

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES :

I. Généralités :

1) - Définitions 1 : On appelle équation différentielle toute relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives. La fonction inconnue est souvent notée y et ses dérivées successives : y' ; y'' ; y''' ; ...; y^n . On a $y = f(x)$ est la fonction inconnue.

NB : on parle d'équations différentielles d'ordre 1; 2; 3; ...ou d'ordre n selon le cas :

Exemples :

- $y' + y - x = 0$ est une équation différentielle du 1^{er} ordre ou d'ordre 1.
- $2f'' + f = 0$ est une équation différentielle du 2^{ème} ordre.
- $y'' + 2y' - y - 2x + 5 = 0$ est une équation différentielle du 2^{ème} ordre.
- $Y''' - x^2 = 0$ est une équation différentielle du 3^{ème} ordre.

2) - Solutions d'une équation différentielle :

- **Définition 2 :** Etant donnée une équation différentielle d'ordre n , on appelle solution de cette équation différentielle toute fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; n fois dérivable sur I et vérifiant l'équation différentielle donnée pour tout $x \in I$.

- **Définition 2 :** on appelle solution en intégrale d'une équation différentielle toute fonction $f(x) = y$ vérifiant identiquement l'équation.

II. Equation différentielle de type $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$:

- **Exemple :** Soit les équations différentielles : $y' = 6x + 2$; $y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$; $y'' = 1$; $x^3 y' + x^2 + 1 = 0$;

$$y'' = 1 + \tan^2 x; \quad 2y'' + e^x - e^{-2x} = 0; \quad y' - \frac{1}{x} = 0 \text{ et } y'' = \frac{1}{x}.$$

III. Équations différentielles linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants sans

second membre :

1) - Définition 3 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $(E_1): ay' + by = 0$. $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

2) - Solutions de $(E_1): ay' + by = 0$:

Théorème1 : la solution générale $(S. G)$ sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est : $y = k e^{-\frac{b}{a}x}$; $k \in \mathbb{R}$.

- **Exemple :** $y' - 2y = 0$; $2y' = y$; $3y - 2y = 0$; $-2y' = \sqrt{2}y$ et $y' - (\ln 2)y = 0$.

Théorème2 : (E_1) admet une solution unique f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition $f(x_0) = y_0$.

Exemple1 : $y' - y = 0$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Exemple2 : soit $(E): y' - 3y = 0$.

- 1) Résoudre (E) .
- 2) Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $I(0; 2)$.
- 3) Déterminer la solution de (E) dont la courbe admet au point J d'abscisse 2 une tangente de coefficient directeur -2 .

IV. Équations différentielles linéaire du second ordre à coefficients

constants sans 2^{ème} membre :

1) Définition 4 : C'est toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$(E_2): ay'' + by' + cy = 0$. $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

2) Résolution de (E_2) :

a) **Définition 5** : On appelle équation caractéristique associé à (E_2) l'équation d'inconnue r réel ou complexe :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

b) **Théorème3 (admis)** :

Si l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ admet	Alors les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
2 racines réelles distinctes : r_1 et r_2 ; $(\Delta > 0)$	$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
1 racine double réelle : r_0 ; $(\Delta = 0)$	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$
2 racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$; $(\Delta < 0)$	$f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$; $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

c) **Théorème4** : (E_2) admet une solution unique f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.
(La condition de cauchy).

Exemples1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_1): y'' - 3y' - 4y = 0; \quad (E_2): y'' - 4y' + 4y = 0; \quad (E_3): y'' + y' + y = 0; \quad (E_4): 2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0;$$

$$(E_5): \frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0; \quad (E_6): 2y'' + 3y' = 0; \quad (E_7): 3y'' - y = 0; \quad (E_8): y'' + y = 0.$$

Exemples2 : Déterminer pour les équations différentielles suivantes la fonction f vérifiant :

$$(E_1): y'' + y' - 6y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = -8.$$

$$(E_2): y'' + 6y' + 9y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 4 \text{ et } f'(0) = 1.$$

$$(E_3): y'' - 6y' + 13y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 3 \text{ et } f'(0) = 5.$$

$$(E_4): 2y'' + 5y' + 3y = 0 \text{ Sachant que } f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = 3.$$

$$(E_5): 9y'' + 64y = 0 \text{ Sachant que } f(\pi) = 0 \text{ et } f'(2\pi) = \frac{1}{3}.$$

$$(E_6): y'' + \pi^2 y = 0 \text{ Sachant que } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0$$

Equations différentielles de la forme $(y'' + w^2y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

Résolution :

La solution de telles équations est de la forme:

$$S = A\cos(wt + \varphi). \text{ où } A \text{ et } \varphi \text{ sont deux nombres réels quelconques.}$$

Où $S = A\cos wx + B\sin wx$

Equations différentielles de la forme ($y'' - w^2y = 0$)

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour résoudre une application concrète.

Résolution :

La solution de telles équation est de la forme : $S = ae^{wt} + be^{-wt}$

Exemple :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 9y = 0$; b) $4y'' - 9y = 0$; c) $y'' + 5y = 0$

Solution

a) $y'' + 9y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 9 \Rightarrow \omega = 3 \Rightarrow S = A\cos 3x + B\sin 3x$

b) $4y'' - 9y = 0 \Leftrightarrow y'' - \frac{9}{4}y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \Rightarrow S = ae^{\frac{3}{2}x} + be^{-\frac{3}{2}x}$

c) $y'' + 5y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5} \Rightarrow S = A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x$

Exercice :

A. On considère l'équation différentielle $(E_1): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -3x + 4$ où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = ax + b$ soit solution de (E_1) .

2) Démontrer que la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction $h = f - g$ est solution de l'équation différentielle : $(E_2): h'' - 2h' + h = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle (E_2) et en déduire les solutions de (E_1) .

4) Déterminer la solution particulière φ de (E_1) telle que $\varphi(0) = -1$ et $\varphi'(0) = 0$

B. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = (2x + 1)e^x - (3x + 2)$.

1) a) Déterminer les limites de P en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que $(\Delta): y = -3x - 2$ est A.O à (C) de P .

c) Etudier la position relative de (Δ) par rapport à (C) .

2) a) Etudier les variations de P .

b) Tracer (C) et (Δ) dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.

3) On note (D) la partie de plan limitée par (C) ; (Δ) et les droites $x = \lambda$ et $x = -\frac{1}{2}$ où $\lambda < -\frac{1}{2}$.

a) Mettre en évidence la partie (D) sur le graphique.

b) Calculer $\int_{\lambda}^{-\frac{1}{2}} -(2x + 1)e^x dx$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

c) Exprimer en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de (D) en cm^2 .

d) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.