

Fiche de Séquence

Classe : TSE

Durée : 4H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Barycentres

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Diagnostiquer la situation problème
- Mettre à l'essai des pistes de solution
- Sélectionner les données Mathématiques
- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenus :

I. Rappels :

Points pondérés :

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des points du plans P ou de l'espace E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres réels. Les couples $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ sont appelées points pondérés.

Les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les coefficients de pondération.

L'ensemble $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ noté aussi $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est appelé un système de points pondérées.

Le réel $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est le poids du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$

II. Fonction vectorielle de Leibniz :

Définition : soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés du plan P ou de l'espace

E . On appelle fonction vectorielle de Leibniz associé au système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$

l'application notée $\vec{f}$ qui a tout point M associe le vecteur

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}.$$

Remarque : pour tous points M et N de P ou de E $\vec{f}(M) - \vec{f}(N) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MN}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Si } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \text{ alors } \vec{f}(M) - \vec{f}(N) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{NA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{A_iN}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MN} \\ &= 0 \Rightarrow \vec{f}(M) = \vec{f}(N) \Rightarrow \vec{f} \text{ est constante.} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \text{Si } \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0 \text{ montrons qu'il existe un seul point } M \text{ tel que } \vec{f}(M) = \vec{V}.$$

$$\vec{f}(M) = \vec{V} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{V}$$

$$\text{Pour tout point } O \text{ on a : } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})$$

$$\vec{f}(M) = \vec{V} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{V}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \vec{V}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \Rightarrow \vec{f} \text{ est bijective}$$

D'où le théorème suivant :

Théorème :

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors la fonction vectorielle de Leibniz $\vec{f}$ est constante c'est-à-dire il existe un vecteur $\vec{V}$ tel que $\forall M \in P \text{ ou } E \quad \vec{f}(M) = \vec{V}$.
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors l'application $\vec{f}$ est bijective.

III. Barycentre de n points pondérés:

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors il existe un point unique G tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$. Ce point G est appelé le

barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ donc le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ est

l'unique point G de P ou de E tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

Remarque : si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ avec $\alpha_i \neq 0$ alors le barycentre G est appelé isobarycentre ou encore le centre de gravité des points $A_1; A_2; \dots; A_n$ dans ce cas $\alpha_i = \alpha$ on a : $\alpha \overrightarrow{GA_1} + \alpha \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

$$\alpha (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n}) = \vec{0}$$

$$(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \dots + \overrightarrow{GA_n}) = \vec{0}$$

Evaluation : ABCD est un rectangle ; construire le barycentre G des points pondérés $(A, 2); (B, 2); (C, -2); (D, 3)$

Solution : $2+2-2+3=5 \neq 0$ donc le barycentre G existe.

Soit I le barycentre de $((A, 2); (B, 2))$ (on a : $2+2 \neq 0$)

Et soit J le barycentre de $((C, -2); (D, 3))$ (on a : $-2+3=1 \neq 0$)

I est le milieu du segment $[AB]$

$$-2 \overrightarrow{JC} + 3 \overrightarrow{JD} = \vec{0} \Rightarrow -2 \overrightarrow{JC} + 3 (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$-2 \overrightarrow{JC} + 3 \overrightarrow{JC} + 3 \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{JC} = -3 \overrightarrow{CD}$$

G est alors le barycentre de $((I, 4); (J, 1))$

$$4 \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}; 4 \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$$

$$5 \overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \frac{1}{5} \overrightarrow{IJ}$$

IV. Propriétés du barycentre :

- ❖ Si G est le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors pour tout réel $\gamma \neq 0$, G est aussi le barycentre du système $(A_i, \gamma \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$
- ❖ Soit G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et k un entier naturel tel que $1 \leq i \leq k$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \neq 0$
Si G' est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_k, \alpha_k)$ alors G est le barycentre du système $\{(G', \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k); (A_{k+1}, \alpha_{k+1}); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$

V. Repérage du barycentre :

1. Coordonnées du barycentre :

Soit $(o; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan P , $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés de barycentre le point G . soit (x_G, y_G) les coordonnées de G et (x_i, y_i) les coordonnées de A_i dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \quad \text{d'où :}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Pareil pour l'espace E .

2. Affixe du barycentre :

Soit $(o; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan affine complexe. Soit G le barycentre du système du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. z_i l'affixe de A_i et z_G l'affixe de

$$G \text{ dans le repère } (o; \vec{i}; \vec{j}) \text{ on a } z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Evaluation : on donne les point $A(1, 2); B(-1, 1); C(3, 4)$ dans un repère orthonormé du plan. Calculer les coordonnées du barycentre G du système $(A, -1); (B, 2); (C, 3)$

VI. Fonction scalaire de Leibniz :

Définition : soit $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérées du plans P ou de l'espace E . On appelle fonction scalaire de Leibniz associée au système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'application g qui a tout point M de P ou E associe le nombre réel

$$g(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2$$

Propriétés :

❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors pour tous points M et N on a :

$g(M) = 2 \overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N)$ Où $\vec{V} = \overrightarrow{f(N)}$ est un vecteur constant et $\vec{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associé au système au système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$

❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit G le barycentre du système $(A_i; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour tout point M on

a : $g(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + g(M)$ formule de Leibniz.

VII. Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2$:

Soit k un nombre réel. On appelle ligne de niveau k de l'application

$g: M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2$ l'ensemble S des points M de P ou de E tels que $g(M) = k$

❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors pour tous points M et N on a :

$$g(M) = 2 \overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N) \text{ d'où } g(M) = k \Leftrightarrow 2 \overrightarrow{MN} \cdot \vec{V} + g(N) = k \\ = -2 \overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = k$$

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = \frac{g(N) - k}{2}$$

Soit I le point telque (N, I) est un representant d'origine N du vecteur $\vec{V}$.

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{V} = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NI} = \frac{g(N) - k}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (NI) on a alors

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NH} \times \overrightarrow{NI} \Rightarrow \overrightarrow{NH} \times \overrightarrow{NI} = \frac{g(N) - k}{2} \Rightarrow \overrightarrow{NH} = \frac{g(N) - k}{2 \overrightarrow{NI}}$$

Donc la ligne de niveau k de l'application g est :

- Une droite de vecteur normal $\vec{V}$, et passant par le point H tel que :

$$\overline{NH} = \frac{g(N) - k}{2 \overline{NI}} \text{ dans le plan } P.$$

- Un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{V}$, passant par le point H tel que

$$\overline{NH} = \frac{g(N) - k}{2 \overline{NI}} \text{ dans l'espace } E.$$

❖ Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ on a :

$$g(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + g(G)$$

$$g(M) = k \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) MG^2 + g(G) = k$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 = k - g(G) \Rightarrow MG^2 = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Posons
$$\gamma = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

- Si $\gamma < 0$ alors $MG^2 = \gamma$ impossible dans ce cas $S = \emptyset$
- Si $\gamma = 0$ alors $MG^2 = \gamma \Rightarrow MG^2 = 0 \Rightarrow MG = 0$ dans ce cas $s = \{G\}$
- Si $\gamma > 0$ alors $MG^2 = \gamma \Rightarrow MG = \sqrt{\gamma}$ dans ce cas
 - S est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\gamma}$ dans le plan P
 - S est une sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\gamma}$ dans l'espace E

Théorème : si G est le barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et g la fonction scalaire de Leibniz associée à ce système on a :

$$\forall M; g(M) = a MA^2 + b MB^2 + c MC^2 = (a + b + c) MG^2 + g(G)$$

Ou

$$g(M) = a MA^2 + b MB^2 + c MC^2 = (a + b + c) MG^2 + a GA^2 + b GB^2 + c GC^2 \text{ et}$$

$$g(G) = a GA^2 + b GB^2 + c GC^2 = \frac{ab AB^2 + ac AC^2 + bc BC^2}{a + b + c}$$

Evaluation :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$.déterminer puis construire :

- L'ensemble S' des points M du plan tels que $MA^2 - 2 MB^2 + 3 MC^2 = 25$.
- L'ensemble S des points M du plan tels que $2 MA^2 - 2 MB^2 - MC^2 = 20$.

VIII. Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ avec A et B des points distincts de P ou de E :

A et B étant deux points distincts de P ou de E , et k un réel $k > 0$ la ligne de niveau k de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est l'ensemble (S) des points M de P ou de E tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

❖ Si $k = 1$ alors $\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow MA = MB$.

- Dans le plan, P , l'ensemble (S) des points M tels que $MA = MB$ est le plan médiateur du segment $[AB]$.
- Dans l'espace E , l'ensemble (s) des points M tels que $MA = MB$ est le plan médiateur du segment $[AB]$.

❖ Si $k \neq 1$ alors $\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MA = kMB$

$$\Rightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Rightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{MA} - k \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + k \vec{MB}) = 0$$

$$k \neq 1 \Rightarrow 1 - k \neq 0 \text{ et } 1 + k \neq 0$$

Soit G_1 le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; -k) \Rightarrow \vec{G_1 A} - k \vec{G_1 B} = \vec{0}$

G_2 le barycentre de $(A; 1)$ et $(B; k) \Rightarrow \vec{G_2 A} + k \vec{G_2 B} = \vec{0}$

On a : $(\vec{M G_1} + \vec{G_1 A} - k \vec{M G_1} - k \vec{G_1 B}) \cdot (\vec{M G_2} + \vec{G_2 A} + k \vec{M G_2} + k \vec{G_2 B}) = 0$

$$(1 - k) \vec{M G_1} (1 + k) \vec{M G_2} = 0$$

$$(1 - k)(1 + k) \vec{M G_1} \cdot \vec{M G_2} = 0 \Rightarrow \vec{M G_1} \cdot \vec{M G_2} = 0$$

- Dans le plan P l'ensemble (S) des points M tels que $\vec{M G_1} \cdot \vec{M G_2} = 0$ est le cercle de diamètre $G_1 G_2$.
- Dans l'espace E l'ensemble (S) est la sphère de diamètre $G_1 G_2$.

Evaluation : soit A et B deux points du plan tel que $AB = 6$ détermine et construire l'ensemble (S) des points M de P tels que $\frac{MA}{MB} = 3$.

Solution :

$$\frac{MA}{MB} = 3 \Rightarrow MA = 3 MB \Rightarrow MA^2 = 9 MB^2 \Rightarrow MA^2 - 9 MB^2 = 0$$

$$(\vec{MA} - 3 \vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + 3 \vec{MB}) = 0$$

Soit G_1 le barycentre de $(A, 1); (B, -3)$ et

G_2 le barycentre de $(A, 1); (B, 3)$

$$(\vec{M G_1} + \vec{G_1 A} - 3 \vec{M G_1} - 3 \vec{G_1 B}) \cdot (\vec{M G_2} + \vec{G_2 A} + 3 \vec{M G_2} + 3 \vec{G_2 B}) = 0$$

$$(-2 \vec{M G_1} + \vec{G_1 A} - 3 \vec{G_1 B}) \cdot (4 \vec{M G_2} + \vec{G_2 A} + 3 \vec{G_2 B}) = 0$$

$$-2 \vec{M G_1} \cdot 4 \vec{M G_2} = 0; -8 \vec{M G_1} \cdot \vec{M G_2} = 0$$

$\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow$ le triangle MG_1G_2 est rectangle en M .

L'ensemble solution S des points M solution est le cercle de diamètre G_1G_2 .

On a : $\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$-2\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow -2\overrightarrow{G_1A} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2B} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{G_2A} = -3\overrightarrow{AB} \Rightarrow -4\overrightarrow{AG_2} = -3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

Théorème : soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$ pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$