

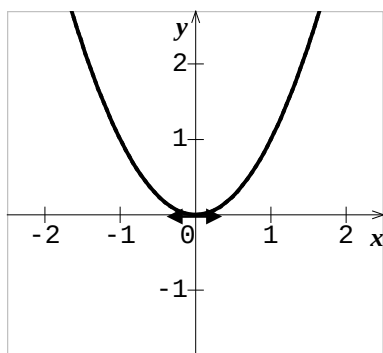
I- Définition par foyer et par direction

Soit (D) une droite, F un point n'appartenant pas à (D) et e un nombre réel strictement positif.

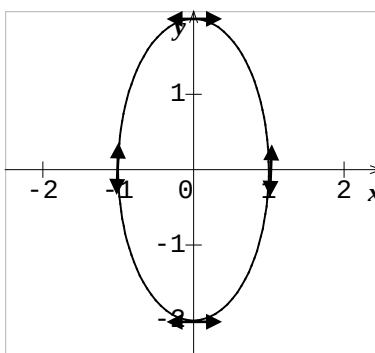
On appelle **conique** de foyer F , de direction (D) et d'excentricité e , l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D) .

NB :

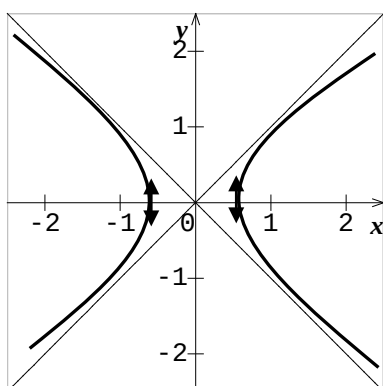
- Si $e = 1$, alors l'ensemble (Γ) des points est une **parabole**.
- Si $0 < e < 1$, alors l'ensemble (Γ) des points est une **ellipse**.
- Si $e > 1$, alors l'ensemble (Γ) des points est une **hyperbole**.



Parabole.



Ellipse.



Hyperbole.

II- Etude des différents cas de conique:

1) Les Paraboles:

a- Etude du cas : $ax^2 + 2cx + 2dy + e = 0$

- Equation réduite : $y = \frac{-a}{2d} \left[\left(x + \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{c^2 - ae}{a^2} \right]$ en posant $k = \frac{-a}{2d}$, on a :

$$y = k \left[\left(x + \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{c^2 - ae}{a^2} \right]$$

- Eléments caractéristiques :

- Sommet : $S \left(-\frac{c}{a} ; \frac{c^2 - ae}{a^2} \right)$

- Axe de symétrie : $x = -\frac{c}{a}$

NB :

- Si $k < 0$, alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le bas.
- Si $k > 0$, alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le haut.

b- Etude du cas : $by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$

- Equation réduite : $x = \frac{-b}{2c} \left[\left(y + \frac{d}{b} \right)^2 - \frac{d^2 - be}{b^2} \right]$ en posant $k = \frac{-b}{2c}$, on a :

$$x = k \left[\left(y + \frac{d}{b} \right)^2 - \frac{d^2 - be}{b^2} \right]$$

- Eléments caractéristiques :

- Sommet : $S \left(\frac{d^2 - be}{b^2} ; -\frac{d}{b} \right)$

- Axe de symétrie : $y = -\frac{d}{b}$

NB :

- Si $k < 0$, alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers la gauche.
- Si $k > 0$, alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers la droite.

2) Les ellipses :

- **Equation cartésienne** : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$
 - **Equation cartésienne réduite** : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x + \frac{C}{2A} \\ Y = y + \frac{D}{2B} \end{cases}$
- a- **1^{er} Cas** : (Si $a > b$)

L'ellipse est portée par l'axe ($x'\Omega x$).

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Foyers : $F(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ et $F'(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

Directrices : $(D) : X = \frac{a}{e}$ et $(D') : X' = -\frac{a}{e}$

Sommets : $A(a; 0); A'(-a; 0); B(0; b); B'(0; -b)$

b- **2^e Cas** : ($a < b$)

L'ellipse est portée par l'axe ($y'\Omega y$).

Ainsi les éléments caractéristiques sont :

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Foyers : $F(0; \sqrt{b^2 - a^2})$ et $F'(0; -\sqrt{b^2 - a^2})$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

Directrices : $(D) : y = \frac{b}{e}$ et $(D') : y' = -\frac{b}{e}$

Sommets : $A(a, 0); A'(-a; 0); B(0; b); B'(0; -b)$

3) Les Hyperboles

Equation cartésienne : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation cartésienne réduite : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ou $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x + \frac{C}{2A} \\ Y = y + \frac{D}{2B} \end{cases}$

a- **1^{er} Cas** : Pour l'équation : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Eléments caractéristiques:

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Foyers : $F(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$ et $F'(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Asymptotes : $(D) : Y = \frac{b}{a}X$; $(D') : Y' = -\frac{b}{a}X$

Sommets : $A(a; 0)$; $A'(-a; 0)$

b- **2^{ème} Cas** : Pour l'équation : $-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Les éléments caractéristiques dans ce cas sont :

Centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

Foyers : $F(0; \sqrt{a^2 + b^2})$ et $F'(0; -\sqrt{a^2 + b^2})$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Asymptotes : $(D) : X = \frac{a}{b}Y$; $(D') : X' = -\frac{a}{b}Y$

Sommets : $B(0; b)$; $B'(0; -b)$

4) Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

Soient F et F' deux points distincts tels que $FF' = 2c$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$) et soit a un nombre réel.

- Si $a > c$ alors l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est l'**ellipse** de foyers : F et F' dont la distance des sommets de l'axe focal est $2a$.

NB : FF' est appelé : **distance focale**.

- Si $0 < a < c$ alors l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est l'**hyperbole** de foyers : F et F' dont la distance des sommets de l'axe focal est $2a$.

5) Equation de la tangente en un point de l'ellipse et de l'hyperbole

a- Ellipse :

L'équation de la tangente (T) en un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est :

$$(T): \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

b- Hyperbole :

L'équation de la tangente (T) en un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est :

$$(T): \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$