

I- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés, tout ensemble du type : $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$ où les A_i sont les points d'un espace affine et les α_i sont des nombres réels appelés coefficients de pondération.

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0)$

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre de deux points pondérés tout ensemble du type : $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2)\}$ et

l'unique point G s'il existe tel que : $\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En fixant A on a :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \overrightarrow{GA} = -\alpha_2 \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \overrightarrow{AB}$$

Avec $(\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0)$

Ainsi si G est le barycentre de $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2)\}$; Alors A ; B et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ dans la graduation de repère $(A; B)$.

3) Barycentre de trois points pondérés

On appelle barycentre de trois points pondérés tout ensemble du type

$\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3)\}$ et l'unique point G s'il existe tel que :

$\alpha_1 \overrightarrow{GA} + \alpha_2 \overrightarrow{GB} + \alpha_3 \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. En fixant A on a :

$$\alpha_1 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \alpha_2 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \alpha_3 (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{AC} \quad \text{Avec } (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0)$$

4) Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$

Soit le système $G = \text{bary}\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3)\}$ tel que : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$

Les coordonnées du barycentre G affecté à ce système est:
$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha_1 x_A + \alpha_2 x_B + \alpha_3 x_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \text{et} \\ y_G = \frac{\alpha_1 y_A + \alpha_2 y_B + \alpha_3 y_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$$

D'une manière générale si A ; B et C sont trois points d'affixes respectives Z_A ; Z_B ; Z_C et si G est le barycentre d'affixe Z_G tel que $Z_G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\}$, alors on a :

$$Z_G = \frac{\alpha_1 Z_A + \alpha_2 Z_B + \alpha_3 Z_C}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

Propriété 1 : Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés. C'est-à-dire :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_2) ; (B ; \alpha_1) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(C ; \alpha_3) ; (B ; \alpha_2) ; (A ; \alpha_1)\}$$

Propriété 2 : Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

C'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{R}^*$ On a :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; k\alpha_1) ; (B ; k\alpha_2) ; (C ; k\alpha_3)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \left\{ \left(A ; \frac{\alpha_1}{k} \right) ; \left(B ; \frac{\alpha_2}{k} \right) ; \left(C ; \frac{\alpha_3}{k} \right) \right\}$$

Propriété 3 : Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

C'est-à-dire :

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (B ; \alpha_2) ; (C ; \alpha_3) ; (D ; \alpha_4)\} \Leftrightarrow$$

$$G = \text{bary}\{(A ; \alpha_1) ; (G' ; \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\}$$

6) Isobarycentre

Tout barycentre G d'un système du type : $\{(A; \alpha); (B; \alpha); (C; \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$ est appelé **isobarycentre**.

NB : Dans le cas de l'**isobarycentre**, le point G est toujours le **centre de gravité du triangle ABC** .

II- Fonction vectorielle et scalaire de Leibniz

1) Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle fonction vectorielle de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{MA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}.$$

NB : Pour tout point $M \in E$ tel que $G = \text{bary}\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$
on a : $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MG}) + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} + f(G)$ avec

$$f(G) = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n}$$

2) Fonction scalaire ou numérique de Leibniz

On appelle fonction scalaire de Leibniz, toute fonction f définie de E vers V par :

$$f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \alpha_3 MA_3^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$

NB : Pour tout point $M \in E$ tel que $G = \text{bary}\{(A_1; \alpha_1); (A_2; \alpha_2); (A_3; \alpha_3); \dots; (A_n; \alpha_n)\}$
on a : $f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 + f(G) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) MG^2 + f(G)$.

Ainsi pour le barycentre G de 3 points pondérés $\{(A; \alpha_1); (B; \alpha_2); (C; \alpha_3); (D; \alpha_4)\}$,

$$\text{On a : } f(G) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2)AB^2 + (\alpha_1 \alpha_3)AC^2 + (\alpha_2 \alpha_3)BC^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

III- Barycentre et ensemble des points

1) Cercle de centre G et de rayon k

Pour un cercle de centre G et de rayon k , on a : $\overrightarrow{MG} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

NB :

- Si $k = 0$, alors l'ensemble cherché est le singleton G .
- Si $k < 0$, alors l'ensemble cherché est vide.

2) Cercle de diamètre $[AB]$

Pour un cercle de diamètre $[AB]$, on a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

3) Médiatrice du segment $[AB]$

Pour la médiatrice du segment $[AB]$, on a : $MA = MB$

4) Parallélisme à la droite (AB) et passant par un point C .

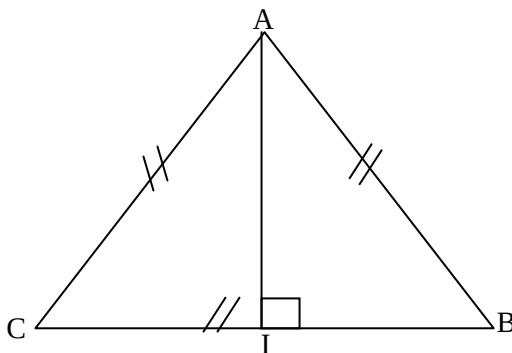
Pour la parallèle à la droite (AB) et passant par un point C , on a : $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AB}$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

5) Perpendicularité à la droite (AB) et passant par un point C .

Pour la perpendiculaire à la droite (AB) et passant par un point C , on a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}_+^*$)

IV- Lois de la médiane dans un triangle :

1) Triangle équilatéral



$$AB = AC = BC \quad \text{et} \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

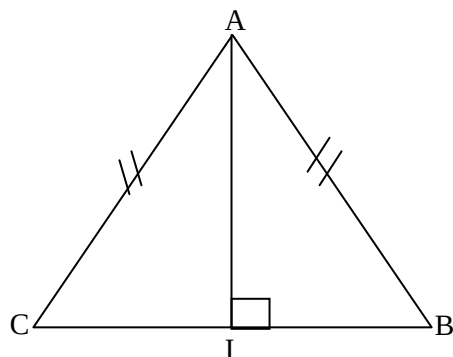
I Milieu de $[BC]$

AI Médiane de $[BC]$

$$\text{On a : } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

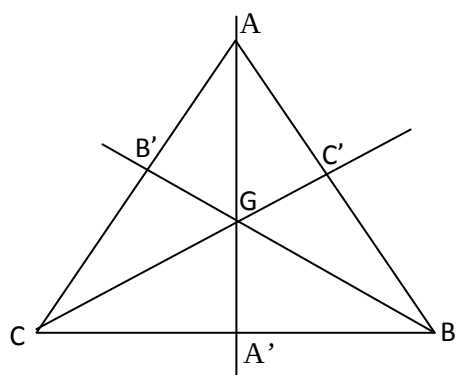
2) Triangle isocèle en A

$$AB = AC \quad \text{et} \quad \hat{B} = \hat{C}$$

I Milieu de $[BC]$ AI Médiatrice de $[BC]$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

3) Médiane d'un triangle quelconque A' Milieu de $[BC]$ B' Milieu de $[AC]$ C' Milieu de $[AB]$

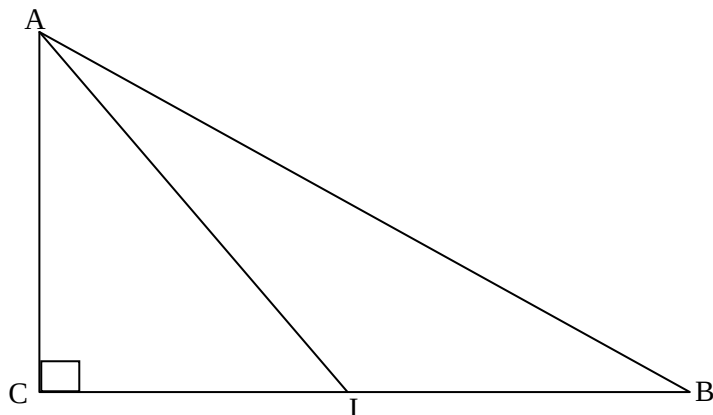
G centre de gravité du triangle ABC

$$\text{On a : } AG = \frac{2}{3}AA' \quad ; \quad BG = \frac{2}{3}BB' \quad ; \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

NB : Pour un triangle isocèle, on a $AG = \frac{3}{4}AA'$

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}$$