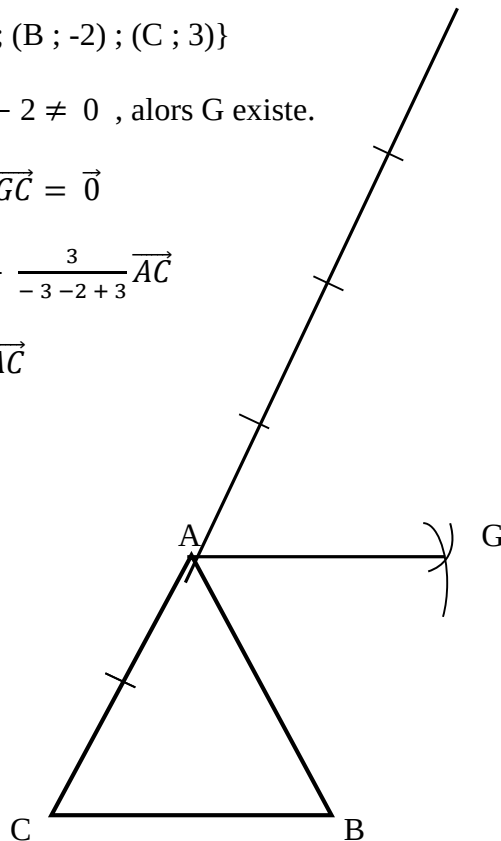
$(-3) + (-2) + (3) = -2 \neq 0$, alors G existe.

On a : $-3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3-2+3} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{-3-2+3} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{-2} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$$



b- $G = \text{Bary} \{(A; 1); (B; -2); (C; 1)\}$

$(1) + (-2) + (1) = 0$, alors G n'existe pas.

4) Barycentre de n points pondérés :

a- Définition :

On appelle barycentre de n points pondérés du système :

$\{A_1; \alpha_1\}; \{A_2; \alpha_2\}; \{A_3; \alpha_3\} \dots \{A_n; \alpha_n\}$, le point G (s'il existe) tel que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0} \text{ ou encore } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Lorsque le plan est rapporté à un repère d'origine O, en fixant cette origine on a : en fixant O

$$\text{on a : } \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) + \alpha_2 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GO}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \overrightarrow{OA_n}$$

b) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ considérons le système

$\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3)\}$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$ alors $\exists ! G \in \varphi$ tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA_3}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G - x_O = x_G \\ y_G - y_O = y_G \\ z_G - z_O = z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix} \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{pmatrix} \text{ D'où } \begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$$

NB :

D'une manière générale si A ; B et C sont 3 points affectés aux complexes Z_A ; Z_B et Z_C et soit G le barycentre affecté au complexe Z_G tel que $Z_G \text{ bary} = \{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$.

$$\text{On a : } Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

5) **Propriétés du barycentre de trois points pondérés :**

- Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.

Exemple : $G = \text{bary} \{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$

$$G = \text{bary} \{(B, \beta) ; (A, \alpha) ; (C, \gamma)\}$$

$$G = \text{bary} \{(C, \gamma) ; (B, \beta) ; (A, \alpha)\}$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

Exemple : $\forall k \in \mathbb{R}^* \text{ on a } G = \text{bary} \{(A, k\alpha) ; (B, k\beta) ; (C, k\gamma)\}$

$$G = \left\{ \left(A ; \frac{\alpha}{k} \right) ; \left(B ; \frac{\beta}{k} \right) ; \left(C ; \frac{\gamma}{k} \right) \right\}$$

- Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

Exemple : $\text{bary} \{(A, \alpha) ; (G', \beta + \gamma + \delta \neq 0)\}$

Remarque :

- Le barycentre G d'un système du type : $\{(A_1, \alpha) ; (A_2, \alpha) ; (A_3, \alpha) ; \dots (A_n, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé isobarycentre.
- Coordonnées barycentriques : tous les N uplets de réels du type : $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \neq 0$ sont appelés des coordonnées barycentriques.

Exemple : (3, 5, -3, 2, 7) sont appelés coordonnées barycentriques car : $3 + 5 - 3 + 2 + 7 \neq 0$

6) **Ensemble des barycentres d'un système**

a) **Barycentre de deux points pondérés :**

On se rappelle que pour le système $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$ $\alpha + \beta \neq 0$ on a : en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow G \in (AB)$$

Considérons les systèmes $\{A, \alpha_i\}; (B, \beta)\}$ $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \exists! G \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB)$

Si $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists! G_2 \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG}_2 = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_2 \in (AB)$

⋮

Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0 \exists! G_n \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG}_n = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

D'où l'ensemble des barycentres des points A et B est engendré par la droite vectorielle (AB) donc cet ensemble est la droite affine passant par les deux points A et B.

b) Barycentre de trois points pondérés :

On a $\overrightarrow{AG}_n = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \right) \overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

Rappel :

$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et en fixant A, il existe un point

$G \in \varphi / \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G \in$ au plan A, B, C.

Considérons les systèmes $\{(A, \alpha_i); (B, \beta_i); (C, \gamma_i)\}$ $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0 \Rightarrow \exists! G_i \in \varphi /$ en fixant A

On a : $\overrightarrow{AG}_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_1 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0 \Rightarrow \exists! G_2 \in \varphi /$ en fixant A

On a $\overrightarrow{AG}_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_2 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \neq 0 \Rightarrow \exists! G_n \in \varphi /$ en fixant A on a :

$\overrightarrow{AG}_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n} \overrightarrow{AC} \Rightarrow G_n \in$ au plan A, B, C

D'où l'ensemble des barycentres des points A, B et C est engendré par le plan vectoriel $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

III-Fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de points pondérés :

Considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3)\}$ on appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système $(A_n; \alpha_n)$ la fonction notée et déterminée par : $f : E \rightarrow V$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$$

- Pour $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 0$ on a :

Pour $M = A_1 \Rightarrow f(A_1) = \alpha_1 \overrightarrow{A_1 A_1} + \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}$
 $f(A_1) = \alpha_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}$

Or par la relation de Charles on a :

$$\forall M \in E, f(M) = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_2}) + \alpha_3 (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1 A_n}))$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MA_1} + \alpha_1 \overrightarrow{A_1 A_2} + \alpha_3 \overrightarrow{A_1 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_1 A_n}$$

$$f(M) = 0 + f(A_1) = f(A_1)$$

pour $M = A_2$; $f(A_2) = \alpha_1 \overrightarrow{A_2 A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_2 A_n}$

$$\forall M \in E, f(M) = \alpha_1 (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_1}) + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_3}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{A_2 A_n})$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MA_2} + \alpha_1 \overrightarrow{A_2 A_1} + \alpha_3 \overrightarrow{A_2 A_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{A_2 A_n}$$

$$= 0 + f(A_2)$$

$$\forall M \in E \text{ on a } f(M) = f(A_2)$$

De façon plus générale en fixant un point quelconque du plan

Posons $M = P$

$$f(P) = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n}$$

par la relation de Charles on a :

$$f(M) = \alpha_1 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_n})$$

$$= \overrightarrow{MP} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + f(P)$$

$$f(M) = f(P) \text{ qui est indépendante de } M$$

* pour

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \neq 0 \text{ alors } \exists ! G \in E \text{ telque } \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\text{Or } f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} \text{ donc } f(G) = \vec{0}$$

Ainsi pour tout point $M \in E$

$$\text{On a : } f(M) = \alpha_1 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_n})$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} + f(G)$$

$$f(M) = \overrightarrow{MG} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

Montrons que f est une bijection :

$$f : E \rightarrow V$$

$$M \mapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, prouvons que f est une bijection de E sur V soit $\vec{v} \in \mathcal{G}$ résolvons l'équation

$$\text{d'inconnue } M \in E, f(M) = \vec{v}$$

- Lorsque $\vec{v} = \vec{0}$ alors $f(M) = \vec{v} \Leftrightarrow f(M) = \vec{0}$

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors $\exists ! G \in E / G = \text{bary}\{A_i, \alpha_i\}$ et $f(G) = \vec{0}$ donc l'ensemble solution est dans ce cas un singleton

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, on a $f(M) = f(P) = \alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \overrightarrow{PP'}$ où P est le point fixé et P' l'extrémité du vecteur alors $f(M) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{0} \Leftrightarrow P' = P$ donc l'ensemble solution est le singleton $\{P\}$

- Lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :

- pour $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors $f(M)$ est indépendant de M donc $f(M) = \vec{v}$ alors

$$\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \vec{v}$$

Alors P est l'unique point vérifiant cette équation pour $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ on a $f(M) = \overrightarrow{MG}(\sum_{i=1}^n \alpha_i)$

$$\text{Alors } f(M) = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = \vec{v}$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\vec{v}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right) \vec{v} = \vec{w}$$

Comme $\vec{w}$ est constant (car $\vec{v}$ et $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$ sont constants) alors $\exists ! M \in E$ tel que $\overrightarrow{MG} = \vec{w}$ d'où

l'équation : $f(M) = \vec{v}$ n'admet qu'une solution.

Conclusion :

Dans tous les cas l'équation $f(M) = \vec{v}$ n'admet qu'une seule solution. On dit alors que f est une bijection de C sur V.

Exemple

A, B et C étant 3 points non alignés du plan

détermine la nature de (Γ) tel que : $\{M \in P ; \parallel 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC} \parallel = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel\}$

Solution

Déterminons la nature de (γ) tel que : $\{M \in \delta / \parallel 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC} \parallel = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel\}$

Posons $f(M) = 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3 \overrightarrow{MC}$, la fonction vectorielle de Leibniz associé au système $\{(A ; 2) ; (B ; -1) ; (C, 3)\}$ où $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$

Comme $4 \neq 0$, G existe uniquement tel que $f(G) = \vec{0}$ et $f(M) = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 4\overrightarrow{MG}$ Ainsi

$$\|f(M)\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}AB$$

Ainsi (γ) est un cercle de centre G et de rayon $r = \frac{1}{4}AB$

IV-Fonction scalaire (au numérique) de Leibniz :

1) Définition :

On appelle scalaire de Leibniz associée au système $\{(A_i; \alpha_i)\} (1 \leq i \leq n)$

L'application $g = E \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto g(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$$

Propriétés :

- ❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors pour tous points M et N on a :
 $g(M) = 2\overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N)$ Où $\vec{V} = \overrightarrow{f(N)}$ est un vecteur constant et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$
- ❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit G le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour tout point M on a : $g(M) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i)MG^2 + g(G)$ formule de Leibniz.

2) Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$:

Soit k un nombre réel. On appelle ligne de niveau k de l'application $g: M \mapsto$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ l'ensemble S des points M de $\mathcal{P}$ ou de E tels que $g(M) = k$

- ❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors pour tous points M et N on a :
 $g(M) = 2\overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N)$ d'où $g(M) = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N) = k$
 $\quad \quad \quad = -2\overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = k$

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = \frac{g(N) - k}{2}$$

Soit I le point tel que (N, I) est un représentant d'origine N du vecteur $\vec{V}$.

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NI} = \frac{g(N) - k}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (NI) on a alors $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NI} =$

$$\overrightarrow{NH} \times \overrightarrow{NI} \Rightarrow \overrightarrow{NH} \times \overrightarrow{NI} = \frac{g(N) - k}{2} \Rightarrow \overrightarrow{NH} = \frac{g(N) - k}{2\overrightarrow{NI}}$$

Donc la ligne de niveau k de l'application g est :

- Une droite de vecteur normal $\vec{V}$, et passant par le point H tel que :
 $\overrightarrow{NH} = \frac{g(N) - k}{2\overrightarrow{NI}}$ dans le plan $\mathcal{P}$.
- Un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{V}$, passant par le point H tel que
 $\overrightarrow{NH} = \frac{g(N) - k}{2\overrightarrow{NI}}$ dans l'espace E .
- ❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit G le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ on a :
 $g(M) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i)MG^2 + g(G)$

$$g(M) = k \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + g(G) = k$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 = k - g(G) \Rightarrow MG^2 = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Posons $\gamma = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$

- Si $\gamma < 0$ alors $MG^2 = \gamma$ impossible dans ce cas $S = \emptyset$
- Si $\gamma = 0$ alors $MG^2 = \gamma \Rightarrow MG^2 = 0 \Rightarrow MG = 0$ dans ce cas $s = \{G\}$
- Si $\gamma > 0$ alors $MG^2 = \gamma \Rightarrow MG = \sqrt{\gamma}$ dans ce cas
 - S est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\gamma}$ dans le plan $\mathcal{P}$
 - S est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\gamma}$ dans l'espace E

Théorème : si G est le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et g la fonction scalaire de Leibniz associée à ce système on a :

$$\forall M; g(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a + b + c)MG^2 + g(G)$$

Ou

$$g(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a + b + c)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 + cGC^2 \text{ et}$$

$$g(G) = aGA^2 + bGB^2 + cGC^2 = \frac{abAB^2 + acAC^2 + bcBC^2}{a + b + c}$$

Evaluation :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$.déterminer puis construire :

- a) L'ensemble S' des points M du plan tels que $MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 25$.
- b) L'ensemble S des points M du plan tels que $2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 20$.

3) **Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ avec A et B des points distincts de $\mathcal{P}$ ou de E :**

A et B étant deux(2) points distincts de $\mathcal{P}$ ou de E , et k un réels $k > 0$ la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est l'ensemble(S) des points M de $\mathcal{P}$ ou de E tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

- ❖ Si $k = 1$ alors $\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow MA = MB$.
 - Dans le plan, $\mathcal{P}$, l'ensemble (S) des points M tels que $MA = MB$ est le plan médiatrice du segment $[AB]$.
 - Dans l'espace E , l'ensemble (s) des points M tels que $MA = MB$ est le plan médiateur du segment $[AB]$.
- ❖ Si $k \neq 1$ alors $\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MA = kMB$

$$\Rightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Rightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$$

$$k \neq 1 \Rightarrow 1 - k \neq 0 \text{ et } 1 + k \neq 0$$

Soit G_1 le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; -k) \Rightarrow \overrightarrow{G_1A} - k\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$

G_2 le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; k) \Rightarrow \overrightarrow{G_2A} + k\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$

On a : $((\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} - k\overrightarrow{MG_1} - k\overrightarrow{G_1B})) \cdot ((\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} + k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B})) = 0$

$$(1 - k)\overrightarrow{MG_1}(1 + k)\overrightarrow{MG_2} = 0$$

$$(1 - k)(1 + k)\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

- Dans le plan $\mathcal{P}$ l'ensemble (S) des points M tels que $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$ est le cercle de diamètre G_1G_2 .
- Dans l'espace E l'ensemble (S) est la sphère de diamètre G_1G_2 .

Evaluation : soit A et B deux points du plan tel que $AB = 6$ détermine et construire l'ensemble (S) des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

Solution :

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Rightarrow MA = 3MB \Rightarrow MA^2 = 9MB^2 \Rightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$$

$$(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit G_1 le barycentre de $(A, 1); (B, -3)$ et

G_2 le barycentre de $(A, 1); (B, 3)$

$$(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{MG_1} - 3\overrightarrow{G_1B}) \cdot (\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{MG_2} + 3\overrightarrow{G_2B}) = 0$$

$$(-2\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B}) \cdot (4\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2B}) = 0$$

$$-2\overrightarrow{MG_1} \cdot 4\overrightarrow{MG_2} = 0; -8\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

$\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow$ le triangle MG_1G_2 est rectangle en M .

L'ensemble solution S des points M solution est le cercle de diamètre G_1G_2 .

On a : $\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$-2\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{G_1A} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

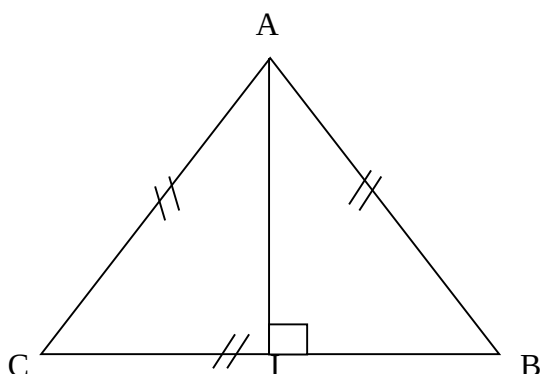
$$\overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2B} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{G_2A} = -3\overrightarrow{AB} \Rightarrow -4\overrightarrow{AG_2} = -3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

Théorème : soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$ pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

V- Produit scalaire et médiane d'un triangle :

1) Triangle équilatéral



$$AB = AC = BC \quad \text{et} \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

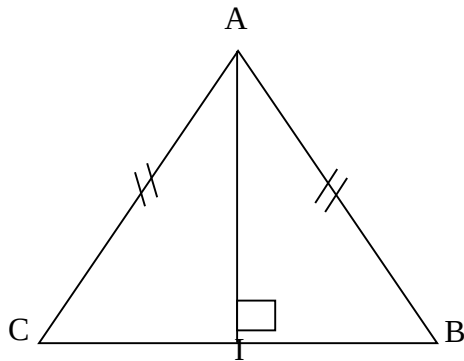
I Milieu de $[BC]$

AI Médiane de $[BC]$

$$\text{On a : } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

2) Triangle isocèle en A

$$AB = AC \quad \text{et} \quad \hat{B} = \hat{C}$$



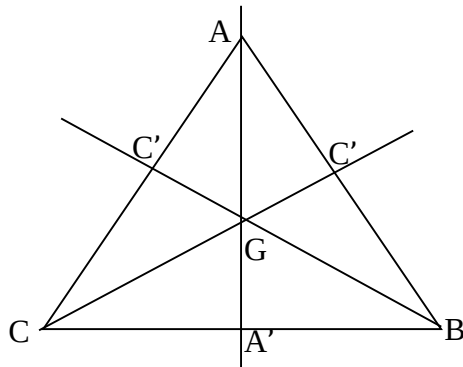
I Milieu de $[BC]$

AI Médiatrice de $[BC]$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

3) Médiane d'un triangle quelconque



A' Milieu de $[BC]$

B' Milieu de $[AC]$

C' Milieu de $[AB]$

G centre de gravité du triangle ABC

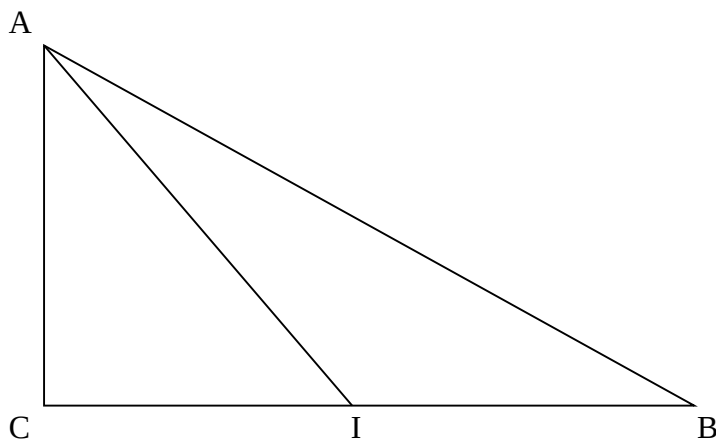
On a :

$$AG = \frac{2}{3}AA' \quad ; \quad BG = \frac{2}{3}BB' \quad ; \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

NB : Pour un triangle isocèle, on a $AG = \frac{3}{4}AA'$

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$