

Barycentres

OBJECTIFS :

Ce chapitre vise à :

- réinvestir les notions vues en classe de première ;
- étendre l'étude de l'outil barycentre à un nombre quelconque de points dans le plan et dans l'espace ;
- Détermine des lignes et surfaces de niveaux et les construis.

Commentaires

En première, l'étude de l'outil barycentre s'est limitée à quatre points.

En Terminale cette étude s'étend à un nombre quelconque de points, mais dans la pratique on se limitera à quatre points. Il ne s'agit pas pour le professeur de refaire le cours de première, mais d'utiliser les acquis de cette classe pour la génération des propriétés. En particulier la détermination et la construction dans le plan des lignes de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ vues en classe de première pourront être réinvesties.

On se référera aux exemples pris dans le domaine de la statistique de la mécanique, etc. aucune théorie n'est faite quant à l'utilisation du symbole Σ qui n'est qu'une simple notation. Dans la pratique on utilisera plutôt une notation du type $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$. Le produit vectoriel n'est pas au programme.

Volume horaire : 10 heures

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Barycentre de n points pondérés Réduction de : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ Réduction de : $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ • Ligne de niveau de l'application :	• Réduire $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ • Réduire $\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ • Détermine les lignes et surfaces de

$M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$ • définition • Propriétés	niveaux des applications du type : $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ $M \mapsto \frac{MA}{MB}$ • Construis dans le plan les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ • Détermine et construis une ligne de niveau de l'application $M \mapsto \text{Mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$
--	---

Remarques et suggestions

En pratique, on utilisera au plus 4 points pondérés. Les nombres complexes peuvent être réinvestis dans cette partie à l'occasion des exercices.

I- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés, tout ensemble du type : $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ où les A_i sont les points d'un espace affine et les α_i sont des nombres réels appelés coefficients de pondération.

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0)$

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre de deux points pondérés tout ensemble du type : $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2)\}$ et

l'unique point G s'il existe tel que : $\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En fixant A on a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \overrightarrow{GA} = -\alpha_2 \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \overrightarrow{AB}$$

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$

Ainsi si G est le barycentre de $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2)\}$; Alors A ; B et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ dans la graduation de repère $(A; B)$.

3) Barycentre de trois points pondérés

On appelle barycentre de trois points pondérés tout ensemble du type

$\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3)\}$ et l'unique point G s'il existe tel que :

$\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 \overrightarrow{GB} + \alpha_3 \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En fixant A on a :

$$\alpha_1 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \alpha_2 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \alpha_3 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{AC} \quad \text{Avec } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0)$$

4) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$

Soit le système $G = \text{bary}\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3)\}$ tel que : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$

Les coordonnées du barycentre G affecté à ce système est:
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \text{et} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$$

D'une manière générale si A ; B et C sont trois points d'affixes respectives Z_A ; Z_B ; Z_C et si G est le barycentre d'affixe Z_G tel que $Z_G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\}$, alors on a :

$$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_A + \alpha_2 Z_B + \alpha_3 Z_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

Propriété 1 : Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés. C'est-à-dire :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_2) ; (B ; \alpha_1) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(C ; \alpha_3) ; (B ; \alpha_2) ; (A ; \alpha_1)\}$$

Propriété 2 : Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

C'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{R}^*$ On a :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; k\alpha_1) ; (B ; k\alpha_2) ; (C ; k\alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \left\{ \left(A ; \frac{\alpha_1}{k} \right) ; \left(B ; \frac{\alpha_2}{k} \right) ; \left(C ; \frac{\alpha_3}{k} \right) \right\}$$

Propriété 3 : Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

C'est-à-dire :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3) ; (D ; \alpha_4)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (G' ; \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\}$$

6) Isobarycentre

Tout barycentre G d'un système du type : $\{(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé **isobarycentre**.

NB : Dans le cas de l'**isobarycentre**, le point G est toujours le **centre de gravité du triangle ABC** .

II- Fonction vectorielle et scalaire de Leibniz

1) Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}.$$

NB : Pour tout point $M \in E$ tel que $G = \text{bary}\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$
on a : $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MG}) + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} + f(G)$ avec

$$f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n}$$

2) Fonction scalaire ou numérique de Leibniz

On appelle fonction scalaire de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \alpha_3 MA_3^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$

NB : Pour tout point $M \in E$ tel que $G = \text{bary}\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$
on a : $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) MG^2 + f(G)$.

Ainsi pour le barycentre G de 3 points pondérés $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3); (D; \alpha_4)\}$,

$$\text{On a : } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

III- Barycentre et ensemble des points

1) Cercle de centre G et de rayon k

Pour un cercle de centre G et de rayon k , on a : $\overrightarrow{MG} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

NB :

- Si $k = 0$, alors l'ensemble cherché est le singleton G .
- Si $k < 0$, alors l'ensemble cherché est vide.

2) Cercle de diamètre $[AB]$

Pour un cercle de diamètre $[AB]$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

3) Médiatrice du segment $[AB]$

Pour la médiatrice du segment $[AB]$, on a : $MA = MB$

4) Parallélisme à la droite (AB) et passant par un point C .

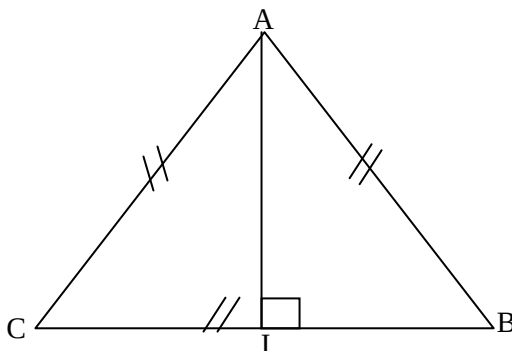
Pour la parallèle à la droite (AB) et passant par un point C , on a : $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AB}$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

5) Perpendicularité à la droite (AB) et passant par un point C .

Pour la perpendiculaire à la droite (AB) et passant par un point C , on a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

IV- Lois de la médiane dans un triangle :

1) Triangle équilatéral



$$AB = AC = BC \quad \text{et} \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

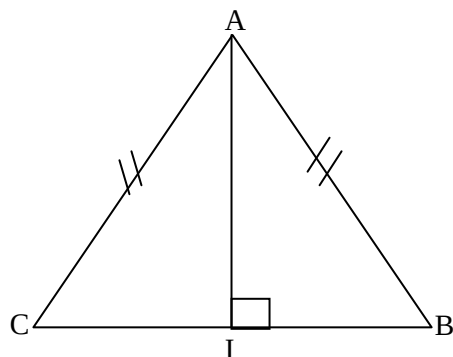
I Milieu de $[BC]$

AI Médiane de $[BC]$

$$\text{On a : } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

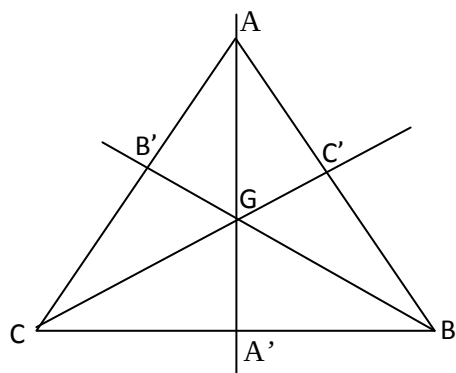
2) Triangle isocèle en A

$$AB = AC \quad \text{et} \quad \hat{B} = \hat{C}$$

I Milieu de $[BC]$ AI Médiatrice de $[BC]$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

3) Médiane d'un triangle quelconque A' Milieu de $[BC]$ B' Milieu de $[AC]$ C' Milieu de $[AB]$

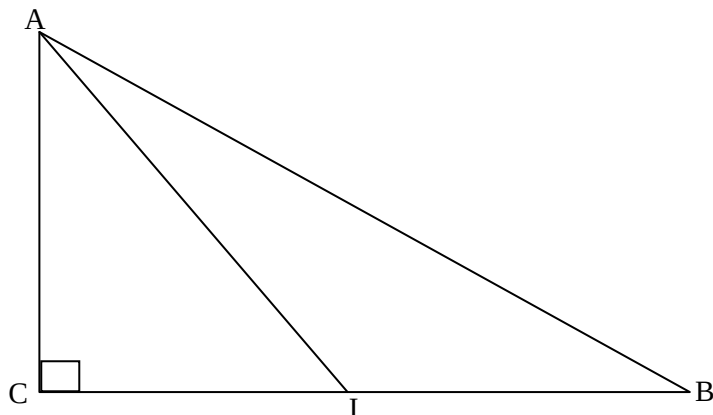
G centre de gravité du triangle ABC

$$\text{On a : } AG = \frac{2}{3}AA' \quad ; \quad BG = \frac{2}{3}BB' \quad ; \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

NB : Pour un triangle isocèle, on a $AG = \frac{3}{4}AA'$

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Exercices

Construction de barycentre de deux et trois points pondérés

1 1) Détermine puis Construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = \text{bary}\{(A; 5) ; (B; 2)\}$; **b-** $G_2 = \text{bary}\{(A; 3) ; (B; -8)\}$

2) Détermine puis Construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = \text{bary}\{(A; -3) ; (B; -2); (C; 3)\}$; **b-** $G_2 = \text{bary}\{(A; 1) ; (B; -2); (C; 1)\}$

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine Euclidien ; on considère un triangle équilatérale ABC dont le côté mesure a .

1) Construis le barycentre G du système $\{(A; 4); (B; 1); (C; -1)\}$.

2) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$.

1) Construis le triangle ABC puis calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$. Construis G puis calcule AG .

3) Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

a) Exprime $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

b) Calcule la valeur de $f(A)$ puis en déduis celle de $f(G)$.

4) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A; B; C$ de coordonnées respectives : $A(3; 1); B(-2; 3); C(1; 0)$

Soit G le barycentre des points $A; B; C$ affectés des points : $2; 1; -1$

1) Trouve les coordonnées de G

2) Trouve suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

3) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan si $k = -35$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

- 1) a- Construis le barycentre $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$.
b- Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) Détermine l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|.$$

3) Détermine l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|.$$

4) Détermine l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24.$$

5) Détermine l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k \text{ (on discutera suivant les valeurs de } k \text{)}.$$

6) Détermine l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72.$$

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On considère les 4 points $A ; B ; C$ et D tel que : $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) ; B\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) ; C\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

1) Détermine les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$

2) Détermine les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1) ; (B, m) ; (C, n)$

3) Trouve l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$

4) Détermine le réel k ($k > 60$) tel que $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ soit élément de (E) .

7 Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$ et un point D tel que :
 $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1) Démontre que D est le barycentre des points pondérés $(A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3)$.
En déduis que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontre que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

3) Calcule DA^2 et DB^2

4) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :
 $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

5) Vérifie que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).

(On fera une figure)

8 Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A ; B ; C non alignés et I le point défini par : $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

De quel coefficients a ; b ; c faut-il affecter respectivement les points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre ?

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que $S = \{ M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \}$

Démontre que S est une sphère de centre I et de rayons r à préciser.

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments [AB] ; [CD] et [IJ].

1) Détermine puis construis l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MC} + \vec{MD}\|.$$

2) Les médiatrices des côtés [AD] ; [BC] se coupent en G. Démontre que
 $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

3) a- Démontre que l'ensemble $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

b- Démontre que $M \in E_2 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

c- En déduis que $M \in E_2 \Leftrightarrow \vec{IJ} \cdot \vec{GM} = 0$

d- Détermine puis construis E_2

10 On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].

a- Calcule $2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ puis en déduis que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

On calculera de même les expressions de BG^2 et de CG^2

b- Montre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2) a- Reconnaître le nature de (E).

b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$. Trace le triangle ABC puis dessiné (E) dans ce cas particulier.

11 Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment $[BC]$ et D le barycentre de $\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).

1) Exprime $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

2) Détermine la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4) Justifier que (E) contient I et en déduis sa construction.

12 Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne les points $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1) Détermine puis trace l'ensemble (Γ) des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A, x) ; (B, y) ; (C, xy)\}$ n'existe pas.

2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)

a- Détermine puis construis le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

b- Quel est l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 = ka^2 \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ (On discutera suivant les valeurs du paramètre } k)$$

c- Construis cet ensemble si $k = 2$

13 1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On désigne par A ; B ; C et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

- a- Réaliser une figure et placer les points A ; B ; C et G .
- b- Calcule les distances AB ; BC et AC puis en déduis la nature du triangle ABC .
- c- Calcule un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduis la nature du triangle GAC .

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})\overrightarrow{CG} = 12$ (1)

a- Montre que G est le barycentre du système des points pondérés :

$$\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$$

b- Montre que la relation (1) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2)

c- Vérifie que le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montre que la relation (2) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

e- En déduis l'ensemble (D) puis le trace.

Application des isobarycentres

14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$; on considère les points : $A_1 ; A_2 ; ; A_3 ; \dots \dots A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N} ; n \geq 2)$. On désigne par Z_1 le complexe tel que $Z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprime en fonction de Z_1 , les racines de l'équation $Z^n = 1$.

2) Détermine l'isobarycentre des points $A_1 ; A_2 ; ; A_3 ; \dots \dots A_n$.

3) Détermine l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \dots + \overrightarrow{MA_n}\| = n$$

15

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$; on considère le polynôme p tel que : $p(Z) = Z^3 - (3 + 4i)Z - 2 + 8i$

1) Montre que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle Z_0 que tu détermineras.

2) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$. On désignera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points $G_0 ; A$ et B d'affixes respectives $Z_0 ; Z_1$ et Z_2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle G_n l'isobarycentre des points $A ; B$ et G_{n-1} .

a- Détermine l'affixe de G_1 .

b- Soit Z_n l'affixe de G_n . Exprime Z_n en fonction de Z_{n-1} .

5) On pose $U_n = Z_n + 1$.

a- Quelle est la nature de la suite U_n ?

b- Etudie la convergence de la suite U_n .

Solutions

Construction de barycentre de 2 et 3 points pondérés

1

1) Déterminons puis Construisons le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

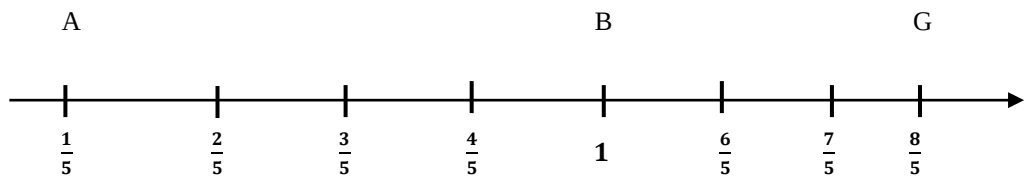
a- $G_1 = \text{bary}\{(A; 5) ; (B; 2)\}$

$5 + 2 = 7 \neq 0$ alors G existe et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



b- $G_2 = \text{bary}\{(A; 3) ; (B; -8)\}$

$3 - 8 = -5 \neq 0$ donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



2) Déterminons puis Construisons le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

a- $G_1 = \text{bary}\{(A; -3) ; (B; -2); (C; 3)\}$

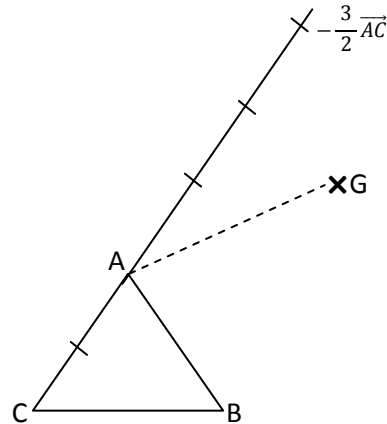
$(-3) + (-2) + (3) = -2 \neq 0$, alors G existe.

$$\text{On a : } -3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-3-2+3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$



b- $G_2 = \text{bary}\{(A; 1) ; (B; -2); (C; 1)\}$

$(1) + (-2) + (1) = 0$, alors G n'existe pas.

Application des fonctions numériques et scalaire de Leibniz

2 Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a .

1) Construisons le barycentre G du système $\{(A, 4) ; (B, 1) ; (C, -1)\}$.

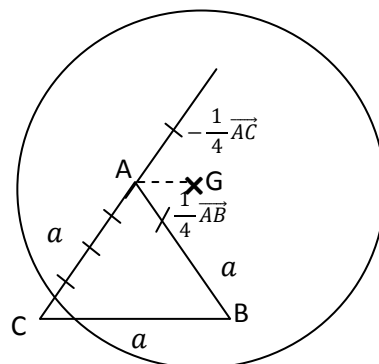
$$G = \text{bary}\{(A; 4) ; (B; 1); (C; -1)\}. \text{ On a : } \alpha_1 = 4 ; \alpha_2 = 1 \text{ et } \alpha_3 = -1$$

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4 + 1 - 1 = 4 \neq 0$; Alors G existe.

$$\text{On a : } 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4+1-1}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$



2) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = \frac{63a^2}{4}$

$f(M) = 4MA^2 + MB^2 - MC^2$ (les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

Alors on a : $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (4 + 1 - 1)MG^2 = 4MG^2$$

$$\text{Et } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{4AB^2 - 4AC^2 - BC^2}{4}$$

$$\text{On a : } AB = AC = BC = a \Rightarrow f(G) = \frac{4a^2 - 4a^2 - a^2}{4} = \frac{-a^2}{4}$$

$$\text{D'où } f(M) = 4MG^2 + \frac{-a^2}{4} = 4MG^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Par hypothèse on a : } f(M) = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{63a^2}{4} \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{63a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{64a^2}{4} \Leftrightarrow MG^2 = \frac{64a^2}{16} \Leftrightarrow MG^2 = 4a^2 \Rightarrow MG = 2a$$

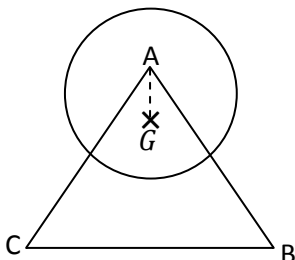
Alors l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 2a$.

Construction : voir figure ci-dessus

3 Soit A, B, C trois points du plan P tel que $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$.

1) Construisons le triangle ABC puis calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Puisque : $AB = AC = 5 \text{ cm}$ et $BC = 6 \text{ cm}$ alors ABC est un triangle isocèle.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(5)^2 + (5)^2 - (6)^2}{2} = \frac{50 - 36}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$$

2) Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)\}$.

Construisons G

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 3 + 3 = 8 \neq 0$; Alors G existe.

$$\text{On a: } 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$= > \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2+3+3}\overrightarrow{AC}$$

$$= > \overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \quad (\text{Pour la construction du point } G, \text{ voir figure})$$

Calculons AG.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AG})^2 = \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{9}{64}(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + AC^2) = \frac{9}{64}(5^2 + 2 \times 2 \times 7 + 5^2) = 9 \Rightarrow AG = 3$$

3) Soit $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

a-Exprimons $f(M)$ en fonction de $f(G)$ et MG

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 + 1)MG^2 = 4MG^2$$

$$\text{D'où } f(M) = 4MG^2 + f(G)$$

b-Calculons la valeur de $f(A)$ puis en déduisons celle de $f(G)$.

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$$

Calculons la valeur de $f(A)$

$$\Rightarrow f(A) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow f(A) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ Avec } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow f(A) = 2 \times 7 = 14.$$

$$\text{D'où } f(A) = 14.$$

Calculons la valeur de $f(G)$

On sait que $f(M) = 4MG^2 + f(G)$

$$\Rightarrow f(A) = 4AG^2 + f(G) . \text{ Or } AG = 3 \text{ et } f(A) = 14$$

$$\Rightarrow 14 = 4(3)^2 + f(G) \Leftrightarrow 14 = 36 + f(G) \Rightarrow f(G) = 14 - 36 = -22$$

$$\text{D'où } f(G) = -22.$$

4) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = f(A)$.

$$f(M) = f(A) \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = 14. \text{ Or } f(G) = -22$$

$$\Rightarrow 4MG^2 - 22 = 14 \Leftrightarrow 4MG^2 = 14 + 22 \Leftrightarrow 4MG^2 = 36 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Rightarrow MG = 3$$

Alors l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = AG = 3$

(Pour la construction du cercle, voir figure)

4 Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : $A(3, 1)$; $B(-2, 3)$; $C(1, 0)$

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points $2 ; 1 ; -1$

1) Trouvons les coordonnées de G

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \text{et} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{(2)(3) + (1)(-2) + (-1)(1)}{2 + 1 - 1} = \frac{3}{2} \\ \text{et} \\ y_G = \frac{(2)(1) + (1)(3) + (-1)(0)}{2 + 1 - 1} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

2) Trouvons suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que :

$$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$$

$$\text{Posons } f(M) = 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -1$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 - 1)MG^2 = 2MG^2$$

$$\text{D'où } f(M) = 2MG^2 + f(G)$$

$$\text{D'autre part } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2AB^2 - 2AC^2 - BC^2}{2}$$

$$\text{De même } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-2 - 3)^2 + (3 - 1)^2 = 25 + 4 = 29$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (1 - 3)^2 + (0 - 1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (1 + 2)^2 + (0 - 3)^2 = 9 + 9 = 18$$

$$\Rightarrow f(G) = \frac{2 \times 29 - 2 \times 5 - 18}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{Alors } f(M) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 2MG^2 + 15 = k \Leftrightarrow 2MG^2 = k - 15 \Leftrightarrow$$

$$MG^2 = \frac{k-15}{2} \Rightarrow MG = \sqrt{\frac{k-15}{2}}$$

- si $k < 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = 15$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble des points M cherchés est le point G .
- si $k > 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon

$$r = \sqrt{\frac{k-15}{2}}$$

3) Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan si $k = 23$

Puisque $k = 23 > 15$; alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre G et de

$$\text{rayon } r = \sqrt{\frac{k-15}{2}} = \sqrt{\frac{23-15}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

5 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 4$; $AC = 6$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construisons le barycentre $G = \{(A, 5) ; (B, -3) ; (C, 2)\}$.

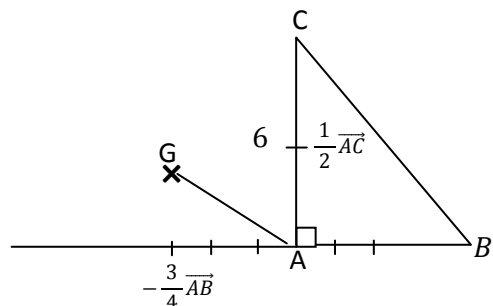
$G = \text{bary}\{(A, 5) ; (B, -3); (C, 2)\}$. On a : $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = 2$

Puis que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 - 3 + 2 = 4 \neq 0$; Alors G existe.

$$\text{On a : } 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{5-3+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5-3+2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



b- Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

ABC est un triangle rectangle en A, alors on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$)

2) Déterminons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|.$$

$$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = 2\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}} \|.$$

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$$\Rightarrow \|5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})\| = 2\|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$$

$$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\| = 2\|2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\|.$$

Or par hypothèse on a :

$$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (\text{Car } G = \text{bary}\{(A; 5); (B; -3); (C; 2)\})$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad (\text{Car } I \text{ est milieu du segment } [AB])$$

$$\text{Alors on a : } \|4\overrightarrow{MG}\| = 2\|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\| = 4\|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI$$

Donc l'ensemble E_1 des points M du plan cherché est la médiatrice du segment $[GI]$

3) Déterminons l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$$\|5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|.$$

$$\| \underbrace{5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}} \| = \| \underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}} \|.$$

Introduisons le barycentre G Introduisons le point I

$$\Rightarrow \|5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})\| = \|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\|$$

$$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\|.$$

$$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI}\|.$$

$$\Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG} + 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}\| = \|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA}\|.$$

Or par hypothèse on a :

$$5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (\text{Car } G = \text{bary}\{(A; 5) ; (B; -3); (C; 2)\})$$

$$\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA} \quad (\text{D'après la relation de Chasles})$$

$$\text{Alors on a : } \|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{BA}\| \Leftrightarrow 4MG = BA \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}BA$$

Donc l'ensemble E_2 des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon

$$r = \frac{1}{4}BA$$

4) Déterminons l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24.$$

$$\text{Posons } f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$$

$$\text{Alors } 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24 \Leftrightarrow f(M) = 24$$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

$$\text{On sait que } f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G) \text{ avec } \alpha_1 = 5 ; \alpha_2 = -3 \text{ et } \alpha_3 = 2$$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (5 - 3 + 2)MG^2 = 4MG^2 \Rightarrow f(M) = 4MG^2 + f(G)$$

$$\text{D'autre part } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-15AB^2 + 10AC^2 - 6BC^2}{4}$$

Avec $AB^2 = 16$; $AC^2 = 36$ et $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$ (Théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A)

$$\Rightarrow f(G) = \frac{-15(16) + 10(36) - 6(52)}{4} = \frac{-240 + 360 - 312}{4} = \frac{-192}{4} = -48$$

$$\text{D'où } f(M) = 4MG^2 - 48$$

$$\text{D'autre part, on a : } f(M) = 24$$

$$\text{Alors par identification on a : } 4MG^2 - 48 = 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 48 + 24 \Leftrightarrow 4MG^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 18 \Rightarrow MG = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Donc l'ensemble E_3 des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 3\sqrt{2}$

5) Déterminons l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k \quad (\text{on discutera suivant les valeurs de } k).$$

Posons $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

Alors $f(M) = k \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = k \Leftrightarrow 4MG^2 - 48 = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k+48}{4}$

$$\Rightarrow MG = \sqrt{\frac{k+48}{4}} = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$$

- si $k < -48$; alors l'ensemble des points M cherchés est vide.
- si $k = -48$ alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble E_4 des points M cherchés est le point G .
- si $k > -48$; alors l'ensemble E_4 des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{\sqrt{k+48}}{2}$

6) Déterminons l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72.$$

Ici $\sum \alpha_i = 0$ avec $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = -3$ et $\alpha_3 = -2$; alors on introduit l'origine A des points de pondération.

$$\text{Donc on a : } 5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA})^2 - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 = -72.$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) - 3AB^2 - 2AC^2 = -72$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) - 3(16) - 2(36) = -72 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{MA}(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = 48$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{48}{2(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA})^2 = \left[\frac{48}{2(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})} \right]^2 \Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2(9AB^2 + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4AC^2)}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2304}{2(9 \times 16 + 12 \times 0 + 4 \times 36)} = \frac{2304}{576} = 4$$

$$\Rightarrow MA = 2$$

Donc l'ensemble E_5 des points M du plan cherché est le cercle de centre A et de rayon $r = 2$.

6 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On considère les 4 points A ; B ; C et D tel que : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1) Déterminons les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$

$$\text{De même } (\|\overrightarrow{DA}\|)^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (0 - x)^2 + (3 - y)^2 = x^2 + (3 - y)^2$$

$$(\|\overrightarrow{DB}\|)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = (-1 - x)^2 + (0 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2$$

$$(\|\overrightarrow{DC}\|)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = (3 - x)^2 + (0 - y)^2 = (3 - x)^2 + y^2$$

$$\text{Alors } \|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| \Leftrightarrow (\|\overrightarrow{DA}\|)^2 = (\|\overrightarrow{DB}\|)^2 \Leftrightarrow x^2 + (3 - y)^2 = (1 + x)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9 - 6y + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 2x + 1 - 9 + 6y = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0 \text{ (1)}$$

$$\text{De même } \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\| \Leftrightarrow (\|\overrightarrow{DB}\|)^2 = (\|\overrightarrow{DC}\|)^2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (2)}$$

Ainsi des équations **(1)** et **(2)**, on en déduit que $y = 1$

D'où $D \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

2) Déterminons les réels m et n tels que D soit barycentre des points $(A, 1); (B, m); (C, n)$

Si D est le barycentre des points $(A, 1); (B, m); (C, n)$; alors les coordonnées de D sont telles que :

$$\begin{cases} x_D = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ y_D = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{(1)(0) + (m)(-1) + (n)(3)}{1 + m + n} = \frac{-m + 3n}{m + n + 1} \\ 1 = \frac{(1)(3) + (m)(0) + (n)(0)}{1 + m + n} = \frac{3}{m + n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-m + 3n}{m + n + 1} = 1 \\ \frac{3}{m + n + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3n = m + n + 1 \\ 3 = m + n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 2n = 1 \\ m + n = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $m = \frac{3}{4}$ et $n = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow D = \text{bary}\left\{(A, 1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\}$$

NB : Le barycentre d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

$$\text{D'où } D = \text{bary}\left\{(A, 1); \left(B, \frac{3}{4}\right); \left(C, \frac{5}{4}\right)\right\} \quad \text{ou} \quad D = \text{bary}\{(A, 4); (B, 3); (C, 5)\}$$

3) Trouvons l'ensemble (E) tel que : $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k \Leftrightarrow 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k$$

$$\text{Posons } f(M) = 4MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2$$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre D).

$$\text{Alors on a : } f(M) = \sum \alpha_i MD^2 + f(D)$$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (4 + 3 + 5)MG^2 = 12MD^2$$

$$\text{Et } f(D) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{12AB^2 + 20AC^2 + 15BC^2}{12}$$

$$\text{Avec } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (-1 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 10$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (3 - 0)^2 + (0 - 3)^2 = 18$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (3 + 1)^2 + (0 - 0)^2 = 16$$

$$A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right); B\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right); C\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow f(D) = \frac{12 \times 10 + 20 \times 18 + 15 \times 16}{12} = 60$$

$$\text{Alors } f(M) = k \Leftrightarrow 12MD^2 + f(D) = k \Leftrightarrow 4MD^2 + 60 = k \Leftrightarrow MD^2 = \frac{k-60}{4}$$

$$\Rightarrow MD = \sqrt{\frac{k-60}{4}} = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$$

- si $k < 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = 60$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point D .
- si $k > 60$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre $D\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

4) Déterminons le réel k ($k > 60$) tel que $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ soit élément de (E).

Pour $k > 60$, on a : le cercle de centre $D\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{k-60}}{2}$

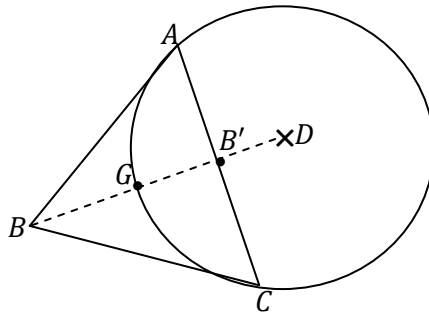
Alors le point $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ est élément du ce cercle si et seulement si : $d(A; D) = r$, c'est-à-dire que le point A appartient au cercle (E) si la distance du centre D au point A vaut le rayon r .

$$\text{Donc } d(A; D) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \frac{\sqrt{k-60}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{k-60} \Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{k-60})^2 \Leftrightarrow 20 = k-60 \Rightarrow k = 80$$

7 Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de $[AC]$ et un point D tel que :

$$4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$$



1) Démontrons que D est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$; $(C, 3)$.

Par hypothèse on a : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ (Introduisons le barycentre D).

$$\text{Alors on a : } 4(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

D'où $D = \text{bary} \{(A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3)\}$.

En déduisons que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

On sait que $D = \text{bary} \{(A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3)\}$.

D'autre part B' est le milieu de $[AC]$ alors : $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$

$$D'où 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow (3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\underbrace{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}_{\text{Introduisons } B'}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3 \left[(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'A}) + (\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'C}) \right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[\underbrace{(\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C})}_{\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DB'})}_{2\overrightarrow{DB'}} \right] - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3(2\overrightarrow{DB'}) - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{DB'} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

Alors D appartient à la droite (BB') qui est la médiatrice de $[AC]$

Conclusion : D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

2) Démontrons que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

D'après la question 1), on a : $3\overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (Introduisons le point B).

$$\Rightarrow 3(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) - (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BB'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = -2\overrightarrow{DB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$

3) Calculons DA^2 et DB^2

$$D = \text{bary} \{(A, 3); (B, -2); (C, 3)\}.$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{AD} = \frac{-2}{3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{3-2+3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD})^2 = \left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{9}{16}AC^2. \text{ Or } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \right) + \frac{9}{16}AC^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} AB^2 - \frac{3AB^2 + 3AC^2 - 3BC^2}{8} + \frac{9}{16} AC^2 \\
&= \frac{4AB^2 - 6AB^2 - 6AC^2 + 6BC^2 + 9AC^2}{16}
\end{aligned}$$

(Or ABC est un triangle équilatérale tel que $AB = AC = BC = 3$)

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{-2AB^2 + 3AC^2 + 6BC^2}{16} = \frac{-2AB^2 + 3AB^2 + 6AB^2}{16} = \frac{7AB^2}{16} = \frac{7 \times (3)^2}{16} = \frac{7 \times 9}{16} = \frac{63}{16}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{63}{16}$$

De même d'après la question 2), on a : $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BB'}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BD})^2 = \left(\frac{3}{2} \overrightarrow{BB'}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow BD^2 = \frac{9}{4} BB'^2$$

ABC étant équilatérale, on a : $BB' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\text{D'où } BD^2 = \frac{9}{4} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \times \frac{27}{4} = \frac{243}{16}$$

4) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation :

$$3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$$

Posons $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$

$$\text{Alors } MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12 \Leftrightarrow f(M) = 12$$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MD et de $f(D)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MD^2 + f(D)$ avec $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = -2$ et $\alpha_3 = 3$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MD^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MD^2 = (3 - 2 + 3)MD^2 = 4MD^2 \Rightarrow f(M) = 4MD^2 + f(D)$$

$$\text{D'autre part } f(D) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-6AB^2 + 9AC^2 - 6BC^2}{4}$$

Or ABC est équilatérale tel que $AB = AC = BC = 3$

$$\Rightarrow f(D) = \frac{-6(3)^2 + 9(3)^2 - 6(3)^2}{4} = \frac{-27}{4}$$

$$\text{Donc } f(M) = 4MD^2 + f(G) \Leftrightarrow f(M) = 4MD^2 - \frac{27}{4}$$

$$\text{D'autre part } f(M) = 12$$

$$\text{Par identification, on a : } 4MD^2 - \frac{27}{4} = 12$$

$$\Leftrightarrow 4MD^2 = 12 + \frac{27}{4} \Leftrightarrow 4MD^2 = \frac{75}{4} \Leftrightarrow MD^2 = \frac{75}{16} \Rightarrow MD = \sqrt{\frac{75}{16}} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre D et de rayon $r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

5) Vérifions que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E) puis trace (E).

(On fera une figure)

G étant l'isobarycentre des points A ; B et C, on a : D ; B' et G sont alignés.

Par conséquent $DG = DB' + B'G$ (voir figure)

$$\text{Or } B'G = \frac{1}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } DB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow DG = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

D'où G appartient à l'ensemble (E)

8

Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit trois points A ; B ; C non alignés et I le point défini par : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Déterminons les coefficients a ; b ; c qu'il faut affecter respectivement aux points A ; B ; C pour que I soit leur barycentre

$$I = \text{bary}\{(A; a); (B; b); (C; c)\} \text{ si et seulement si : } a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Par hypothèse, on a : } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ (Introduisons le barycentre I)}$$

$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II}) - 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} . \text{ Avec } \overrightarrow{II} = \vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Par identification avec $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$; On a : $a = 1$; $b = -2$ et $c = -1$

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et l'ensemble S tel que $S = \{ M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \}$

Si ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ alors on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow BC^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow BC^2 = 5$$

Par hypothèse, on a : $I = \text{bary}\{(A; 1) ; (B; -2) ; (C; -1)\}$

Démontrons que S est une sphère de centre I et de rayons r à préciser.

$$MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3$$

$$\text{Posons } f(M) = MA^2 - 2MB^2 - MC^2$$

$$\text{Alors } MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3 \Leftrightarrow f(M) = -3$$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MI et de $f(I)$

$$\text{On sait que } f(M) = \sum \alpha_i MI^2 + f(I) \text{ avec } \alpha_1 = 1 ; \alpha_2 = -2 \text{ et } \alpha_3 = -1$$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MI^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MI^2 = (1 - 2 - 1)MI^2 = -2MI^2$$

$$\Rightarrow f(M) = -2MI^2 + f(I)$$

$$I = \text{bary}\{(A; 1) ; (B; -2) ; (C; -1)\}$$

$$\text{D'autre part } f(I) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{-2AB^2 - AC^2 + 2BC^2}{-2}$$

Or ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 2$; $AC = 1$ et $BC = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow f(I) = \frac{-2(2)^2 - (1)^2 + 2(\sqrt{5})^2}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } f(M) = -2MI^2 + f(I) \Leftrightarrow f(M) = -2MI^2 - \frac{1}{2}$$

D'autre part $f(M) = -3$

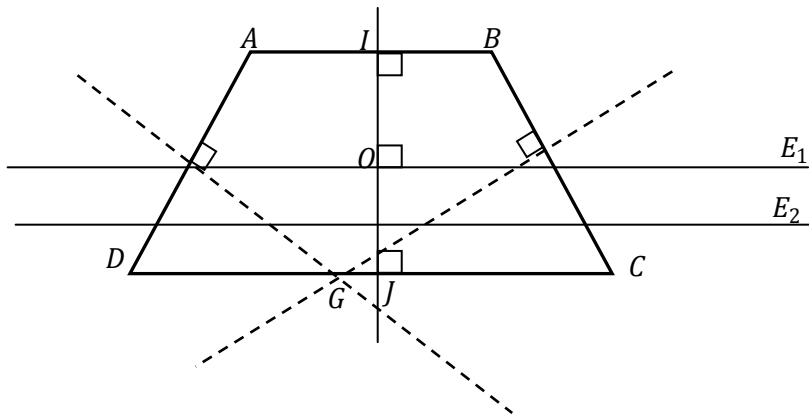
Par identification, on a : $-2MI^2 - \frac{1}{2} = -3$

$$\Leftrightarrow -2MI^2 = -3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2MI^2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow MI = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Alors l'ensemble S des points M cherchés est une sphère de centre I de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

9 Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD) .

Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments [AB] ; [CD] et [IJ].



1) Déterminons puis construisons l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

$$\text{On a : } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

- Introduisons le point I dans $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ (car I est milieu de [AB] $\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$)

- Introduisons le point J dans $\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ (car J est milieu de [CD] $\Rightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$)

$$\underbrace{\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|}_{\text{Introduisons I}} = \underbrace{\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|}_{\text{Introduisons J}}.$$

Introduisons I Introduisons J

$$\Rightarrow \|(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB})\| = \|(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})\|.$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}\| = \|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD}\|.$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})\| = \|2\overrightarrow{MJ} + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD})\|.$$

$$\text{Or } (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \|2\overrightarrow{MI}\| = \|2\overrightarrow{MJ}\|.$$

$$\Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MI}\| = 2\|\overrightarrow{MJ}\|.$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|.$$

$$\Leftrightarrow MI = MJ$$

Alors l'ensemble E_1 des points M cherché est la médiatrice du segment $[IJ]$

Construction : (voir figure)

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G .

Démontrons que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.

$$- G \text{ appartient à la médiatrice de } [AD] \Rightarrow GA = GD \Leftrightarrow GA^2 = GD^2 \quad (1)$$

$$- G \text{ appartient à la médiatrice de } [BC] \Rightarrow GB = GC \Leftrightarrow GB^2 = GC^2 \quad (2)$$

En effectuant la somme membre des relations **(1)** et **(2)**, on obtient :

$$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2. \text{ (ce qu'il fallait Démontrer)}$$

3) a- Démontrons que l'ensemble $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

On sait que : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ (en posant $M = G$), on a :

$$GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2 \text{ ce qui veut dire que } G \text{ appartient à l'ensemble } E_2.$$

D'où l'ensemble $E_2 : MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

$$\text{b- Démontrons que } M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$$

On sait que $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide. Alors :

$$- \text{ Introduisons le point } I \text{ dans } MA^2 + MB^2 \text{ (car } I \text{ est milieu de } [AB] \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0})$$

$$- \text{ Introduisons le point } J \text{ dans } MC^2 + MD^2 \text{ (car } J \text{ est milieu de } [CD] \Rightarrow \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0})$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})^2 + (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JD})^2$$

Après développement et arrangement, on a :

$$2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2 + 2\overrightarrow{MJ}(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD})$$

$$\text{Or } (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2$$

$$\text{D'autre part, } I \text{ est milieu de } [AB] \Rightarrow IA^2 = IB^2$$

$$\text{De même } J \text{ est milieu de } [DC] \Rightarrow JD^2 = JC^2$$

$$\Rightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JD^2 \Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IA^2 = 2MJ^2 + JC^2 + JC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 2MJ^2 + 2JC^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 = MJ^2 + JC^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - MJ^2 = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow (-\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{IJ})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\text{Introduisons le point } O \text{ dans } (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) \text{ (car } O \text{ est milieu de } [IJ] \Rightarrow \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{JI}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OJ}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = JC^2 - IA^2. \text{ Or } \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JI}(2\overrightarrow{MO}) = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{MO} = JC^2 - IA^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = JC^2 - IA^2 \Rightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2} \text{ (ce qu'il fallait Démontrer)}$$

c- En déduisons que $M \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

D'après la question b), on a : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors $G \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{JC^2 - IA^2}{2}$

Alors : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}(\overrightarrow{GM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$

d- Déterminons puis construis E_2

Puisque $E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GM} = 0$. Alors l'ensemble E_2 est donc la droite passant par G et perpendiculaire à la droite (IJ) .

10

On donne trois points A ; B et C distinctes non alignés du plan et on note a ; b et c les longueurs des côtés du triangle ABC tel que $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit I le milieu du segment $[BC]$.

a- Calculons $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{On sait que : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

Or $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$.

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - a^2$$

En déduisons que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Puisque : G est le centre de gravité du triangle ABC ; alors on a :

$G = \text{bary}\{(A; 1) ; (B; 1) ; (C; 1)\}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{1+1+1} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+1+1} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow AG^2 = \frac{1}{9} (AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2) = \frac{1}{9} (c^2 + c^2 + b^2 - a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow AG^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\text{De même on a : } BG^2 = \frac{1}{9} (2a^2 + 2c^2 - b^2) \text{ et } CG^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2a^2 - c^2)$$

$$\text{b- Montrons que } AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

D'après 1) a-), on a :

$$AG^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad (1)$$

$$BG^2 = \frac{1}{9} (2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad (2)$$

$$CG^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2a^2 - c^2) \quad (3)$$

En effectuant la somme membre à membre des relations : **(1) ; (2) et (3)**, on obtient :

$$\begin{aligned} AG^2 + BG^2 + CG^2 &= \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{9} (2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{9} (2b^2 + 2a^2 - c^2) \\ &= \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2a^2 - c^2) \\ &= \frac{1}{9} (3b^2 + 3c^2 + 3a^2) = \frac{3}{9} (b^2 + c^2 + a^2) = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \text{ (ce qu'il fallait Démontrer)}$$

2) a- Déterminons la nature de (E).

$$\text{On a (E) : } MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\text{Posons } f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

$$\text{Alors } MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow f(M) = a^2 + b^2 + c^2$$

Exprimons ainsi $f(M)$ en fonction de MG et de $f(G)$

On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ avec $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = 1$

Or $\sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (1 + 1 + 1)MG^2 = 3MG^2 \Rightarrow f(M) = 3MG^2 + f(G)$

$$\text{D'autre part } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}$$

Avec $AB^2 = c^2$; $AC^2 = b^2$ et $BC^2 = a^2$

$$\Rightarrow f(G) = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$\text{D'où } f(M) = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

D'autre part, on a : $f(M) = a^2 + b^2 + c^2$

Alors par identification on a : $3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \Rightarrow MG = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$$

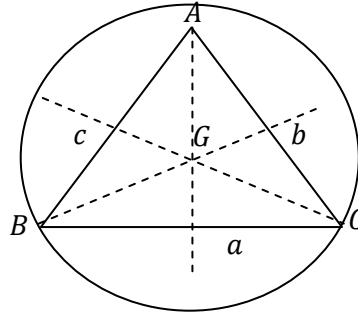
Donc l'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon

$$r = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$$

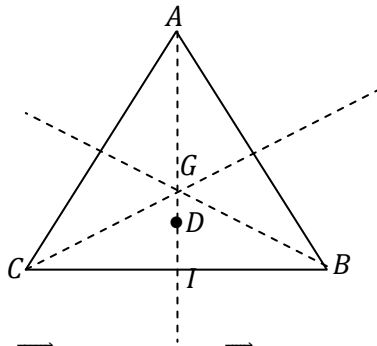
b- On donne $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$.

Si $a = 5$; $b = 4$ et $c = 3$, alors :

L'ensemble (E) des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{10}{3}$



- 11** Soit ABC un triangle du plan ; I le milieu du segment $[BC]$ et D le barycentre de $\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$ (On fera une figure qui sera compléter au fur et à mesure).



1) Exprimons $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

$D = \text{bary}\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$ Avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{-1+2+2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$; alors on a : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}[(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})]$$

$$= \frac{2}{3}[\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}]$$

$$= \frac{2}{3} [2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}]. \text{ Or } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} (2\overrightarrow{AI}) = \frac{4}{3} \overrightarrow{AI}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AD} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AI}$$

2) Déterminons la nature de l'ensemble (E) des points du plan vérifiant :

$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

Pour $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$ (Introduisons le barycentre D)

Pour $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$ (Introduisons l'isobarycentre G) Avec :

$$G = \text{bary}\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1)\} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\sum \alpha_i \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|\sum \alpha_i \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$$

$$\text{Or } D = \text{bary}\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\} \Rightarrow -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\text{Et } G = \text{bary}\{(A, 1) ; (B, 1) ; (C, 1)\} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \|3\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD} + \vec{0}\| = \|3\overrightarrow{MG} + \vec{0}\|$$

$$\Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{MD}\| = 3\|\overrightarrow{MG}\|$$

$$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MG}\|$$

$$\Leftrightarrow MD = MG$$

Alors l'ensemble (E) des points M du plan cherché est la médiatrice du segment [DG]

3) Justifions que (E) contient I et en déduisons sa construction.

$$\text{On a (E) : } \|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

(E) contient I si et seulement si $\|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|$.

$$\Leftrightarrow \|-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}\| = \|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\|.$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}. \text{ Or } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$$

D'où (E) contient I .

12

Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points

$$A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

1) Déterminons puis traçons l'ensemble (Γ) des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du plan tels que le barycentre du système $\{(A, x); (B, y); (C, xy)\}$ n'existe pas.

Le barycentre du système $\{(A, x); (B, y); (C, xy)\}$ n'existe pas si et seulement si :

$$x + y + xy = 0 \Leftrightarrow y(x + 1) + x = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{x+1} \text{ avec } x \neq -1$$

L'ensemble cherché est donc l'équation d'une hyperbole

$$\text{Pour la construction, posons } f(x) = -\frac{x}{x+1}$$

$$Df = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

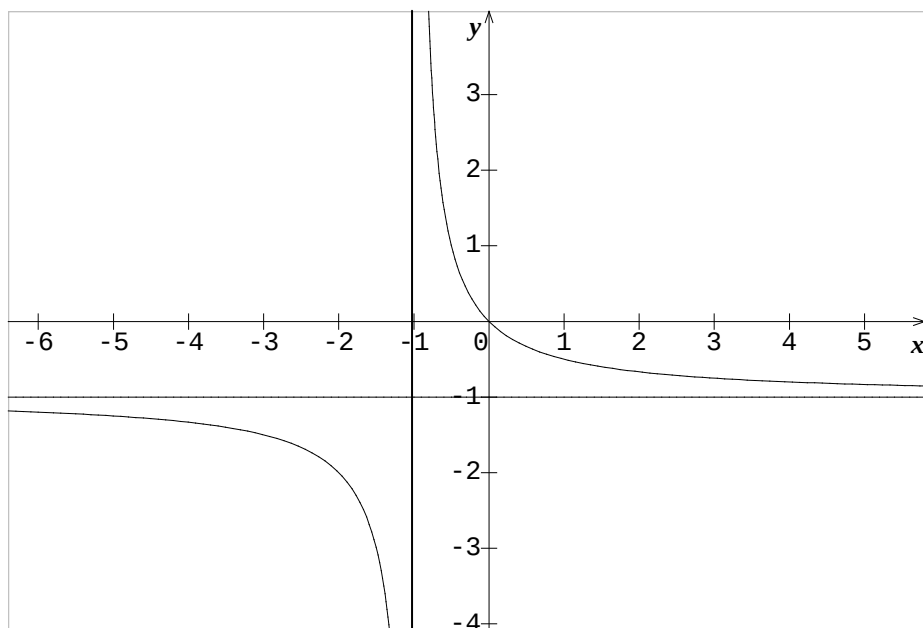
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +} f(x) = -1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow + \quad x \rightarrow -1^- \quad x \rightarrow -1^+$$

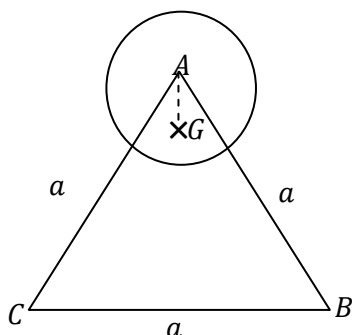
$$f(x) = -\frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	-1	$+\infty$	-1



2) Soit C le point du plan P tel que ABC soit un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}^*$)



a- Déterminons puis construisons le barycentre G des points A ; B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1

$$G = \text{bary}\{(A, 2) ; (B, 1) ; (C, 1)\} \text{ Avec } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2+1+1}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

b- Déterminons l'ensemble (δ) des points M du plan tel que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 = ka^2 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \quad (\text{On discutera suivant les valeurs du paramètre } k)$$

$$\text{Posons } f(M) = 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MG}^2$$

(Les points de pondérations sont égaux à celui du barycentre G).

$$\text{Alors on a : } f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$$

$$\text{Or } \sum \alpha_i MG^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)MG^2 = (2 + 1 + 1)MG^2 = 4MG^2$$

$$\text{Et } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{2AB^2 + 2AC^2 + BC^2}{4}$$

Or ABC est équilatérale de côté $a \Rightarrow AB = AC = BC = a$

$$\Rightarrow f(G) = \frac{2a^2 + 2a^2 + a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{Alors } f(M) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + f(G) = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 + \frac{5a^2}{4} = ka^2 \Leftrightarrow 4MG^2 = \frac{a^2(4k-5)}{4}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{a^2(4k-5)}{16} \Rightarrow MG = \sqrt{\frac{a^2(4k-5)}{16}} = \frac{a}{4} \sqrt{4k-5}$$

- si $k < \frac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est vide.
- si $k = \frac{5}{4}$; alors $MG = 0$. Ainsi l'ensemble (E) des points M cherchés est le point G .
- si $k > \frac{5}{4}$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{a}{4} \sqrt{4k-5}$

c- Construisons cet ensemble si $k = 2$

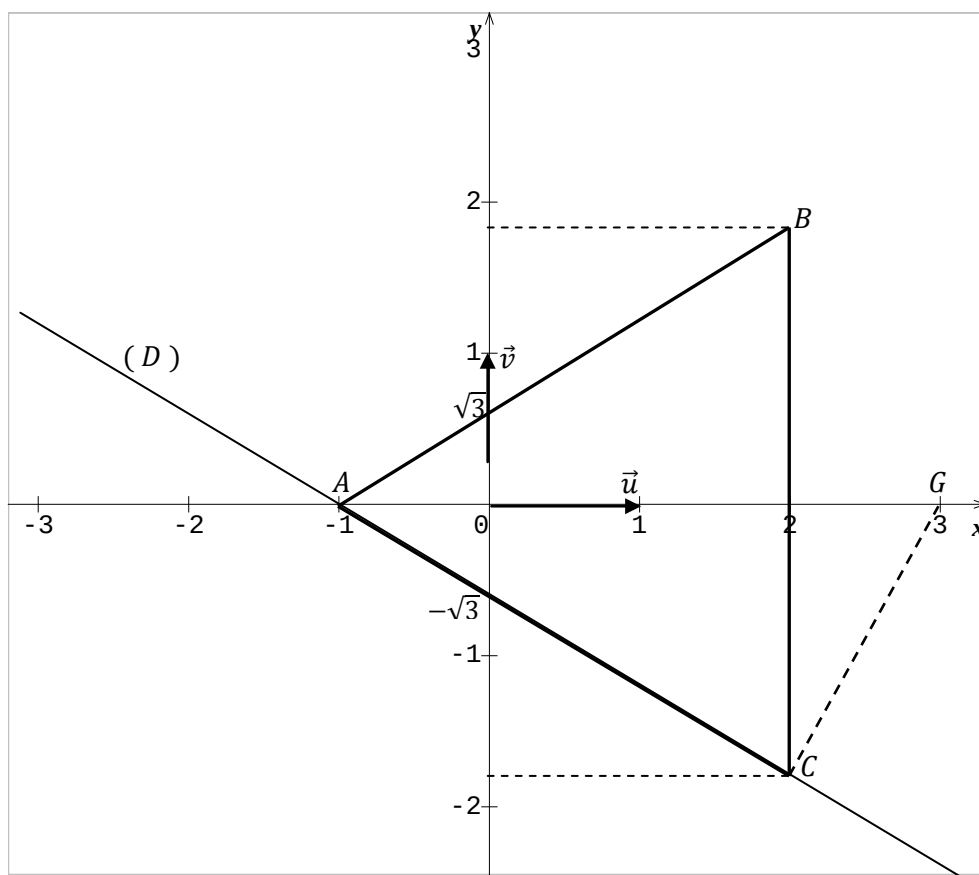
Si $k = 2$; alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{a}{4} \sqrt{3}$

13

1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par

$A; B; C$ et G les points du plan d'affixes respectives : $Z_A = -1$; $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$;
 $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_G = 3$.

a- Réalisons une figure et plaçons les points A ; B ; C et G .



b- Calculons les distances AB ; BC et AC puis en déduisons la nature du triangle ABC .

$$AB = |Z_B - Z_A| = |(2 + i\sqrt{3}) - (-1)| = |2 + i\sqrt{3} + 1| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |Z_C - Z_B| = |(2 - i\sqrt{3}) - (2 + i\sqrt{3})| = |2 - i\sqrt{3} - 2 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

$$AC = |Z_C - Z_A| = |(2 - i\sqrt{3}) - (-1)| = |2 - i\sqrt{3} + 1| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

Puisque $AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$, alors on en déduit que ABC est un triangle équilatéral.

c- Calculons un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}$ puis en déduisons la nature du triangle GAC .

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C} = \frac{(-1) - (2 - i\sqrt{3})}{(3) - (2 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

Puisque $\arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$, alors on en déduit que GAC est un triangle rectangle en C.

2) Soit (D) l'ensemble des points tels que : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})\overrightarrow{CG} = 12$ (1)

a- Montrons que G est le barycentre du système des points pondérés :

$$\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$$

Puis que $\sum \alpha_i = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$. Alors il existe G tel que :

$$G = \text{bary}\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$$

b- Montrons que la relation (1) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2)

On a : $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})\overrightarrow{CG} = 12$ (1) (Introduisons le point G)

$$\Rightarrow [-(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})]\overrightarrow{CG} = 12$$

$$\Rightarrow (-\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC})\overrightarrow{CG} = 12$$

$$\Rightarrow [3\overrightarrow{MG} + (-\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC})]\overrightarrow{CG} = 12. \text{ Or } -\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow -\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$$

D'où $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2) (ce qu'il fallait Démontrer)

c- Vérifions que le point A appartient à l'ensemble (D).

$$\text{On a : } \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \quad (2)$$

Le point A appartient à l'ensemble (D) si et seulement si $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$

$$\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = (-4)(1) + (0)(\sqrt{3}) = -4$$

D'où le point A appartient à l'ensemble (D).

d- Montrons que la relation (2) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$

On a : $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ (2) (Introduisons le point A)

$$\Rightarrow [(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{CG}] = -4$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \quad . \text{ Or } \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$$

$$\Rightarrow -4 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$$

D'où la relation (2) est équivalente à la relation : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ (ce qu'il fallait Démontrer)

e- En déduisons l'ensemble (D) puis le traçons.

Puisque $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$, alors l'ensemble (D) est la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite CG .

Application des isobarycentres

14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on considère les points : $A_1; A_2; A_3; \dots \dots A_n$ dont les affixes sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ avec $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$. On désigne par Z_1 le complexe telque $Z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

1) Exprimons en fonction de Z_1 , les racines de l'équation $Z^n = 1$.

Les racines de l'équation $Z^n = 1$ sont les nombres complexes z_k tels que :

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ Avec } k \in \{1; 2; \dots; (n-1)\}. \text{ Donc :}$$

$$Z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$Z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \cos 2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin 2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 = Z_1^2$$

$$Z_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) = \cos 3\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin 3\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^3 = Z_1^3$$

$$\Rightarrow Z_n = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^n = Z_1^n$$

2) Déterminons l'isobarycentre des points $A_1; A_2; A_3; \dots \dots A_n$.

L'isobarycentre G associé aux points $A_1 ; A_2 ; ; A_3 ; \dots \dots A_n$ est défini par :

$$\{(A_1 ; 1) ; (A_2 ; 1) ; (A_3 ; 1) \dots \dots (A_n ; 1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \dots \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

En introduisant le point A_1 , on a :

$$\overrightarrow{GA_1} + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + \dots + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_n} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$n\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_1A_n} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$n\overrightarrow{GA_1} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$-n\overrightarrow{A_1G} = -(\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$n\overrightarrow{A_1G} = (\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_1A_n})$$

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que :

$$\|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \dots + \overrightarrow{MA_n}\| = n$$

$$\text{On a } \|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \dots + \overrightarrow{MA_n}\| = n \Leftrightarrow$$

$$\|\sum \alpha_n \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \dots \overrightarrow{GA_n}\| = n \Leftrightarrow$$

$$\|\sum \alpha_n \overrightarrow{MG} + \vec{0}\| = n \Leftrightarrow (\text{Car } \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \dots \overrightarrow{GA_n} = \vec{0})$$

$$\|n\overrightarrow{MG}\| = n \Leftrightarrow n\|\overrightarrow{MG}\| = n \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = 1 \Leftrightarrow MG = 1.$$

Alors l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 1$.

15 Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$; on considère le polynôme p telque : $p(Z) = Z^3 - (3 + 4i)Z - 2 + 8i$

1) Montrons que l'équation $p(Z) = 0$ admet une solution réelle Z_0 que je déterminerai.

$$\text{Soit } Z_0 = a \text{ cette solution réelle telque } a^3 - (3 + 4i)a - 2 + 8i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a^3 - 3a - 2) + i(8 - 4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3a - 2 = 0 & (1) \\ 8 - 4a = 0 & (2) \end{cases}$$

En résolvant l'équation (2), on a : $a = 2$. D'où $Z_0 = 2$ est la solution réelle.

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$. On désignera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive.

$$p(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z_0 - 2)(Z_1 + 1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(Z_1 + 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow Z_0 = 2 \text{ ou } Z_1 = -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ ou } Z_2 = -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S = \{2; -1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}; -1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$$

3) Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points G_0 ; A et B tels que :

$G_0 \rightarrow Z_0$; $A \rightarrow Z_1$ et $B \rightarrow Z_2$ et soit G_n l'isobarycentre des points A ; B et G_{n-1} tel que $G_n = \{(A; 1); (B; 1); (G_{n-1}; 1)\}$

a- Déterminons l'affixe de G_1 .

$$G_n = \{(A; 1); (B; 1); (G_{n-1}; 1)\} \Rightarrow G_1 = \{(A; 1); (B; 1); (G_0; 1)\}$$

$$\Rightarrow Z_{G_1} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_0}{1+1+1} = \frac{(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}) + (-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}) + 2}{1+1+1} = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'affixe du point G_1 est l'origine du repère.

b- Soit Z_n l'affixe de G_n .

Exprimons Z_n en fonction de Z_{n-1} .

$$\text{Si } Z_n \text{ l'affixe de } G_n = \{(A; 1); (B; 1); (G_{n-1}; 1)\} \text{ alors } Z_n = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_{n-1}}{1+1+1}$$

$$\Rightarrow Z_n = \frac{(-1+\sqrt{2}+i\sqrt{2}) + (-1-\sqrt{2}-i\sqrt{2}) + Z_{n-1}}{1+1+1} = \frac{-2 + Z_{n-1}}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}Z_{n-1}$$

6) On pose $U_n = Z_n + 1$.

a- Déterminons la nature de la suite U_n

$$U_n = Z_n + 1 \Rightarrow U_n = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}Z_{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}Z_{n-1}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{3}(1 + Z_{n-1}) \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + Z_n) = \frac{1}{3}U_n$$

D'où U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = Z_0 + 1 = 3$

b- Etudions la convergence de la suite U_n .

Pour étudier la convergence de la suite U_n , exprimons U_n en fonction de n .

Puisque U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $U_0 = 3$ alors son expression en fonction de n est : $U_n = U_0(q)^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad (q < 1)$$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

Par conséquent U_n est une suite convergente et converge vers 0.