

I- Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable x . Leur résolution consiste à Déterminer toutes les fonctions solutions.

II- Différents types d'équations différentielles

1) Equations différentielles du 1^{er} ordre ($y' - ay = 0$)

a) Définition :

f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la relation $f'(x) - a f(x) = 0$; où f est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée $y' - ay = 0$.

b) Résolution :

Les solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les solutions f_k qui à tout nombre réel x , associent $f_k(x) = k e^{ax}$, où k est un nombre réel quelconque.

Ainsi l'ensemble solution est : $S = \{ k e^{ax} \}$

2) Equations différentielles du 2^{ème} ordre :

a) Cas particulier : (Equation du 2^{ème} ordre de la forme $y'' + A(x) = 0$)

Avec $A(x)$ est une fonction quelconque.

Ce type d'équation différentielle contient uniquement la variable x et la dérivée seconde de la fonction à chercher. Résoudre ce type d'équation différentielle revient donc, dans un premier temps, à chercher y' puis chercher y en intégration successive de y'' .

b) Equation différentielle de la forme: ($ay'' + by' + cy = 0$)

Pour résoudre de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi on calcule le discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta > 0$ on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad S = f(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad \text{Avec } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta = 0$, on a une solution double r_0 tel que : $r_0 = \frac{-b}{2a}$ et

$$S = f(x) = (k_1 x + k_2) e^{r_0 x} \quad \text{Avec } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha + i\beta$$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

et $S = f(x) = (k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$ Avec k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) Equations différentielles de la forme ($y'' + w^2 y = 0$)

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

Résolution :

La solution de telles équations est de la forme : $S = f(x) = k_1 \cos wx + k_2 \sin wx$

Avec k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

d) Equations différentielles de la forme ($y'' - w^2 y = 0$)

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour Résous une application concrète.

Résolution :

La solution de telles équation est de la forme : $S = f(x) = k_1 e^{wx} + k_2 e^{-wx}$

Avec k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

Exercices

Equations différentielles sans second membre.

1 Résous les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 9y = 0$; 3) $y' - 2y = 0$

4) $y'' + 2y' + 2y = 0$; 5) $4y'' + 5y = 0$; 6) $7y' + 4y = 0$

7) $9y'' - 24y' + 16y = 0$; 8) $4y'' - \sin x + e^{-2x} = 0$; 9) $2xy + y'x^2 - e^x = 0$

2 Vérifie que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$