

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I- Généralité

### 1) Définition:

On appelle équation différentielle toute équation où interviennent une variable, une fonction de cette variable et une ou plusieurs dérivées successives de cette fonction.

Exemple :  $f(x) + 2f'(x) = 0$

$$y + 2y' = 0$$

$$y'' + y' = y$$

$$3f'(x) - 4f(x) = 5$$

La fonction  $f$  est notée des fois par  $y$  donc on peut écrire  $f' = y'$ ;  $f'' = y''$

Si une équation différentielle ne comporte que  $y$  et la dérivée première on dit qu'elle est d'ordre 1. Par contre s'il y a la dérivée seconde elle est dite d'ordre 2.

### 2) Exemple :

-  $y' = 2y$  est une équation différentielle d'ordre 1

$y'' = 2x^2 - 3x + 1$  est une équation différentielle d'ordre 2

$y'' - y' - 3y = 0$  est une équation différentielle d'ordre 2

## II- Résolution d'équation différentielle

Résoudre une équation différentielle revient à intégrer cette équation

### 1) Equation différentielle d'ordre 1

#### a) Equation de type $y' = f(x)$

Pour résoudre une équation différentielle de ce type il suffit de trouver la forme générale des primitives de  $f$  et, toute primitive de  $f$  est une solution particulière de l'équation différentielle.

Exemple : Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y' = 3x^2 + 2x - 4$$

$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x+3} - \sin 3x$$

#### b) Equation de type $y' = ay$ ( $a \in \mathbb{R}$ )

Toute équation différentielle de type  $y' = ay$  à pour solution générale  $y = k e^{ax}$  où  $k$  est une constante réelle

Exemple : Résoudre les équations suivantes

$$y' = 2y$$

$$y' = 3y \quad \text{avec } y(1) = 2$$

$$y' = \frac{5}{4}y \quad \text{avec } y(0) = 5$$

2) Equation différentielle d'ordre 2

a) Equation différentielle de type  $y'' = f(x)$

Pour résoudre une équation différentielle de ce type il suffit de faire une double intégration de la fonction

Exemple : Résoudre l'équation différentielle suivante  $y'' = x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

b) Equation différentielle de type  $y'' = \omega^2 y$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ )

Pour résoudre cette équation il suffit de trouver les solutions  $y = k_1 e^{\omega x} + k_2 e^{-\omega x}$

Exemple : Résoudre  $y'' - 9y = 0$  et  $y'' - 4y = 0$

c) Equation différentielle de type  $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de cette équation sont :  $y = k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x$  où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes réelles

Exemple : Trouver la fonction  $f$  de l'équation différentielle et vérifiant les conditions initiales suivantes données :  $y'' + 2y = 0$  avec  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \sqrt{2}$

d) Equation différentielle de type  $ay'' + by' + cy = 0$   
ou  $a, b$  et  $c$  sont des réels

Pour résoudre une équation différentielle de type  $ay'' + by' + cy = 0$ , on résout d'abord l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle  $ar^2 + br + c = 0$ . On a :

- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$  d'où la solution générale de l'équation différentielle est :  $y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$  où  $r_1$  et  $r_2$  sont des constantes réelles
- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation caractéristique admet une unique solution double  $r$  d'où la solution générale de l'équation différentielle est :  $y = (k_1 x + k_2) e^{rx}$

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a};$$

$$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{ainsi la solution générale est : } y = (k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x) e^{\frac{-b}{2a}x} \text{ avec}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple : Trouver la fonction  $f$  solution de l'équation différentielle et vérifiant les conditions initiales dans chacun des cas suivants :

- 1)  $y'' - 4y' + 3y = 0$  avec  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$
- 2)  $y'' + 2y' + 5y = 0$  avec  $f(0) = 5$  et  $f'(0) = -11$
- 3)  $y'' - 2y' + y = 0$  avec  $f(0) = 2$  et  $f'(0) = -2$
- 4)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  avec  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  et  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$