

Chapitre 10

Équations différentielles

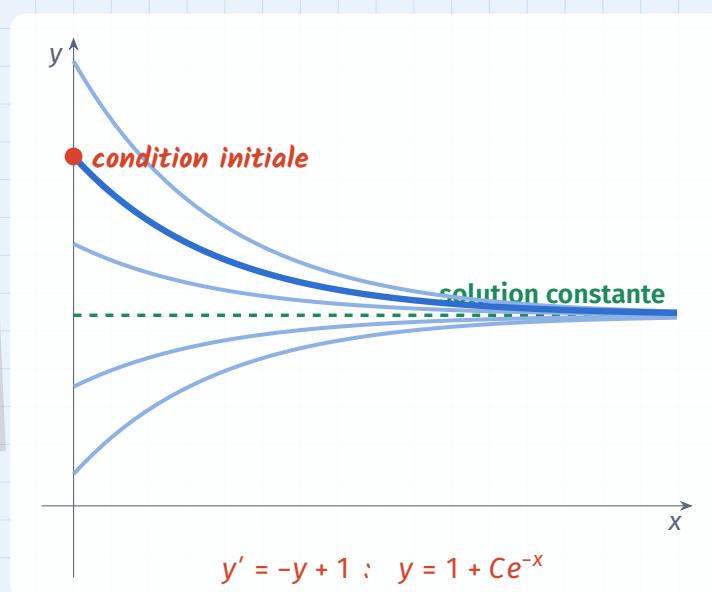
Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

$$y'' + ay' + by = 0 : r^2 + ar + b = 0$$
$$\Delta < 0 : y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

Défi de concours

$$f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}, f'(x) = f(-x), f(0) = 1 : f = ?$$



★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1 Généralités	6
2 L'équation $y' = ay$	7
3 L'équation $y' = ay + b$	8
4 Second membre et superposition	9
5 L'équation $y'' + ay' + by = 0$	10
6 Les trois cas en pratique	11
6.1 Allure des solutions dans les trois cas	12
7 Conditions initiales	12
8 Se ramener à une équation connue	13
9 Équations fonctionnelles	15
10 Modélisation	15
10.1 Refroidissement : la loi de Newton	15
10.2 Radioactivité	16
10.3 Circuits RC et RL	16
10.4 Oscillateur harmonique	16
10.5 Populations	17
11 Pour aller plus loin	17
11.1 Excitation sinusoïdale et résonance	17
11.2 L'équation d'Euler $x^2y'' + axy' + by = 0$	18
12 Les pièges classiques	18
13 Les astuces des concours	19
14 L'essentiel du chapitre en une page	21
15 Niveau 1 · Bases	22
16 Niveau 2 · Bac	23
17 Niveau 3 · Approfondissement	25
18 Niveau 4 · Concours	26

19 Premier ordre $y' = ay + b$	28
20 Se ramener à une équation connue	30
21 Second ordre homogène	32
22 Équations fonctionnelles	34
23 Modélisation	36
24 Défis de concours	38
25 Corrigés du niveau 1	41
26 Corrigés du niveau 2	43
27 Corrigés du niveau 3	47
28 Corrigés du niveau 4	49
29 Corrigés : premier ordre $y' = ay + b$	52
30 Corrigés : se ramener au connu	55
31 Corrigés : second ordre homogène	58
32 Corrigés : équations fonctionnelles	61
33 Corrigés : modélisation	65
34 Corrigés : défis de concours	68

Comment utiliser ce livret**Les 4 niveaux d'exercices****Niveau 1 · Bases ★**

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours ★** : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Premier ordre $y' = ay + b$, Se ramener à une équation connue, Second ordre homogène, Équations fonctionnelles, Modélisation, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|--|
| ☐ vérifier qu'une fonction est solution ; | ☐ résoudre $y'' + ay' + by = 0$; |
| ☐ démontrer le théorème de $y' = ay$; | ☐ utiliser $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$; |
| ☐ résoudre $y' = ay + b$, condition initiale ; | ☐ passer à la forme $R \cos(\beta x - \varphi)$; |
| ☐ étudier un faisceau (équilibre, limites) ; | ☐ poser $z = y - p$, $z = \frac{1}{y}$, $x = e^t \dots$; |
| ☐ trouver une solution particulière ; | ☐ résoudre une équation fonctionnelle ; |
| ☐ utiliser le principe de superposition ; | ☐ modéliser (Newton, radioactivité, RC) ; |
| ☐ démontrer le théorème des trois cas ; | ☐ étudier un oscillateur et la résonance. |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Généralités

Définition : équation différentielle, solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle d'ordre n** est une relation entre une fonction inconnue y de la variable réelle x , ses dérivées $y', \dots, y^{(n)}$ (la dérivée $y^{(n)}$ y figurant) et la variable x .

- Une **solution** sur un **intervalle** I est une fonction f , n fois dérivable sur I , qui vérifie la relation **pour tout** $x \in I$ quand on remplace $y, y', \dots$ par $f(x), f'(x), \dots$
- **Résoudre** l'équation sur I , c'est trouver **toutes** ses solutions sur I ; leurs courbes sont les **courbes intégrales**.
- Ce chapitre étudie surtout les équations **linéaires à coefficients constants** $y' = ay + g(x)$ et $y'' + ay' + by = g(x)$ (a, b réels, g continue); pour $g = 0$, on obtient l'**équation homogène associée**. Sauf mention contraire, $I = \mathbb{R}$.

Lecture géométrique. Pour une équation $y' = F(x, y)$, la tangente en un point $M(x_0, y_0)$ d'une courbe intégrale a pour coefficient directeur $F(x_0, y_0)$, qui ne dépend que de M : on peut dessiner en chaque point du plan un petit segment de cette pente (le **champ de pentes**); les courbes intégrales sont tangentes, en chacun de leurs points, au segment qui y est tracé.

Méthode : vérifier qu'une fonction est solution

Calculer f' (et f''), remplacer dans l'équation et simplifier; on ne conclut que si l'égalité a lieu **pour tout** x de l'intervalle. Pour prouver que f **n'est pas** solution, un seul x suffit.

Exemple : deux vérifications

- (E_1) : $y'' + 2y' - 8y = 0$ et $f(x) = 2e^{2x} - e^{-4x}$: $f'(x) = 4e^{2x} + 4e^{-4x}$, $f''(x) = 8e^{2x} - 16e^{-4x}$, donc $f'' + 2f' - 8f = (8 + 8 - 16)e^{2x} + (-16 + 8 + 8)e^{-4x} = 0$: f est solution sur $\mathbb{R}$ (on la retrouvera en section 7).
- (E_2) : $y' = 1 + y^2$: $\tan' = 1 + \tan^2$, donc $\tan$ est solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En revanche $g(x) = x$ n'est solution sur aucun intervalle : $g'(x) = 1 \neq 1 + x^2$ dès que $x \neq 0$.

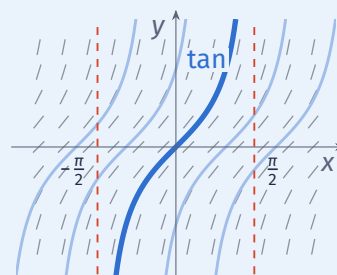
Attention, piège ! Toujours un intervalle

Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est **pas** un intervalle, l'équation $y' = 0$ a pour solutions les fonctions égales à une constante C_1 sur $]-\infty, 0[$ et à une constante C_2 sur $]0, +\infty[$ (par exemple $x \mapsto \frac{|x|}{x}$), et pas seulement les constantes : le théorème « $f' = 0 \Rightarrow f$ constante » exige un intervalle. On précise toujours l'intervalle de résolution.

Toutes les solutions de $y' = 1 + y^2$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \mapsto \tan(x - c)$, sur un intervalle **inclus** dans $]c - \frac{\pi}{2}, c + \frac{\pi}{2}[$ ($c \in \mathbb{R}$). En particulier, (E_2) n'a **aucune** solution sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si f est solution sur un intervalle I , alors $(\arctan \circ f)' = \frac{f'}{1+f^2} = 1$ sur I : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan f(x) = x - c$ pour tout $x \in I$. Comme $\arctan$ prend ses valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $x - c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $x \in I$, et $f(x) = \tan(x - c)$. Réciproquement, $(\tan(x - c))' = 1 + \tan^2(x - c)$. Une solution ne vit donc que sur un intervalle de longueur au plus π , alors que l'équation a un sens pour tout réel x .



champ de pentes de $y' = 1 + y^2$: les courbes intégrales sont les translatées horizontales de celle de $\tan$, et elles ne se coupent pas

2

L'équation $y' = ay$ **Théorème**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et I un intervalle. Les solutions sur I de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C e^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Ce sont des solutions : $(C e^{ax})' = a C e^{ax}$. **Ce sont les seules :** soit f une solution sur I . La fonction $z(x) = f(x) e^{-ax}$ est dérivable sur I et

$$z'(x) = f'(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} = (f'(x) - a f(x)) e^{-ax} = 0.$$

Comme I est un **intervalle**, z est constante : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) e^{-ax} = C$, soit $f(x) = C e^{ax}$ pour tout $x \in I$.

Remarque. On n'écrit **pas** « $\frac{f'}{f} = a$, donc $\ln |f| = ax + k$ » : rien ne dit *a priori* que f ne s'annule pas. Le facteur e^{-ax} évite cette division. Pour $a = 1$: $\exp$ est l'**unique** fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Condition initiale et conséquences

Pour tous réels x_0 et y_0 , il existe une **unique** solution f de $y' = ay$ telle que $f(x_0) = y_0$:

$$f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

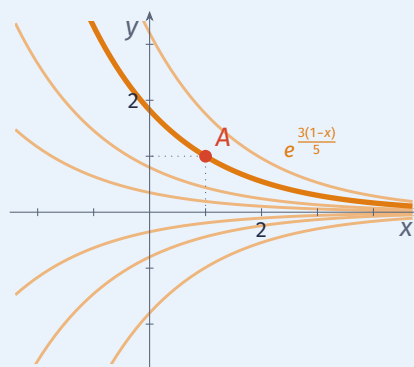
- Une solution qui s'annule en un point est la fonction nulle ; une solution non nulle garde le signe de C .

- Deux courbes intégrales distinctes n'ont **aucun** point commun : par chaque point du plan passe une et une seule courbe intégrale.
- $f(x+h) = e^{ah}f(x)$: en des points régulièrement espacés de h , les valeurs de f sont en progression géométrique de raison e^{ah} .

Démonstration. $Ce^{ax_0} = y_0 \iff C = y_0 e^{-ax_0}$: une seule constante convient. Deux courbes intégrales ayant un point commun (x_0, y_0) proviennent donc de la même solution.

Exemple : trois questions types

- $5y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{5}y$: $f(x) = Ce^{-\frac{3x}{5}}$. La courbe passe par $A(1, 1) \iff Ce^{-\frac{3}{5}} = 1 \iff C = e^{\frac{3}{5}}$: $f(x) = e^{\frac{3(1-x)}{5}}$.
- **Trouver** a . Si $f' = af$, $f(0) = 2$ et $f(\ln 4) = 16$: $f(x) = 2e^{ax}$ et $2e^{a \ln 4} = 2 \times 4^a = 16 \iff 2^{2a} = 2^3 \iff a = \frac{3}{2}$: $f(x) = 2e^{\frac{3x}{2}}$.
- **Impossible.** Aucune solution de $y' = ay$ ne vérifie $f(0) = 3$ et $f(1) = -1$, quel que soit a : une solution non nulle ne change pas de signe.



faisceau des solutions de $5y' + 3y = 0$: $C = 0$ donne l'axe (Ox) ; les autres courbes ne le coupent pas

3

L'équation $y' = ay + b$

Dans cette section, a et b sont réels, avec $a \neq 0$ (si $a = 0$, l'équation $y' = b$ donne $y = bx + C$).

Théorème

- L'équation $y' = ay + b$ a une **unique** solution constante : $x \mapsto -\frac{b}{a}$ (l'équilibre).
- Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$ (solution constante + solutions de $y' = ay$).
- Pour tous réels x_0 et y_0 , il existe une unique solution telle que $f(x_0) = y_0$: $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

Démonstration. La constante k est solution $\iff 0 = ak + b \iff k = -\frac{b}{a}$. Pour f dérivable, posons $z = f + \frac{b}{a}$: $z' = f'$ et $az = af + b$, donc $f' = af + b \iff z' = az \iff z = Ce^{ax}$ (section 2). La condition initiale devient $z(x_0) = y_0 + \frac{b}{a}$.

Allure des solutions non constantes ($C \neq 0$)

- $f(x) + \frac{b}{a} = Ce^{ax}$ a le signe de C : la courbe reste **strictement** d'un même côté de la droite d'équilibre $D : y = -\frac{b}{a}$; $f'(x) = aCe^{ax}$ ne s'annule pas : f est strictement monotone.
- $a < 0$: $f(x) \rightarrow -\frac{b}{a}$ en $+\infty$ (asymptote D : équilibre **stable**) et $f(x) \rightarrow \pm\infty$ en $-\infty$ (selon le signe de C).

- $a > 0$: c'est l'inverse : $f(x) \rightarrow -\frac{b}{a}$ en $-\infty$ et $f(x) \rightarrow \pm\infty$ en $+\infty$ (équilibre **instable**).
- $f' = a\left(f + \frac{b}{a}\right)$: la pente en un point est proportionnelle à l'écart à l'équilibre.

Exemple : une étude complète : (E) : $3y' + y = 4$

1. $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{4}{3}$: $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ et $-\frac{b}{a} = 4$: les solutions sont les fonctions $y = 4 + Ce^{-\frac{x}{3}}$.

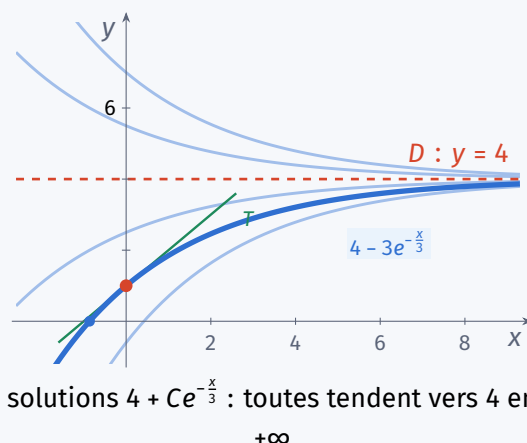
2. $f(0) = 1 \iff 4 + C = 1 \iff C = -3$:

$$f(x) = 4 - 3e^{-\frac{x}{3}}.$$

3. $f'(x) = e^{-\frac{x}{3}} > 0$: f croît strictement, de $-\infty$ (en $-\infty$) à 4 (en $+\infty$), et $f(x) < 4$ pour tout x . $f(x) = 0 \iff e^{-\frac{x}{3}} = \frac{4}{3} \iff x = -3 \ln \frac{4}{3} \approx -0,86$.

4. $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$: la tangente en $(0, 1)$ est $T : y = x + 1$. Comme $f''(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} < 0$, f est concave : la courbe est au-dessous de T .

Avec $a > 0$ et $x_0 \neq 0$. $y' = 2y - 1$ (équilibre $\frac{1}{2}$), courbe passant par $A(\ln 3, 5)$: $f(x) = \left(5 - \frac{1}{2}\right)e^{2(x-\ln 3)} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{e^{2x}}{9} + \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{2x}}{2}$; ici $f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ en $-\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.



4

Second membre et superposition

Soient $a \in \mathbb{R}$, g une fonction continue sur un intervalle I , $(E) : y' = ay + g(x)$ et $(E_0) : y' = ay$ l'équation homogène associée.

Théorème : générale = particulière + homogène

Si p est **une** solution particulière de (E) sur I , les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto p(x) + Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$. Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il en existe une seule telle que $f(x_0) = y_0$.

Superposition : si p_1 est solution de $y' = ay + g_1(x)$ et p_2 de $y' = ay + g_2(x)$, alors $\lambda p_1 + \mu p_2$ est solution de $y' = ay + \lambda g_1(x) + \mu g_2(x)$ (λ, μ réels).

Démonstration. Comme $p' = ap + g$: $f' = af + g \iff f' - p' = a(f - p) \iff f - p = Ce^{ax}$ (section 2). L'égalité $p(x_0) + Ce^{ax_0} = y_0$ fixe C . Enfin $(\lambda p_1 + \mu p_2)' = a(\lambda p_1 + \mu p_2) + \lambda g_1 + \mu g_2$. **À retenir** : deux solutions particulières diffèrent d'une solution de (E_0) , le choix de p est donc sans importance.

Méthode : chercher p sous une forme (en général indiquée par l'énoncé)

g polynôme de degré n ($a \neq 0$) p polynôme de degré n ; coefficients par identification

$g(x) = k e^{mx}$ avec $m \neq a$ $p(x) = \alpha e^{mx}$: $p' - ap = \alpha(m - a)e^{mx}$, donc $\alpha = \frac{k}{m - a}$

$g(x) = k e^{ax}$ (**résonance** : $m = a$) αe^{ax} est solution de (E_0) ; on prend $p(x) = \alpha x e^{ax}$: $p' - ap = \alpha e^{ax}$, $\alpha = k$

$g(x) = k \cos \omega x + k' \sin \omega x$ $p(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ ($\omega \neq 0$) ; identification

Exemple : quatre seconds membres

- **Polynôme** : $y' + 2y = 2x^2 - 1$. Avec $p(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$: $p' + 2p = 2ax^2 + (2\alpha + 2\beta)x + (\beta + 2\gamma)$, et l'identification donne $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$: $p(x) = x^2 - x$. Solutions : $y = x^2 - x + Ce^{-2x}$; avec $y(0) = 1$: $f(x) = x^2 - x + e^{-2x}$.
- **Trigonométrique** : $y' - 3y = 10 \sin x$. Avec $p = \alpha \cos x + \beta \sin x$: $p' - 3p = (\beta - 3\alpha) \cos x - (\alpha + 3\beta) \sin x$, d'où $\beta = 3\alpha$ et $-10\alpha = 10$: $p(x) = -\cos x - 3 \sin x$ et $y = -\cos x - 3 \sin x + Ce^{3x}$. Seule p ($C = 0$) est bornée sur $[0, +\infty[$.
- **Résonance** : $y' + 2y = 3e^{-2x}$. La forme αe^{-2x} donne $p' + 2p = 0$; avec $p(x) = \alpha x e^{-2x}$: $p' + 2p = \alpha e^{-2x}$, $\alpha = 3$ et $y = (3x + C)e^{-2x}$.
- **Superposition** : $y' + 2y = 2x^2 - 1 + 3e^{-2x}$ a pour solutions les fonctions $y = x^2 - x + (3x + C)e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

5

L'équation $y'' + ay' + by = 0$ **Définition : équation caractéristique**

Soient a, b réels et (E) : $y'' + ay' + by = 0$. Son **équation caractéristique** est (C) : $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$. Pour $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0$ ($\alpha \neq 0$), on écrit $ar^2 + \beta r + \gamma = 0$: mêmes racines.

Lemme fondamental (★)

Soient $r \in \mathbb{R}$ et z deux fois dérivable sur I . La fonction $y = e^{rx}z$ vérifie

$$y'' + ay' + by = e^{rx} [z'' + (2r + a)z' + (r^2 + ar + b)z]. \quad (\star)$$

En particulier ($z = 1$) : $x \mapsto e^{rx}$ est solution de $(E) \iff r^2 + ar + b = 0$.

Démonstration. $y' = e^{rx}(z' + rz)$ et $y'' = e^{rx}(z'' + 2rz' + r^2z)$; on remplace et on regroupe.

Remarque. Linéarité. Si f et g sont solutions de (E) , $\lambda f + \mu g$ aussi. Une solution f est indéfiniment dérivable ($f'' = -af' - bf$ est dérivable, etc.), et f' est encore solution, de même que $x \mapsto f(x + c)$ pour tout réel c (les coefficients sont constants).

Théorème des trois cas

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont $(C_1, C_2, A, B$ réels quelconques) :

Signe de Δ	Racines de (C)	Solutions de (E)
$\Delta > 0$	$r_1 \neq r_2$, réelles	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	$r = -\frac{a}{2}$, double	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$, $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0$	$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

Démonstration (en posant $y = e^{rx}z$).

- **Cas $\Delta \geq 0$.** Soit r_1 une racine réelle et $r_2 = -a - r_1$ l'autre ($r_2 = r_1$ si $\Delta = 0$). Pour f deux fois

dérivable, on pose $z = f e^{-r_1 x}$. Comme $r_1^2 + ar_1 + b = 0$ et $2r_1 + a = r_1 - r_2$, la relation (★) donne :

$$f \text{ solution de (E)} \iff z'' = (r_2 - r_1)z' \iff z'(x) = K e^{(r_2 - r_1)x} \quad (K \in \mathbb{R}) \quad (\text{section 2, pour } z').$$

Si $r_2 \neq r_1$: $z(x) = \frac{K}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + C_1$, soit $f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ($C_2 = \frac{K}{r_2 - r_1}$ décrit $\mathbb{R}$). Si $r_2 = r_1$: $z' = K$, $z(x) = C_1 + Kx$ et $f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$.

- **Cas $\Delta < 0$.** On pose $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ et $z = f e^{-\alpha x}$ (α n'est pas racine) : $2\alpha + a = 0$ et $\alpha^2 + a\alpha + b = b - \frac{a^2}{4} = \beta^2$. Par (★) : f solution de (E) $\iff z'' + \beta^2 z = 0$. Il reste à résoudre cette équation.

Lemme. Les solutions de $z'' + \beta^2 z = 0$ ($\beta > 0$) sont les fonctions $A \cos \beta x + B \sin \beta x$. Elles conviennent : $(\cos \beta x)'' = -\beta^2 \cos \beta x$, de même pour $\sin$. Réciproquement, si z est solution, $w(x) = z(x) - z(0) \cos \beta x - \frac{z'(0)}{\beta} \sin \beta x$ est solution, avec $w(0) = 0$ et $w'(0) = 0$. L'« énergie » $E = w'^2 + \beta^2 w^2$ vérifie $E' = 2w'(w'' + \beta^2 w) = 0$: elle est constante, égale à $E(0) = 0$. Donc $\beta^2 w^2 \leq E = 0$, $w = 0$ et $z = A \cos \beta x + B \sin \beta x$.

Remarque. Quand $\Delta < 0$, les racines de (C) sont les complexes $\alpha \pm i\beta$: la partie réelle α va dans l'exponentielle, la partie imaginaire $\beta > 0$ dans $\cos$ et $\sin$. Si r_1 et r_2 sont les racines, $a = -(r_1 + r_2)$ et $b = r_1 r_2$; dans le cas complexe, $b = \alpha^2 + \beta^2$.

6

Les trois cas en pratique

Exemple : résoudre

- $y'' - 2y' - 2y = 0$: $r^2 - 2r - 2 = 0$, $\Delta = 12$, $r = 1 \pm \sqrt{3}$: $y = C_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{3})x}$.
- $9y'' - 12y' + 4y = 0$: $9r^2 - 12r + 4 = (3r - 2)^2$, racine double $\frac{2}{3}$: $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{2x}{3}}$.
- $y'' - y' + y = 0$: $\Delta = -3$, $r = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $y = e^{\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.
- Sans terme en y' ou en y : $y'' + 3y = 0$ ($r = \pm i\sqrt{3}$) : $y = A \cos \sqrt{3} x + B \sin \sqrt{3} x$; $y'' - 5y = 0$ ($r = \pm\sqrt{5}$) : $y = C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x}$; $y'' - 2y' = 0$ ($r \in \{0, 2\}$) : $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

La forme $R \cos(\beta x - \varphi)$

Pour $(A, B) \neq (0, 0)$: $A \cos \beta x + B \sin \beta x = R \cos(\beta x - \varphi)$, avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ et $\sin \varphi = \frac{B}{R}$.

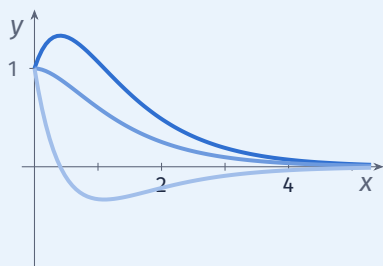
Une solution du cas $\Delta < 0$ s'écrit donc $f(x) = R e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$: elle oscille entre les **enveloppes** $\pm R e^{\alpha x}$, ses zéros sont espacés de $\frac{\pi}{\beta}$, et sa **pseudo-période** est $\frac{2\pi}{\beta}$ (une vraie période si $\alpha = 0$).

Démonstration. $\left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(\frac{B}{R}\right)^2 = 1$: il existe φ tel que $\cos \varphi = \frac{A}{R}$ et $\sin \varphi = \frac{B}{R}$, et $R \cos(\beta x - \varphi) = R \cos \varphi \cos \beta x + R \sin \varphi \sin \beta x = A \cos \beta x + B \sin \beta x$.

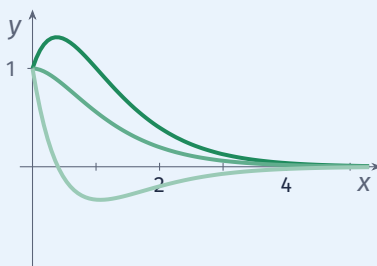
Exemple : $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$

$R = 2$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$: $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ et $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. Maximum 2 en $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$, zéros en $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Attention : $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ ne suffit pas, il faut les **signes** de $\cos \varphi$ et de $\sin \varphi$.

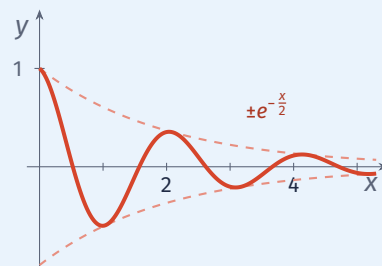
6.1 Allure des solutions dans les trois cas



$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (\Delta = 1)$$



$$4y'' + 12y' + 9y = 0 \quad (\Delta = 0)$$



$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad (\Delta < 0)$$

Pour chaque équation, solutions telles que $y(0) = 1$ et $y'(0) \in \{2, 0, -4\}$ (du plus foncé au plus clair) ; à droite, $y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x$ ($y'(0) = -\frac{1}{2}$). Si $\Delta \geq 0$, une solution non nulle s'annule **au plus une fois** : $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = 0 \iff e^{(r_2 - r_1)x} = -\frac{C_1}{C_2}$, et $(C_1 + C_2 x) e^{rx} = 0 \iff C_1 + C_2 x = 0$. Si $\Delta < 0$, elle s'annule une infinité de fois (oscillations).

7

Conditions initiales

Théorème (existence et unicité)

Pour tous réels x_0 , y_0 et y_1 , l'équation (E) : $y'' + ay' + by = 0$ a une **unique** solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Démonstration. f est solution $\iff g : x \mapsto f(x + x_0)$ est solution (section 5), avec $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)$ et $f(x) = g(x - x_0)$: il suffit de traiter le cas $x_0 = 0$. Les conditions $f(0) = y_0$, $f'(0) = y_1$ forment un système d'inconnues les deux constantes :

- $\Delta > 0$: $C_1 + C_2 = y_0$ et $r_1 C_1 + r_2 C_2 = y_1$: déterminant $r_2 - r_1 \neq 0$, une seule solution (C_1, C_2) ;
- $\Delta = 0$: $C_1 = y_0$ et $r C_1 + C_2 = y_1$, d'où $C_2 = y_1 - r y_0$; $\Delta < 0$: $A = y_0$ et $\alpha A + \beta B = y_1$, d'où $B = \frac{y_1 - \alpha y_0}{\beta}$.

Conséquences. Une solution telle que $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ est **nulle**. Deux courbes intégrales distinctes peuvent se couper, mais ne sont jamais **tangentes**. Une solution est entièrement déterminée par le couple $(f(0), f'(0))$.

Exemple : $\Delta > 0$: $y'' + 2y' - 8y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 8$

$r^2 + 2r - 8 = (r - 2)(r + 4)$: $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$ et $f'(x) = 2C_1 e^{2x} - 4C_2 e^{-4x}$. Le système $C_1 + C_2 = 1$, $2C_1 - 4C_2 = 8$ donne $C_1 = 2$, $C_2 = -1$: $f(x) = 2e^{2x} - e^{-4x}$ (section 1). Elle s'annule une seule fois : $e^{6x} = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{\ln 2}{6}$.

Exemple : $\Delta = 0$ et $x_0 \neq 0$: $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$

$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{2x}{3}}$ et $f'(x) = \left(C_2 + \frac{2}{3}(C_1 + C_2 x)\right) e^{\frac{2x}{3}}$. $f(1) = 0 \iff C_1 = -C_2$, puis $f'(1) = C_2 e^{\frac{2}{3}} = 1$: $f(x) = (x - 1) e^{\frac{2(x-1)}{3}}$. C'est la translatée $g(x-1)$ de la solution $g(x) = x e^{\frac{2x}{3}}$ telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, comme dans la démonstration. $f'(x) = \frac{2x+1}{3} e^{\frac{2(x-1)}{3}}$: minimum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2e}$.

Exemple : $\Delta < 0$: $y'' + 2y' + 4y = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$

$r^2 + 2r + 4 = 0$, $\Delta = -12$, $r = -1 \pm i\sqrt{3}$: $f(x) = e^{-x} (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x)$; $f(0) = A = 1$ et $f'(0) = -A + \sqrt{3}B = 2$, donc $B = \sqrt{3}$:

$$f(x) = e^{-x} (\cos \sqrt{3}x + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x) = 2e^{-x} \cos\left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \left(R = 2, \cos \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Zéros : $\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x = \frac{(6k+5)\pi}{6\sqrt{3}}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; $|f(x)| \leq 2e^{-x}$, donc $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Attention, piège ! Conditions en deux points

Deux conditions en **deux points différents** ne garantissent ni l'existence, ni l'unicité. Pour $y'' + y = 0$ ($y = A \cos x + B \sin x$) : $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$: **une infinité** de solutions ($B \sin x$) ; $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1$: **aucune** ($A = 0$ impose $f(\pi) = 0$) ; $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: une seule, $\sin x$.

8

Se ramener à une équation connue

Méthode : changement de fonction ou de variable indiqué

1. Exprimer y , y' (et y'') à l'aide de la nouvelle fonction z . 2. Établir l'**équivalence** : « y est solution de (E) $\iff$ z est solution de (E') », avec (E') d'un type connu. 3. Résoudre (E') , revenir à y , puis utiliser les conditions initiales. 4. Respecter les conditions d'existence : $z = \frac{1}{y}$ exige $y \neq 0$; $x = e^t$ exige $x > 0$.

Repères : $z = y - p$ (p solution particulière) ; $z = y e^{-rx}$ (identité (★)) ; $z = y'$ (si y ne figure pas : $y'' = ay' + b$ devient $z' = az + b$) ; $z = \frac{1}{y}$ (si y^2 apparaît) ; $g(t) = y(e^t)$ (si xy' ou x^2y'' apparaissent).

Exemple : $z = y - p$: (E) : $y'' + 2y' + 2y = 2x$

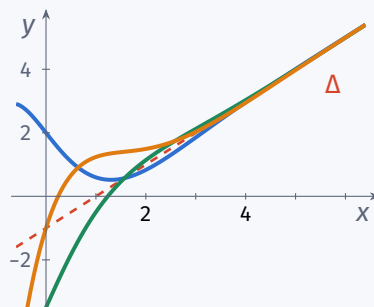
1. $p(x) = x - 1$ est solution : $p'' + 2p' + 2p = 0 + 2 + 2x - 2 = 2x$.

2. Par différence : f solution de (E) $\iff z = f - p$ est solution de (E₀) : $z'' + 2z' + 2z = 0$.

3. $r^2 + 2r + 2 = 0$: $r = -1 \pm i$, $z = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$, d'où

$$f(x) = x - 1 + e^{-x}(A \cos x + B \sin x).$$

4. $|f(x) - (x - 1)| \leq (|A| + |B|)e^{-x} \rightarrow 0$: **toutes** les courbes intégrales admettent la droite $\Delta : y = x - 1$ pour asymptote en $+\infty$, et (si $(A, B) \neq (0, 0)$) la coupent une infinité de fois, en des points espacés de π .



$(A, B) = (3, 0), (-2, 5; 0), (0, 4)$: oscillations amorties autour de Δ

Exemple : $z = y e^{2x}$: (E) : $y'' + 4y' + 4y = 6x e^{-2x}$

Ici $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$: avec $y = e^{-2x}z$ et $r = -2$, l'identité (★) donne $2r + a = 0$ et $r^2 + ar + b = 0$, donc $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}z''$. Ainsi y solution de (E) $\iff z'' = 6x \iff z = x^3 + C_1x + C_2$ (deux primitives successives sur $\mathbb{R}$) :

$$y = (x^3 + C_1x + C_2)e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple : $z = \frac{1}{y}$: (E) : $y' = 2y - e^x y^2$, solution ne s'annulant pas avec $y(0) = 1$

L'équation n'est pas linéaire (la fonction nulle en est une solution). Pour f dérivable et **sans zéro** sur $\mathbb{R}$, on pose $z = \frac{1}{f}$: $z' = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{2f - e^x f^2}{f^2} = -\frac{2}{f} + e^x$, donc f solution de (E) $\iff z' = -2z + e^x$.

Avec $p = ae^x$: $3a = 1$, et $z = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$; $z(0) = 1$ donne $C = \frac{2}{3}$: $z(x) = \frac{1}{3}(e^x + 2e^{-2x}) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et

$$f(x) = \frac{3}{e^x + 2e^{-2x}} = \frac{3e^{2x}}{e^{3x} + 2} \quad \text{sur } \mathbb{R}. \quad f \rightarrow 0 \text{ en } \pm\infty; \text{ maximum } f\left(\frac{2}{3}\ln 2\right) = \sqrt[3]{2}.$$

(Le dénominateur $h(x) = e^x + 2e^{-2x}$ a pour dérivée $e^x - 4e^{-2x}$, nulle pour $e^{3x} = 4$, et $h\left(\frac{2}{3}\ln 2\right) = 4^{\frac{1}{3}} + 2 \times 4^{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times 2^{\frac{2}{3}}.$)

Exemple : $x = e^t$: (E) : $xy' + y = \ln x$ sur $]0, +\infty[$

Pour f dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose $g(t) = f(e^t)$: $g'(t) = e^t f'(e^t)$. Comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$:

$$f \text{ solution de (E)} \iff \forall t \in \mathbb{R}, e^t f'(e^t) + f(e^t) = t \iff g' + g = t \iff g(t) = t - 1 + Ce^{-t}.$$

Donc $f(x) = g(\ln x) = \ln x - 1 + \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. **Contrôle :** $xf' + f = (xf)'$ et $xf(x) = x \ln x - x + C$ a pour dérivée $\ln x$. ✓

9

Équations fonctionnelles

Méthode : analyse puis synthèse

Analyse : on suppose f solution ; en dérivant la relation (par rapport à une variable, l'autre étant fixée) et en donnant des valeurs particulières, on montre que f vérifie une équation différentielle et des conditions initiales : on obtient des **candidats**. **Synthèse** : on vérifie lesquels conviennent **vraiment** (souvent, pas tous !).

Exemple : f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y

Analyse. $x = y = 0$: $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 0$: $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ pour tout x . Si $f(0) = 1$: on fixe x et on dérive par rapport à y : $f'(x+y) = f(x)f'(y)$, puis $y = 0$: $f'(x) = k f(x)$ avec $k = f'(0)$. Comme $f(0) = 1$: $f(x) = e^{kx}$ (section 2).

Synthèse. $e^{k(x+y)} = e^{kx}e^{ky}$ et la fonction nulle conviennent. **Solutions** : la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$ (par exemple, si de plus $f(1) = 2$: $f(x) = e^{x \ln 2} = 2^x$).

Exemple : f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = f(-x)$ pour tout réel x (le post-it de la couverture)

Analyse. $x \mapsto f(-x)$ est dérivable, donc f' aussi, et (dérivée d'une composée) $f''(x) = -f'(-x) = -f(-(-x)) = -f(x)$. Donc $f'' + f = 0$ et $f(x) = A \cos x + B \sin x$.

Synthèse. $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f(-x) = A \cos x - B \sin x$: l'égalité pour tout x équivaut à $B = A$ (prendre $x = 0$, puis $x = \frac{\pi}{2}$). **Solutions** : $f(x) = A(\cos x + \sin x) = A\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $A \in \mathbb{R}$.

Avec $f(0) = 1$: $f(x) = \cos x + \sin x$. La condition $f'' = -f$ était **nécessaire**, pas suffisante : sin la vérifie, mais $\sin'(x) = \cos x \neq \sin(-x)$.

Exemple : une équation intégrale : f continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$

Analyse. $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est la primitive de f nulle en 0 (chapitre 9) : elle est dérivable et $F' = f$. Donc $f = x^2 + 2F$ est **dérivable**, $f'(x) = 2x + 2f(x)$ et $f(0) = 0$. Avec $p(x) = \alpha x + \beta$: $\alpha = 2\alpha x + 2\beta + 2x$, d'où $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$; puis $f(x) = Ce^{2x} - x - \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$: $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - 2x - 1)$.

Synthèse. $g(x) = f(x) - x^2 - 2 \int_0^x f(t) dt$ vérifie $g' = f' - 2x - 2f = 0$ et $g(0) = 0$: $g = 0$, la fonction trouvée convient.

10

Modélisation

Méthode : modéliser

1. Nommer la fonction inconnue, sa variable (souvent le temps t) et les unités. 2. Traduire la loi (physique, chimique, biologique) en équation différentielle. 3. Résoudre avec les conditions initiales. 4. Interpréter : limite (régime permanent), constante de temps, demi-vie, période, avec les unités.

10.1 Refroidissement : la loi de Newton

La vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante θ_a : $\theta' = -k(\theta - \theta_a)$ ($k > 0$), donc $\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{-kt} \rightarrow \theta_a$. Aux instants 0, T , $2T$, les écarts $\theta - \theta_a$ sont en progression géométrique de raison $q = e^{-kT}$ (section 2) : $(\theta_1 - \theta_a)^2 = (\theta_0 - \theta_a)(\theta_2 - \theta_a)$, soit

$$\theta_a = \frac{\theta_0\theta_2 - \theta_1^2}{\theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1}$$

: trois mesures à intervalles réguliers suffisent, même sans connaître θ_a .

Exemple : un plat sorti du four

On mesure 100 °C, 70 °C et 52 °C à $t = 0, 10$ et 20 min. $\theta_a = \frac{5200 - 4900}{152 - 140} = 25$ °C, $q = \frac{70 - 25}{100 - 25} = \frac{3}{5} = e^{-10k}$, $k = \frac{\ln \frac{5}{3}}{10} \approx 0,051 \text{ min}^{-1}$, et $\theta(t) = 25 + 75e^{-kt}$. Le plat est à 30 °C quand $e^{-kt} = \frac{1}{15}$, soit $t = \frac{10 \ln 15}{\ln \frac{5}{3}} \approx 53 \text{ min}$.

10.2 Radioactivité

Le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs vérifie $N' = -\lambda N$ ($\lambda > 0$, constante radioactive) : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La **demi-vie** $t_{1/2}$, telle que $N(t + t_{1/2}) = \frac{1}{2}N(t)$, vaut $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ et ne dépend pas de N_0 ; $\frac{N(t)}{N_0} = 2^{-t/t_{1/2}}$.

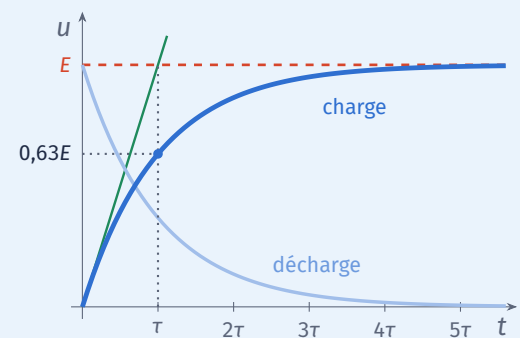
Exemple : l'iode 131 ($t_{1/2} = 8$ jours). Au bout de 30 jours, il en reste $2^{-\frac{30}{8}} \approx 7,4\%$; il en reste 1 % au bout de $t = 8 \times \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 53$ jours.

10.3 Circuits RC et RL

Charge d'un condensateur (générateur E , résistance R , capacité C , $u(0) = 0$) : la loi des mailles donne $RC u' + u = E$. Avec $\tau = RC$ (**constante de temps**) :

$$u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad i(t) = C u'(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- La tangente à l'origine, $u = \frac{E}{\tau} t$, coupe l'asymptote $u = E$ en $t = \tau$; $u(\tau) = E \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,63 E$.
- $u \geq 0,99 E \iff t \geq \tau \ln 100 \approx 4,6 \tau$: la charge est pratiquement finie à 5τ .
- $E = 12 \text{ V}$, $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$: $\tau = 2 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-6} = 0,1 \text{ s}$, $u(\tau) \approx 7,6 \text{ V}$, $i(0) = 6 \text{ mA}$.
- **Décharge** ($RC u' + u = 0$) : $u = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. **Bobine** ($Li' + Ri = E$) : $i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.



charge $1 - e^{-t/\tau}$ et décharge $e^{-t/\tau}$ (en unités de E) ; tangente à l'origine

10.4 Oscillateur harmonique

Un solide de masse m , accroché à un ressort de raideur k , sans frottement : $m x'' = -k x$, soit $x'' + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \varphi)$, de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, indépendante de l'amplitude X . L'énergie $E = \frac{1}{2} m x'^2 + \frac{1}{2} k x^2$ est constante : $E' = x'(m x'' + k x) = 0$. **Circuit LC** : $LC u'' + u = 0$, $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Exemple : $m = 0,25 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $x(0) = 0,06 \text{ m}$, $x'(0) = 0,64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{16}{0,25}} = 8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} :$$

$$x(t) = A \cos 8t + B \sin 8t, \quad A = 0,06 \text{ et}$$

$$8B = 0,64, \quad B = 0,08.$$

$$R = \sqrt{0,06^2 + 0,08^2} = 0,1 :$$

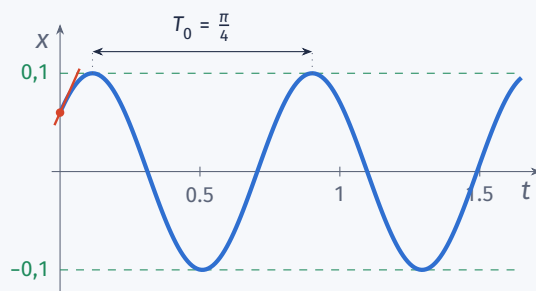
$$x(t) = 0,1 \cos(8t - \varphi) \quad (\text{en m}), \text{ avec}$$

$$\cos \varphi = 0,6, \sin \varphi = 0,8 \quad (\varphi \approx 0,93 \text{ rad}).$$

$$\text{Amplitude } 10 \text{ cm}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79 \text{ s},$$

$$\text{vitesse maximale } \omega_0 X = 0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \text{ énergie}$$

$$E = \frac{1}{2} k X^2 = 0,08 \text{ J}.$$



Remarque. Avec frottement : $m x'' + h x' + k x = 0$ ($h > 0$) ; selon le signe de $h^2 - 4mk$, on retrouve les trois allures de la section 6, et la position tend toujours vers 0 (astuce 4, section 13). Même chose pour le circuit RLC : $LC u'' + RC u' + u = 0$.

10.5 Populations

Malthus : $P' = kP$ donne une croissance exponentielle $P_0 e^{kt}$, irréaliste à long terme. **Verhulst** : $P' = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right)$ ($k > 0$, capacité M , $0 < P_0 < M$). Pour P sans zéro, $z = \frac{1}{P}$ vérifie $z' = -\frac{P'}{P^2} = -\frac{k}{P} + \frac{k}{M} = -kz + \frac{k}{M}$, donc $z = \frac{1}{M} + C e^{-kt}$ avec $C = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{M} > 0$, et

$$P(t) = \frac{M}{1 + A e^{-kt}}, \quad A = \frac{M}{P_0} - 1 > 0.$$

P croît vers M (courbe en S) ; $P'' = k \left(1 - \frac{2P}{M}\right) P'$ s'annule pour $P = \frac{M}{2}$, à l'instant $t = \frac{\ln A}{k}$ (point d'inflexion). Par exemple $M = 1000$, $P_0 = 100$: $A = 9$.

11

Pour aller plus loin

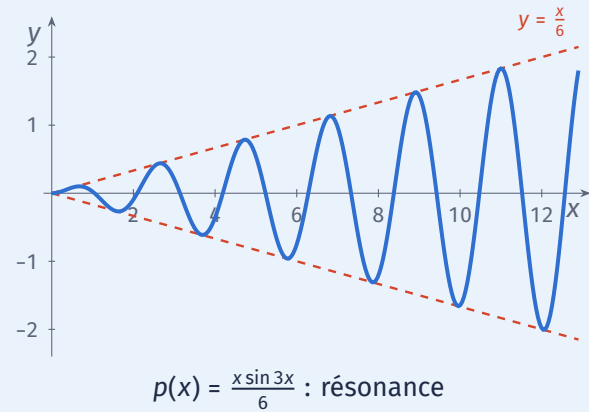
11.1 Excitation sinusoïdale et résonance

Soient $\omega > 0$, $\lambda > 0$ et (E_λ) : $y'' + \omega^2 y = \cos \lambda x$ (oscillateur soumis à une excitation de pulsation λ).

- **Si $\lambda \neq \omega$** : $p(x) = \frac{\cos \lambda x}{\omega^2 - \lambda^2}$ convient, car $p'' = -\lambda^2 p$ et $p'' + \omega^2 p = (\omega^2 - \lambda^2) p = \cos \lambda x$. Les solutions $p + A \cos \omega x + B \sin \omega x$ sont **bornées**, mais l'amplitude $\frac{1}{|\omega^2 - \lambda^2|}$ du terme forcé tend vers $+\infty$ quand $\lambda \rightarrow \omega$.

- **Si $\lambda = \omega$ (résonance)** : $\cos \omega x$ est solution homogène ; avec la forme indiquée $p(x) = x(\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x)$: $p'' + \omega^2 p = 2\omega(\beta \cos \omega x - \alpha \sin \omega x)$, d'où $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2\omega}$ et $p(x) = \frac{x \sin \omega x}{2\omega}$.

Exemple : $y'' + 9y = \cos 3x$ a pour solutions
 $y = \frac{x \sin 3x}{6} + A \cos 3x + B \sin 3x$. **Aucune** n'est
 bornée sur $[0, +\infty[$: pour $x_n = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$,
 $\cos 3x_n = 0$ et $\sin 3x_n = 1$, donc
 $y(x_n) = \frac{x_n}{6} + B \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Les oscillations
 s'amplifient entre les droites $y = \pm \frac{x}{6}$: c'est le
 phénomène qui peut détruire un pont ou briser
 un verre.



11.2 L'équation d'Euler $x^2 y'' + axy' + by = 0$

Sur $]0, +\infty[$, on pose $g(t) = y(e^t)$: $g'(t) = e^t y'(e^t)$ et $g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$, c'est-à-dire, pour
 $x = e^t$:

$$xy'(x) = g'(t), \quad x^2 y''(x) = g''(t) - g'(t), \quad \text{donc} \quad x^2 y'' + axy' + by = 0 \iff g'' + (a-1)g' + bg = 0.$$

On est ramené à une équation à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 + (a-1)r + b = 0$
 ; c'est aussi la condition pour que $x \mapsto x^r$ soit solution : $r(r-1) + ar + b = 0$.

- $x^2 y'' - xy' + y = 0$: $g'' - 2g' + g = 0$, $g = (C_1 + C_2 t)e^t$, donc $y = x(C_1 + C_2 \ln x)$.
- $x^2 y'' + xy' + y = 0$: $g'' + g = 0$, $g = A \cos t + B \sin t$, donc $y = A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)$: une infinité
 d'oscillations quand $x \rightarrow 0^+$.

12 Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
$3y' = y$: $y = Ce^{3x}$	$y' = \frac{1}{3}y$: $y = Ce^{\frac{x}{3}}$
$y' = -5y + 10$: $y = Ce^{-5x} + 10$ ou $y = e^{-5x} + C$	la constante multiplie l'exponentielle, et l'équilibre est $-\frac{b}{a} = 2$: $y = Ce^{-5x} + 2$
« $\frac{y'}{y} = a$, donc $\ln y = ax + k$ » comme démonstration	on ignore si y s'annule : on pose $z = y e^{-ax}$ et $z' = 0$
solutions de $y' = ay + g$: $p + C$	$p + Ce^{ax}$: on ajoute les solutions de l'équation homogène
$y' + 2y = 3e^{-2x}$: on cherche $p = ae^{-2x}$	résonance : ae^{-2x} est solution homogène ; $p = 3x e^{-2x}$
condition initiale imposée à Ce^{ax} seul, puis on ajoute p	on l'impose à la solution complète $p + Ce^{ax}$
$\Delta = 0$: $y = Ce^{rx}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$: deux constantes pour l'ordre 2
racines $-2 \pm 3i$: $y = e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$	$y = e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$: la partie réelle va dans l'exponentielle
$y'' + 3y = 0$: $y = A \cos 3x + B \sin 3x$	$r = \pm i\sqrt{3}$: $y = A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x$

$y'' - 5y = 0 : y = A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x$	$r = \pm\sqrt{5}$ (réels) : $y = C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x}$
$-\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(x - \varphi)$ avec $\varphi = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$	$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ et $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} : \varphi = \frac{3\pi}{4}$
$f'(x) = f(-x)$ donne $f''(x) = f'(-x)$, et toute solution de $f'' = -f$ convient	$f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$; puis la synthèse ne garde que $A(\cos x + \sin x)$
$f(0) = 0$ et $f(\pi) = 0$ déterminent une unique solution de $y'' + y = 0$	une infinité ($B \sin x$) : l'unicité vaut pour $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ au même point
$y' = 1 + y^2$ a des solutions définies sur $\mathbb{R}$	aucune : $\tan(x - c)$ vit sur un intervalle de longueur au plus π
Euler, $g(t) = y(e^t) : x^2 y''(x) = g''(t)$	$x^2 y'' = g'' - g'$ et $xy' = g'$
$y'' + \omega^2 y = \cos \omega x : p = a \cos \omega x$	résonance : $p = \frac{x \sin \omega x}{2\omega}$, non bornée
demi-vie $t_{1/2} = \lambda \ln 2$, et elle dépend de N_0	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, indépendante de N_0

13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : 1. l'unicité démontre des identités

Deux solutions de la même équation qui ont les mêmes conditions initiales sont **égales**.

- $f(x) = \cos(x + c)$ et $g(x) = \cos c \cos x - \sin c \sin x$ sont solutions de $y'' + y = 0$, avec $f(0) = g(0) = \cos c$ et $f'(0) = g'(0) = -\sin c$: d'où la formule d'addition $\cos(x + c) = \cos x \cos c - \sin x \sin c$. De même, $x \mapsto e^{x+c}$ et $x \mapsto e^c e^x$ sont solutions de $y' = y$ et valent e^c en 0.
- **Parité**. Si f est solution de $y'' + by = 0$ et $f'(0) = 0$, alors $g(x) = f(-x)$ est solution ($g''(x) = f''(-x)$), avec $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = -f'(0) = 0 = f'(0)$: $g = f$, f est **paire**.

★ Astuce de concours : 2. factoriser l'équation : $z = y' - r_1 y$

Si r_1 et r_2 sont les racines (réelles) de $r^2 + ar + b = 0$, on a $a = -(r_1 + r_2)$, $b = r_1 r_2$ et

$$y'' + ay' + by = (y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y).$$

Donc $y'' + ay' + by = g(x)$ se résout par **deux équations du premier ordre** : $z' = r_2 z + g$, puis $y' = r_1 y + z$.

Exemple : $y'' + y' - 2y = 3e^x$ ($r_1 = 1, r_2 = -2$). $z = y' - y$ vérifie $z' + 2z = 3e^x$: $z = e^x + Ce^{-2x}$. Puis $y' - y = e^x + Ce^{-2x}$, avec la résonance $x e^x$ pour le terme e^x : $y = (x + D)e^x + C'e^{-2x}$ ($C' = -\frac{C}{3}$).

★ Astuce de concours : 3. une inégalité différentielle

Si f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f' \leq af$, alors $f(x) \leq f(0)e^{ax}$ pour $x \geq 0$: $z = f e^{-ax}$ vérifie $z' = (f' - af)e^{-ax} \leq 0$, donc $z(x) \leq z(0)$.

Application (unicité) : si $f(0) = 0$ et $|f'(x)| \leq 3|f(x)|$ pour tout $x \geq 0$, alors $f = 0$ sur $[0, +\infty[$. En effet $g = f^2 \geq 0$ vérifie $g' = 2ff' \leq 2|f||f'| \leq 6f^2 = 6g$, donc $0 \leq g(x) \leq g(0)e^{6x} = 0$.

★ *Astuce de concours : 4. quand toutes les solutions tendent-elles vers 0 ?*

Toutes les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ tendent vers 0 en $+\infty \iff a > 0 \text{ et } b > 0$.

Preuve. $\Delta < 0$: $|f| \leq Re^{ax}$ et $e^{ax} \cos \beta x$ vaut e^{ax} aux points $\frac{2k\pi}{\beta}$: la condition est $\alpha = -\frac{a}{2} < 0$, et $b = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ de toute façon. $\Delta \geq 0$: il faut et il suffit que les racines soient **négatives** (prendre $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ ou $x e^{rx}$), soit $r_1 + r_2 = -a < 0$ et $r_1 r_2 = b > 0$. **Exemples** : un circuit RLC ou un ressort avec frottement ($a = \frac{R}{L} > 0$, $b = \frac{1}{LC} > 0$) revient toujours au repos ; pour $y'' - y' + y = 0$ (section 6), $a < 0$: les oscillations sont amplifiées.

★ *Astuce de concours : 5. linéariser, puis superposer*

$y'' + y = \sin^2 x$: comme $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, on cherche une solution pour chaque terme : $\frac{1}{2}$ pour le premier, et (section 11, $\omega = 1, \lambda = 2$) $-\frac{1}{2} \times \frac{\cos 2x}{1-4} = \frac{\cos 2x}{6}$ pour le second. Solutions : $y = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{6} + A \cos x + B \sin x$.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Vocabulaire

Solution sur un **intervalle** I : f dérivable (n fois) et l'égalité vraie **pour tout** $x \in I$.

Vérifier : calculer f' , f'' , remplacer ; un seul x suffit pour dire « non ».

$y' = 1 + y^2$: $y = \tan(x - c)$, aucune solution sur $\mathbb{R}$.

$y' = ay$ $y = Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$)

Preuve : $z = y e^{-ax}$ vérifie $z' = (y' - ay) e^{-ax} = 0$.

$y(x_0) = y_0$: $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$ (unique) ; nulle en un point $\Rightarrow$ nulle ; $f(x+h) = e^{ah} f(x)$.

$y' = ay + b$ ($a \neq 0$), équilibre $\ell = -\frac{b}{a}$

$y = \ell + Ce^{ax}$ $y(x_0) = y_0$: $y = \ell + (y_0 - \ell) e^{a(x-x_0)}$
 $a < 0$: $y \rightarrow \ell$ en $+\infty$ (stable) ; $a > 0$: $y \rightarrow \ell$ en $-\infty$.
 Courbes disjointes, strictement d'un côté de $y = \ell$; $y' = a(y - \ell)$.

Second membre $y' = ay + g(x)$

Générale = **une** particulière $p + Ce^{ax}$; condition initiale **à la fin**.

polynôme de degré $n \rightarrow$ polynôme de degré n

$k e^{mx}$, $m \neq a \rightarrow \frac{k}{m-a} e^{mx}$

$k e^{ax}$ (résonance) $\rightarrow k x e^{ax}$

$k \cos \omega x + k' \sin \omega x \rightarrow \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

Superposition : $g_1 + g_2 \rightarrow p_1 + p_2$.

Se ramener à un type connu

$z = y - p$; $z = y e^{-rx}$; $z = y'$ (y absent) ; $z = \frac{1}{y}$ (y^2 présent, $y \neq 0$)

$g(t) = y(e^t)$ ($x > 0$) : $xy' = g'$, $x^2 y'' = g'' - g'$.

Euler $x^2 y'' + axy' + by = 0 \iff$

$g'' + (a-1)g' + bg = 0$.

Toujours écrire l'**équivalence** y solution $\iff z$ solution.

Équations fonctionnelles

Analyse (dériver, valeurs particulières) $\rightarrow$ candidats ; **synthèse** obligatoire.

$f(x+y) = f(x)f(y)$: 0 ou e^{kx} ; $f'(x) = f(-x)$: $A(\cos x + \sin x)$.

$y'' + ay' + by = 0$: $r^2 + ar + b = 0$, $\Delta = a^2 - 4b$

$\Delta > 0$ $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$, $r = -\frac{a}{2}$

$\Delta < 0$ $y = e^{ax} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

racines $\alpha \pm i\beta$: $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$; $r_1 + r_2 = -a$, $r_1 r_2 = b$.

(★) $y = e^{rx} z$:

$y'' + ay' + by = e^{rx} [z'' + (2r+a)z' + (r^2 + ar + b)z]$.

$z'' + \beta^2 z = 0$: énergie $z'^2 + \beta^2 z^2$ constante.

Conditions initiales

$f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$: une **unique** solution.

$f(x_0) = f'(x_0) = 0 \Rightarrow f = 0$; en deux points : 0, 1 ou une infinité.

$\Delta \geq 0$: au plus un zéro ; $\Delta < 0$: zéros espacés de $\frac{\pi}{\beta}$.

Amplitude-phase

$A \cos \beta x + B \sin \beta x = R \cos(\beta x - \varphi)$, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\cos \varphi = \frac{A}{R}$, $\sin \varphi = \frac{B}{R}$ (les **deux** signes) ; période $\frac{2\pi}{\beta}$.

Excitation $y'' + \omega^2 y = \cos \lambda x$

$\lambda \neq \omega$: $p = \frac{\cos \lambda x}{\omega^2 - \lambda^2}$; $\lambda = \omega$: $p = \frac{x \sin \omega x}{2\omega}$ (résonance).

Modèles (variable t)

Newton : $\theta = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a) e^{-kt}$, $\theta_a = \frac{\theta_0 \theta_2 - \theta_1^2}{\theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1}$

Radioactivité : $N = N_0 e^{-\lambda t}$, $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

RC : $u = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, $\tau = RC$ (63 % en τ , 99 % en $4,6\tau$) ; RL : $\tau = \frac{L}{R}$

Ressort : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; LC : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

Verhulst ($z = \frac{1}{p}$) : $P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$, inflexion en $P = \frac{M}{2}$.

Astuces

Même équation, mêmes conditions initiales $\Rightarrow$ fonctions égales.

$y'' + ay' + by = (y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y)$.

$f' \leq af$ sur $[0, +\infty[\Rightarrow f(x) \leq f(0) e^{ax}$.

Toutes les solutions $\rightarrow 0$ en $+\infty \iff a > 0$ et $b > 0$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

15 Niveau I • Bases

Sauf mention contraire, les fonctions sont dérivables (deux fois au second ordre) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 Solutions et courbes intégrales ★

corrigé p. 41

- Vérifier que $(x^2 + 1)e^x$ est solution de $y' - y = 2xe^x$, et $e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$ de $y'' + 2y' + 3y = 0$.
- Soit (E) : $y' = x + y$. Où les courbes intégrales ont-elles une tangente horizontale ? Montrer que $D : y = -x - 1$ est une courbe intégrale.
- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f + x + 1$ est solution de $y' = y$; en déduire les solutions f_C . Si $C > 0$, montrer que f_C a un minimum, atteint sur la droite $y = -x$; et si $C < 0$? Tracer D et quelques courbes intégrales.

Exercice 2 Premier ordre : résoudre et ajuster ★

corrigé p. 41

- Résoudre : a) $\sqrt{3}y' + y = 0$; b) $5y' - 2y = 3$; c) $y' + ey = e$; d) $\frac{y'}{3} + y = \frac{1}{2}$. Quelles solutions de b) ont une limite finie en $+\infty$? en $-\infty$?
- Déterminer la solution f : a) de a) telle que $f(\sqrt{3}) = 2$; b) de b) dont la courbe passe par $A(\frac{5}{2} \ln 2, \frac{5}{2})$; c) de c) dont la tangente au point d'abscisse 0 passe par $B(1, 0)$; d) de d) telle que $f(0) = f'(0)$.

Exercice 3 Chercher une solution particulière ★

corrigé p. 42

Chercher une solution particulière p de la forme indiquée, puis résoudre l'équation.

- a) $y' - y = -x^2$, $p = ax^2 + bx + c$; solution nulle en 0. b) $y' - y = 5 \cos 2x$, $p = a \cos 2x + b \sin 2x$.
c) $y' - 3y = (2x + 1)e^{3x}$: pourquoi aucune $(ax + b)e^{3x}$ ne convient-elle ? Chercher $p = (ax^2 + bx)e^{3x}$;
d) $y' - y = -x^2 + 2e^{-x}$ (utiliser a) et chercher ae^{-x}) ; solution telle que $f(0) = 1$.

Exercice 4 Second ordre : les trois cas ★

corrigé p. 42

- Résoudre : a) $y'' - 5y' - 14y = 0$; b) $16y'' - 8y' + y = 0$; c) $y'' - 4y' + 29y = 0$; d) $y'' + 7y = 0$; e) $4y'' - 4\sqrt{3}y' + 3y = 0$; f) $6y'' - y' - y = 0$; g) $2y'' + 2y' + y = 0$; h) $y'' = 3y$.
- Solution f de a) telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 9$; de b) telle que $f(0) = 4$, $f'(0) = 2$; de c) telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 5$. Solution f de d) telle que $f(0) = \sqrt{3}$, $f'(0) = \sqrt{7}$: l'écrire $R \cos(\sqrt{7}x - \varphi)$ ($R > 0$) ; amplitude, période, maxima.

Exercice 5 Changements de fonction guidés ★

corrigé p. 42

- $y'' + 3y' = 9$: quelle équation vérifie $z = y'$? Résoudre ; solution telle que $f(0) = f'(0) = 0$.
- $y' + 2y = \frac{2x}{1+x^2}e^{-2x}$: montrer que f est solution si et seulement si $z = fe^{2x}$ vérifie $z' = \frac{2x}{1+x^2}$; résoudre ; solution telle que $f(0) = 1$, son signe et ses limites.

3. $y'' - 4y = 8$: montrer que f est solution si et seulement si $f + 2$ est solution de $y'' - 4y = 0$; résoudre. Montrer que la solution telle que $f(0) = f'(0) = 0$ est $(e^x - e^{-x})^2$.

Exercice 6 Second membre polynomial, puis résonant ★

corrigé p. 42

1. (E) : $y'' - 2y' - 3y = 5 - 4x - 3x^2$. Trouver une solution p de la forme $ax^2 + bx + c$; montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de $y'' - 2y' - 3y = 0$. Résoudre (E) ; solution telle que $f(0) = f'(0) = 0$. 2. (F) : $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$: pourquoi aucune fonction ae^{3x} ne convient-elle ? Chercher une solution axe^{3x} et résoudre (F).

Exercice 7 Vrai ou faux ? ★

corrigé p. 43

Vrai ou faux ? Justifier. a) Les solutions de $y'' + 9y = 0$ sont $\frac{2\pi}{3}$ -périodiques. b) Deux solutions distinctes de $y' = -y + 1$ peuvent avoir le même nombre dérivé en 0. c) Si f est solution de $y'' + ay' + by = 0$, f' aussi. d) $y'' - 2y' + y = 0$ a une solution non nulle qui s'annule en 0 et en 1. e) Il existe a, b tels que xe^x et e^{2x} soient solutions de $y'' + ay' + by = 0$. f) Si $f'' + 4f = 0$ et $f(0) = 0$, alors $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 8 La pression atmosphérique ★

corrigé p. 43

Dans un modèle d'atmosphère isotherme, la pression $p(h)$ (en hPa) à l'altitude h (en m) vérifie $p' = -kp$ ($k > 0$), avec $p(0) = 1013$ et $p(1000) = 899$. 1. Exprimer $p(h)$; valeurs exacte et approchée de k . Montrer que la pression baisse du même pourcentage à chaque kilomètre gravi. 2. Pression au sommet de l'Everest (8849 m) ? Altitude où elle est la moitié de celle du niveau de la mer ? Altitude d'un randonneur dont l'altimètre indique 750 hPa ?

16

Niveau 2 · Bac

Exercice 9 Problème : la fonction $e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$ ★★

corrigé p. 43

Partie I. Soit (E) : $y' - y = -\frac{e^x}{1+x^2}$. 1. Avec $z = fe^{-x}$, résoudre (E). 2. Montrer que la solution $x \mapsto e^x(C - \arctan x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $C \geq \frac{\pi}{2}$.

Partie II. Soit $f(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$ et C_f sa courbe (repère orthonormé).

- Limite de f en $-\infty$. Pour $x > 0$, montrer que $f(x) = e^x \arctan \frac{1}{x} \geq \frac{xe^x}{1+x^2}$; limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
- À l'aide de (E), montrer que $f' = e^x g$, où $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}$; étudier g , puis montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
- Tangente T en 0 ; calculer $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Tracer T et C_f .

Exercice 10 Problème : l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ ★★

corrigé p. 44

Partie I. Vérifier que $p(x) = x$ est solution de (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$; montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de $y'' - 3y' + 2y = 0$. Résoudre (E) ; solution f telle que $f(0) = -1, f'(0) = 1$.

Partie II. Soit $f(x) = x - 2e^x + e^{2x}$, C_f sa courbe et $\Delta : y = x$.

- Montrer que Δ est asymptote à C_f en $-\infty$; position relative ; branche infinie en $+\infty$.
- Montrer que $f'(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$; variations. Montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution α , et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
- Point d'inflexion I . Tracer Δ et C_f . 4. Pour $a < \ln 2$, calculer l'aire $A(a)$ du domaine limité par C_f , Δ et les droites $x = a, x = \ln 2$; limite quand $a \rightarrow -\infty$.

Exercice 11 Le changement de fonction $z = \frac{1}{y}$ ★★

corrigé p. 44

Soit (E) : $y' = y - xy^2$ (non linéaire).

1. Soit f ne s'annulant pas sur un intervalle I : montrer que f est solution de (E) sur I si et seulement si $z = \frac{1}{f}$ est solution de (F) : $z' + z = x$; résoudre (F).
2. Étudier $\varphi_C(x) = x - 1 + Ce^{-x}$; en déduire que les solutions de (E) strictement positives sur $\mathbb{R}$ sont les $f_C = \frac{1}{\varphi_C}$, $C > 1$. Limites et maximum de f_C .
3. Solution telle que $f(0) = -1$: plus grand intervalle contenant 0 où elle est définie ; comportement au bord.

Exercice 12 Une solution qu'on ne sait pas calculer ★★

corrigé p. 45

Soit (E) : $y' + y = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Avec $z = ye^x$, montrer que les solutions sont les $x \mapsto Ce^{-x} + F(x)$, où $F(x) = \int_0^x \frac{e^{t-x}}{1+t^2} dt$.
2. Pour $x > 0$, montrer (couper l'intégrale en $\frac{x}{2}$) que $0 < F(x) \leq e^{-\frac{x}{2}} + \frac{4}{4+x^2}$. Limite en $+\infty$ de toute solution ?
3. Montrer que F admet un maximum sur $[0, +\infty[$, atteint en un réel $x_0 > 0$, et que $F(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$.

Exercice 13 Le freinage d'un bateau ★★

corrigé p. 45

Un bateau lancé à 10 m/s coupe son moteur à $t = 0$ (t en s) ; $v(t)$ est sa vitesse et $x(t)$ la distance parcourue ($x(0) = 0$, $x' = v$). On compare trois modèles de résistance de l'eau. 1. $v' = -0,2v$: calculer v et x . Le bateau s'arrête-t-il ? Quelle distance parcourt-il au plus ? 2. $v' = -0,02v^2$: avec $z = \frac{1}{v}$, calculer v et x ; limites ? 3. $v' = -0,2v - 0,02v^2$: avec $z = \frac{1}{v}$, montrer que $v(t) = \frac{10}{2e^{t/5} - 1}$ et $x(t) = 50 \ln(2 - e^{-t/5})$. Distance totale ? Comparer.

Exercice 14 Un circuit RLC série ★★

corrigé p. 45

Un condensateur ($C = 2$ mF), chargé sous $U_0 = 10$ V, se décharge à $t = 0$ dans une bobine ($L = 0,2$ H) en série avec un conducteur ohmique ($R = 12$ Ω) : sa charge $q(t)$ (t en s) vérifie $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$, $q(0) = CU_0$, $q'(0) = 0$; l'intensité est $i = q'$.

1. Montrer que $q'' + 60q' + 2500q = 0$; nature du régime, pseudo-période T . Déterminer $q(t)$, l'écrire $Q e^{-30t} \cos(40t - \varphi)$ ($Q > 0$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$) ; calculer $i(t)$.
2. Sans la question 1, montrer que l'énergie $E = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2$ vérifie $E' = -Ri^2$. Calculer $E(0)$ et $E(T)$.
3. Pour quelle valeur R_c de R le régime est-il critique ? $q(t)$ dans ce cas ?

Exercice 15 Le changement de fonction $z = e^y$ ★★

corrigé p. 46

Soit (E) : $y' + 1 = e^{2x-y}$ (non linéaire).

1. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $z = e^f$ est une solution strictement positive de $z' + z = e^{2x}$; résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la solution nulle en 0. Montrer que $f(x) = \ln \frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{3}$ et $f'(x) = 2 - \frac{6}{e^{3x} + 2}$. Variations, signe, convexité.
3. Montrer que $D : y = 2x - \ln 3$ et $D' : y = -x + \ln \frac{2}{3}$ sont asymptotes à C_f , qui est au-dessus. Tracer D , D' , C_f .

Exercice 16 Un coefficient en $\cos x$ ★★

corrigé p. 46

Soit, sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'équation (E) : $y' \cos x + y \sin x = 1$. 1. Avec $z = \frac{y}{\cos x}$, résoudre (E) ; montrer que ses solutions sont les restrictions à I des solutions g de $y'' + y = 0$ telles que $g'(0) = 1$. 2.

Montrer que chaque solution s'annule exactement une fois sur I . Quelle solution a un maximum égal à 2 sur I ? L'écrire $R \cos(x - \varphi)$.

17

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Raccordement en 0 ★★★

corrigé p. 47

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(E_\alpha) : xy' = \alpha y$ (le coefficient de y' s'annule en 0).

1. Soit f dérivable sur $I =]0, +\infty[$ (resp. $I =]-\infty, 0[$) : montrer que f est solution de (E_α) sur I (resp. J) si et seulement si $x \mapsto f(x)|x|^{-\alpha}$ est constante.
2. Montrer qu'une solution sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 0$ si $\alpha \neq 0$. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ (cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$).
3. Pour $\alpha = 2$, combien de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifient $f(1) = 1$? Pourquoi pas d'unicité ?

Exercice 18 Une équation de Riccati ★★★

corrigé p. 47

Soit $(R) : y' = 2 - y - y^2$ (non linéaire).

1. Solutions constantes ? Soit f deux fois dérivable, strictement positive sur un intervalle I : montrer que $\frac{f'}{f}$ est solution de (R) sur I si et seulement si $f'' + f' - 2f = 0$.
2. En déduire les solutions $\frac{Ae^x - 2Be^{-2x}}{Ae^x + Be^{-2x}}$ (on admet qu'il n'y en a pas d'autres). Solution telle que $y(0) = 0$: domaine, variations, limites.
3. Solution telle que $y(0) = 3$; plus grand intervalle contenant 0 où elle est définie ; limites aux bornes.

Exercice 19 Équations avec $f(-x)$ ★★★

corrigé p. 47

1. Soient a, b réels, $b \neq 0$, et f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = af(x) + bf(-x)$ pour tout x . Montrer que f est deux fois dérivable et que $f'' = (a^2 - b^2)f$. Déterminer ces fonctions pour $a = 1$, $b = 2$ (forme $R \cos(\sqrt{3}x - \varphi)$), puis pour $a = b$.
2. Soit f deux fois dérivable telle que $f''(x) = f(-x)$ pour tout x , et p, q ses parties paire et impaire. Montrer que $p'' = p$ et $q'' = -q$; en déduire toutes ces fonctions, et celle telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice 20 Chute avec frottement quadratique ★★★

corrigé p. 48

Une bille tombe verticalement ; sa position $x(t)$ (en m, axe vers le bas, t en s) vérifie $x'' = 10 - 0,1 x'^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \geq 0$. Soit $z = e^{x/10}$. 1. Montrer que $z'' = z$, $z(0) = 1$ et $z'(0) = \frac{v_0}{10}$. 2. Cas $v_0 = 5$: déterminer $x(t)$ et $v = x'$; montrer que v croît vers 10 m/s, et que la droite $x = 10t - 10 \ln \frac{4}{3}$ est asymptote à la courbe de x . 3. Cas $v_0 = 15$: montrer que v décroît vers 10 m/s.

Exercice 21 Trajectoires orthogonales ★★★

corrigé p. 48

1. Pente en $M(x, y)$ de la courbe $y = Ce^x$ ($C > 0$) qui passe par M ? Soit $\varphi > 0$ dérivable sur un intervalle : montrer que sa courbe coupe orthogonalement (tangentes perpendiculaires) toutes ces courbes si et seulement si $\varphi\varphi' = -1$; avec $z = \varphi^2$, trouver φ . Nature de ces courbes ?
2. Même question pour les paraboles $y = Cx^2$ dans le quart de plan $x > 0$, $y > 0$: montrer que les trajectoires orthogonales sont des arcs d'ellipses $x^2 + 2y^2 = c$.

Exercice 22 Le changement de variable $x = \tan t$ ★★★

corrigé p. 48

Soit $\lambda > 0$ et $(E_\lambda) : (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + \lambda^2 y = 0$. À f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on associe $g(t) = f(\tan t)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Calculer g' et g'' ; montrer que f est solution de (E_λ) si et seulement si $g'' + \lambda^2 g = 0$.
2. Exprimer $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$, $\cos(2 \arctan x)$ et $\sin(2 \arctan x)$ en fonction de x ; résoudre (E_1) et (E_2) .
3. Solution f de (E_2) telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$; l'écrire $\sqrt{2} \cos\left(2 \arctan x - \frac{\pi}{4}\right)$; maximum, limites.

Exercice 23 Une réaction $A + B \rightarrow C$ ★★★

corrigé p. 49

Pour la réaction $A + B \rightarrow C$, la concentration $x(t)$ de C (en mol/L, t en min) vérifie $x' = k(a - x)(b - x)$, $x(0) = 0$, où $a = 2$ et $b = 1$ sont les concentrations initiales de A et B , et $k = 0,5$. On admet que $0 \leq x(t) < 1$. 1. Soit $z = \frac{b-x}{a-x}$: montrer que $z' = k(b-a)z$ et en déduire $x(t) = \frac{2(1-e^{-t/2})}{2-e^{-t/2}}$. 2. Variations et limite de x ; réactif limitant ? Quand la vitesse x' est-elle maximale ? Au bout de combien de temps 90 % de B a-t-il réagi ?

18

Niveau 4 · Concours**Exercice 24 La loi de Maxwell ★★★**

corrigé p. 49

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, non nulle, telle que $f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ pour tous réels x, y (hypothèse de Maxwell).

1. Montrer que $f(0) = 1$, que f est paire et que $f(x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2$. En déduire que $f > 0$ (par l'absurde, avec la suite $\frac{x_0}{2^{n/2}}$).
2. Pour $x > 0, y > 0$, dériver la relation par rapport à x , puis à y : montrer que $\frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{f'(y)}{yf(y)}$, puis qu'il existe un réel a tel que $f'(x) = 2axf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Avec $z = fe^{-ax^2}$, montrer que $f(x) = e^{ax^2}$. Réciproque ? Quelles solutions tendent vers 0 en $+\infty$?

Exercice 25 L'équation $y' = \sin y$ ★★★

corrigé p. 49

On cherche les f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = \sin f$.

1. Solutions constantes ? Si f est solution, montrer que $x \mapsto f(x + c)$, $-f$ et $f + 2\pi$ le sont aussi.
2. *Unicité.* Soient f, g deux solutions égales en x_0 , et $d = f - g$. Montrer que $|d'| \leq |d|$, que $d^2 e^{-2x}$ décroît et que $d^2 e^{2x}$ croît ; conclure.
3. Soit f une solution telle que $f(0) = y_0 \in]0, \pi[$. Montrer que $0 < f < \pi$ sur $\mathbb{R}$, et que f est strictement croissante.
4. Avec $z = \tan \frac{f}{2}$, montrer que $f(x) = 2 \arctan\left(e^x \tan \frac{y_0}{2}\right)$; limites. Point d'inflexion pour $y_0 = \frac{2\pi}{3}$? Allure des courbes intégrales ?

Exercice 26 Quand l'unicité tombe en défaut ★★★

corrigé p. 50

Soit $(E) : y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ (avec $|0|^{\frac{2}{3}} = 0$).

1. Montrer que 0 et les $x \mapsto (x - c)^3$ ($c \in \mathbb{R}$) sont solutions sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il unicité de la solution telle que $f(0) = 0$?
2. Soit f une solution : montrer que f croît, que $\left(f^{\frac{1}{3}}\right)' = 1$ là où $f > 0$ et $\left((-f)^{\frac{1}{3}}\right)' = -1$ là où $f < 0$. En déduire les solutions : $f_{a,b}$ égale à $(x - a)^3$ sur $]-\infty, a]$, à 0 sur $[a, b]$, à $(x - b)^3$ sur $[b, +\infty[$ ($-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$).
3. Combien de solutions vérifient $f(1) = 1$? Montrer qu'aucun K ne vérifie $\left|3|u|^{\frac{2}{3}} - 3|v|^{\frac{2}{3}}\right| \leq K|u - v|$ pour tous u, v (méthode de l'exercice 25 ?).

Exercice 27 L'équation $y'' + y = g$ ★★★★★

corrigé p. 50

Soient g continue sur un intervalle $I \ni 0$, f deux fois dérivable sur I , $u = f \cos x - f' \sin x$ et $v = f \sin x + f' \cos x$.

1. Montrer que $u' = -(f'' + f) \sin x$, $v' = (f'' + f) \cos x$ et $f = u \cos x + v \sin x$. En déduire que f est solution de $y'' + y = g$ sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \sin x + \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$ (formule de Duhamel).
2. Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. On suppose $I = \mathbb{R}$ et g 2π -périodique. Montrer qu'une solution f est 2π -périodique si et seulement si $f(2\pi) = f(0)$ et $f'(2\pi) = f'(0)$; en déduire que toutes les solutions sont 2π -périodiques si $\int_0^{2\pi} g(t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} g(t) \sin t dt = 0$, et qu'aucune ne l'est sinon. Cas $g = \cos^2$ et $g = \sin^3$.

Exercice 28 La courbe de poursuite ★★★★★

corrigé p. 51

Un lièvre part de O et monte sur l'axe (Oy) à la vitesse v ; un chien part en même temps de $(1, 0)$ et court vers lui à la vitesse $w > v$ en le visant toujours. On admet qu'il décrit la courbe d'une f deux fois dérivable sur $]0, 1]$, avec $f(1) = f'(1) = 0$ et $xf'' = k\sqrt{1 + f'^2}$, où $k = \frac{v}{w} \in]0, 1[$.

1. Soit $u = f' + \sqrt{1 + f'^2}$: montrer que $u > 0$ et $xu' = ku$; en déduire $u(x) = x^k$ (exercice 17), puis $f'(x) = \frac{1}{2}(x^k - x^{-k})$.
2. En déduire f . Où le chien attrape-t-il le lièvre? Distance parcourue par le chien? Cas $k = \frac{1}{2}$.
3. Cas $k = 1$: déterminer f ; montrer que le chien n'attrape pas le lièvre et que leur distance tend vers $\frac{1}{2}$ (la tangente en $(x, f(x))$ passe par le lièvre).

Exercice 29 Un principe du maximum ★★★★★

corrigé p. 51

1. Soit f deux fois dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f'' \geq f$, $f(0) \leq 0$ et $f(1) \leq 0$. Si f prend une valeur > 0 et est maximale en c , montrer que $c \in]0, 1[$, $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$; en déduire une contradiction. Conclure: $f \leq 0$ sur $[0, 1]$.
2. En déduire que le problème $y'' - y = g$, $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$ (g continue) a au plus une solution. 3. Déterminer la solution w de $y'' - y = -1$ telle que $w(0) = w(1) = 0$; montrer que $0 \leq w \leq w\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{e}}{1+e}$.
4. Si $f(0) = f(1) = 0$ et $|f'' - f| \leq M$ sur $[0, 1]$, montrer que $|f| \leq Mw$, puis que $|f| \leq 0,12 M$.

Exercice 30 Le frottement solide ★★★★★

corrigé p. 52

Un palet relié à un ressort glisse avec frottement solide; en unités adaptées, tant qu'il bouge, sa position $x(t)$ vérifie $x'' + x = \mu$ si $x' < 0$, et $x'' + x = -\mu$ si $x' > 0$ ($\mu > 0$); immobile en x , il y reste si et seulement si $|x| \leq \mu$. On le lâche sans vitesse en $x(0) = a > \mu$ (x est dérivable).

1. Montrer que $x(t) = \mu + (a - \mu) \cos t$ sur $[0, \pi]$. Soit $a_k = a - 2k\mu$: montrer par récurrence que, si $a_k > \mu$, alors $x(t) = (-1)^k [\mu + (a_k - \mu) \cos(t - k\pi)]$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, et $x((k+1)\pi) = (-1)^{k+1} a_{k+1}$.
2. En déduire que le palet s'arrête définitivement à l'instant $N\pi$, où N est le plus petit entier tel que $a - 2N\mu \leq \mu$. Comment décroissent les amplitudes (comparer avec l'exercice 14)? Application: $a = 10$, $\mu = 0,8$.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Premier ordre $y' = ay + b$

Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les $x \mapsto Ce^{ax} + \ell$, où $\ell = -\frac{b}{a}$ est la **solution constante**. Comme $f - \ell$ est solution de $y' = ay$, elle garde un signe constant : la droite $y = \ell$ sépare les courbes intégrales. Une condition $f(x_0) = y_0$ fixe une unique solution.

Exercice 31 Résoudre, puis ajuster une condition ★

corrigé p. 52

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, et donner leur solution constante.

$$(E_1) : 4y' - 3y = 0 \quad (E_2) : 3y' - 4y + 12 = 0 \quad (E_3) : 2y' + 5y + 10 = 0 \quad (E_4) : y' + (\ln 2)y = \ln 4$$

2. Déterminer la solution f_k de (E_k) telle que : a) $f_1(4) = e^3$; b) la courbe de f_2 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{3}{4} \ln 3$; c) $f_3'(0) = 5$; d) $f_4(1) = 3$ (montrer que $f_4(x) = 2 + 2^{1-x}$ et donner ses limites en $\pm\infty$).

3. Déterminer la solution g de $y' + 3y = 3$ dont la valeur moyenne sur $[0, \ln 2]$ est égale à $1 + \frac{7}{12 \ln 2}$.

Exercice 32 Le faisceau des courbes intégrales ★

corrigé p. 53

On considère l'équation $(E) : 2y' + 3y = 9$.

1. Résoudre (E) et donner sa solution constante ℓ .
2. Soient f et g deux solutions de (E) . Montrer que $f - g$ est solution de $2y' + 3y = 0$; en déduire que, si $f(x_0) = g(x_0)$ pour un réel x_0 , alors $f = g$. Que peut-on dire de deux courbes intégrales distinctes ?
3. Soit f une solution non constante. Montrer que $f' = -\frac{3}{2}(f - 3)$ et $f'' = \frac{9}{4}(f - 3)$; en déduire les variations et la convexité de f selon la position de sa courbe par rapport à la droite $\Delta : y = 3$.
4. Montrer que, si f est solution de (E) , alors $6 - f$ l'est aussi. Interpréter graphiquement.
5. Montrer que, si f est solution, alors $x \mapsto f(x + c)$ l'est aussi pour tout réel c . En déduire que toute courbe intégrale autre que Δ est l'image, par une translation de vecteur colinéaire à $\vec{i}$, de la courbe de $u : x \mapsto 3 + e^{-\frac{3}{2}x}$ ou de celle de $v : x \mapsto 3 - e^{-\frac{3}{2}x}$.

Exercice 33 Équations différentielles et suites ★★

corrigé p. 53

Soient $a \neq 0$ et b deux réels, $\ell = -\frac{b}{a}$, et f une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y' = ay + b$.

1. Montrer que, pour tous réels x et h : $f(x + h) - \ell = e^{ah}(f(x) - \ell)$.
2. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ vérifie $u_{n+1} = e^a u_n + \ell(1 - e^a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis exprimer u_n en fonction de n , u_0 , a et ℓ .

3. On suppose que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 8$. Déterminer e^a , puis a , b et f . Calculer $\sum_{k=0}^n f(k)$.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$. Déterminer une équation $y' = ay + b$ et une solution g de cette équation telles que $v_n = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire v_n .

Exercice 34 Des courbes définies par leurs tangentes ★★

corrigé p. 54

Dans cet exercice, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée **ne s'annule pas**, C est sa courbe dans un repère orthonormé et T_x la tangente à C au point $M(x, f(x))$.

- Montrer que T_x coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- Déterminer les fonctions f telles que, pour tout réel x , T_x coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $x - 2$.
- Déterminer les fonctions f telles que, pour tout réel x , T_x coupe la droite $D : y = 3$ au point d'abscisse $x + 2$. Montrer que D est asymptote à toutes les courbes obtenues, et donner celle qui passe par $A(0, 1)$.

Exercice 35 La méthode d'Euler ★★★

corrigé p. 54

On considère l'équation (E) : $y' = 1 - 2y$ et sa solution f telle que $f(0) = 0$.

- Déterminer f , et montrer que sa courbe est concave.
- Méthode d'Euler.** On fixe $x > 0$, un entier $n > 2x$, et $h = \frac{x}{n}$. On remplace la courbe de f sur $[0, x]$ par la ligne brisée $M_0 M_1 \dots M_n$, où $M_k(kh, u_k)$, avec $u_0 = 0$ et $u_{k+1} = u_k + h(1 - 2u_k)$: le segment $[M_k M_{k+1}]$ porte la tangente en M_k à la courbe intégrale Γ_k de (E) passant par M_k . Montrer que $u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2h)^k$ pour $0 \leq k \leq n$, et en déduire u_n .
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n = e^{-2x}$ (on rappelle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$), puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(x)$.
- Montrer que $\ln(1 - t) \leq -t$ pour $t < 1$, puis que $u_n \geq f(x)$: la méthode donne ici une valeur approchée **par excès**. Expliquer ce résultat à l'aide de la concavité des courbes Γ_k .
- Pour $x = 1$, calculer u_{10} et $f(1)$ à 10^{-4} près.

Exercice 36 Une équation non linéaire : $y' = 1 + |y|$ ★★★

corrigé p. 55

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que (E) : $f'(x) = 1 + |f(x)|$ pour tout réel x .

- Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 0$.
 - Montrer que f est strictement croissante, et en déduire le signe de $f(x)$ selon x .
 - En étudiant $x \mapsto (1 + f(x))e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$ et $x \mapsto (1 - f(x))e^x$ sur $]-\infty, 0]$, montrer que $f = \varphi$, où $\varphi(x) = e^x - 1$ si $x \geq 0$ et $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ si $x < 0$.
- Réciproquement, montrer que φ est dérivable en 0, puis qu'elle est solution de (E). Étudier sa parité, et montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
 - En étudiant $x \mapsto f(x) - x$, montrer que $f(x) \leq 1 + x$ pour $x \leq 0$; en déduire que f s'annule en un unique réel $\alpha \in [-1, 0[$.
 - Montrer que $f(x) = e^{x-\alpha} - 1$ pour $x \geq \alpha$, puis calculer α ; déterminer $f(x)$ pour $x \leq \alpha$.

20

Se ramener à une équation connue

On change de fonction ($z = y - p$, $z = y'$, $z = ye^{kx}$...) ou de variable ($x = e^t$, $x = \tan t$...) pour obtenir une équation de type connu ; on la résout, puis on revient à y . Chaque étape doit être une **équivalence**. Si p est une solution d'une équation linéaire (E) : f est solution de $(E) \iff f - p$ est solution de l'équation homogène associée.

Exercice 37 Solution particulière, puis solution générale ★

corrigé p. 55

- Pour chaque équation, déterminer une solution particulière p de la forme indiquée, puis résoudre l'équation.
 - $y' + y = x^2 + 2x - 1$, $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; donner la solution nulle en 0.
 - $y' + \sqrt{3}y = 4 \cos x$, $p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$; écrire p sous la forme $R \cos(x - \theta)$ ($R > 0$), et montrer que p est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
 - $2y' + y = (3x + 8)e^x$, $p(x) = (\alpha x + \beta)e^x$; donner la solution f telle que $f(0) = 0$.
 - $y'' + 25y = 25$, p constante ; montrer que la solution f telle que $f(0) = f'(0) = 0$ est $f(x) = 2 \sin^2 \frac{5x}{2}$.
- On considère (F) : $y'' - 2y' = 4x$. Montrer que f est solution de (F) si et seulement si $z = f'$ est solution d'une équation du premier ordre que l'on précisera. Résoudre cette équation (chercher une solution affine), puis (F) .

Exercice 38 Polynôme, exponentielle et parabole (examen) ★★

corrigé p. 56

Partie I. On considère l'équation (E) : $y' - 2y = 2 - 4x^2$.

- Déterminer le polynôme p de degré 2 qui est solution de (E) .
- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de $y' = 2y$. Résoudre (E) , puis déterminer sa solution f telle que $f(0) = -1$.

Partie II. Soit $f(x) = 2x^2 + 2x - e^{2x}$, C_f sa courbe dans un repère orthonormé et P la parabole d'équation $y = 2x^2 + 2x$.

- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x^2 - 2x)$; étudier la position de C_f par rapport à P . Étudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Étudier les variations de f' , et en déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $I(0, -1)$ est un point d'inflexion de C_f , en lequel la tangente est horizontale.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $-1,1 < \alpha < -1$. Tracer P et C_f .
- Pour $\lambda < 0$, calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine compris entre C_f , P et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$, puis $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

Exercice 39 Le changement de variable $x = e^t$ ★★

corrigé p. 56

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$; on lui associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^t)$, de sorte que $f(x) = g(\ln x)$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$: $x f'(x) = g'(\ln x)$ et $x^2 f''(x) = g''(\ln x) - g'(\ln x)$.
2. Montrer que f est solution de (E_1) : $xy' - 2y = x^3$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si g est solution de $z' - 2z = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$. Résoudre (E_1) , puis donner la solution qui s'annule en 1.
3. On considère l'équation (E_2) : $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
 - a) Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si $g'' - 2g' + 2g = 0$. Résoudre (E_2) .
 - b) Déterminer la solution f de (E_2) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$. Montrer qu'elle s'annule une infinité de fois dans $]0, 1]$, et calculer sa limite en 0.
4. Résoudre de même (E_3) : $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$ sur $]0, +\infty[$. Quelles sont les solutions de (E_3) qui ont une limite finie en 0 ?

Exercice 40 Le facteur e^{kx} ★★

corrigé p. 57

On considère l'équation (E) : $y' + y = \sin(e^x)$.

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z(x) = f(x)e^x$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $z'(x) = e^x \sin(e^x)$ pour tout réel x . Résoudre (E) .
2. Montrer que toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $+\infty$, et qu'une seule d'entre elles, notée f , a une limite finie en $-\infty$. Montrer que $f(x) = 2e^{-x} \sin^2\left(\frac{e^x}{2}\right)$ et préciser cette limite.
3. Montrer que $f \geq 0$ et déterminer les zéros $x_1 < x_2 < \dots$ de f . Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_{k+1} - x_k)$.
4. Montrer que $1 - \cos u \leq \frac{u^2}{2}$ pour tout réel u , puis que $f(x) \leq \frac{e^x}{2}$ et $f(x) \leq 2e^{-x}$; en déduire que $0 \leq f \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.
5. En utilisant (E) , montrer que si f admet un extremum local en x_0 , alors le point $(x_0, f(x_0))$ appartient à la courbe de $x \mapsto \sin(e^x)$.

Exercice 41 Le changement de variable $x = t^2$ ★★★

corrigé p. 57

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$; on lui associe la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = f(t^2)$, de sorte que $f(x) = g(\sqrt{x})$.

1. Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$, puis montrer que, pour tout $x > 0$: $4x f''(x) + 2f'(x) = g''(\sqrt{x})$.
2. En déduire les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$.
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 0$. Déterminer ses zéros et les réels en lesquels elle atteint son maximum : que remarque-t-on sur les écarts entre deux zéros consécutifs ?
4. Montrer qu'une solution $x \mapsto A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$ de (E) se prolonge en une fonction dérivable (à droite) en 0 si et seulement si $B = 0$, et donner alors son nombre dérivé en 0.
5. Résoudre de même (F) : $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$. Quelles sont ses solutions bornées ?

Exercice 42 Second ordre : le changement $z = y e^x$ ★★★

corrigé p. 58

On considère l'équation (E) : $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$.

1. Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z(x) = f(x) e^x$. Montrer que $z'' = (f'' + 2f' + f) e^x$, et en déduire que f est solution de (E) si et seulement si $z''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x .
2. Par une intégration par parties, déterminer la primitive de $\arctan$ nulle en 0.
3. Résoudre (E), puis déterminer sa solution f telle que $f(0) = f'(0) = 0$.
4. En étudiant z , montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout réel x , avec égalité seulement en 0.
5. Limites de f en $\pm\infty$? Montrer que toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $+\infty$.

21

Second ordre homogène

Pour (E) : $y'' + ay' + by = 0$, on résout $r^2 + ar + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$: si $\Delta > 0$, $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$; si $\Delta = 0$, $y = (C_1 x + C_2) e^{rx}$; si $\Delta < 0$ (racines $\alpha \pm i\beta$), $y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) = R e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$. Les conditions $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ déterminent une **unique** solution (si $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, alors $f = 0$).

Exercice 43 Les trois cas, sans hésiter ★

corrigé p. 58

Pour chaque équation : résoudre dans $\mathbb{R}$, puis déterminer la solution f qui vérifie les conditions indiquées.

- | | |
|---|--|
| a) $y'' - y' - 12y = 0$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 7$. | d) $2y'' + y' - y = 0$; $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. |
| b) $25y'' + 20y' + 4y = 0$; $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$. | e) $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$; $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. |
| c) $y'' + 2y' + 17y = 0$; $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$. | f) $2y'' + 2y' + 5y = 0$; $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{6}}$. |

Les conditions de d) et f) fixent-elles bien une unique solution ? Et dans f), avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$?

Exercice 44 La forme $R \cos(\beta x - \varphi)$ ★

corrigé p. 59

On considère l'équation (E) : $4y'' + 9y = 0$.

1. Résoudre (E), puis déterminer sa solution f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. Montrer que $f(x) = 2 \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$. Donner l'amplitude et la période de f , ainsi que les réels en lesquels f atteint son maximum.
3. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $f(x) = 1$, puis l'inéquation $f(x) \geq 1$.
4. Déterminer les solutions de (E) d'amplitude 3 qui s'annulent en $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 45 Une étude complète (examen) ★★

corrigé p. 59

Partie I. Résoudre l'équation (E) : $2y'' - 5y' + 2y = 0$, puis déterminer sa solution f telle que $f(0) = -3$ et $f'(0) = 0$.

Partie II. Soit $f(x) = e^{2x} - 4e^{\frac{x}{2}}$, et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et étudier les branches infinies de C_f .
2. Montrer que $f'(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{3x}{2}} - 1\right)$ et dresser le tableau de variations de f .

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$; on note α sa solution. Étudier le signe de f .
- Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion I , d'abscisse $-\alpha$, et calculer son ordonnée.
- Tracer C_f . Discuter, selon le réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie III. Pour $\lambda < \alpha$, on pose $J(\lambda) = \int_{\lambda}^{\alpha} f(x) dx$.

- En intégrant l'égalité $2f'' - 5f' + 2f = 0$ sur $[\lambda, \alpha]$, montrer que $J(\lambda) = \frac{5}{2}(f(\alpha) - f(\lambda)) - (f'(\alpha) - f'(\lambda))$.
- En déduire $J(\lambda)$, puis la limite, quand $\lambda \rightarrow -\infty$, de l'aire du domaine compris entre C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = \lambda$ et $x = \alpha$.

Exercice 46 Zéros et extremums des solutions ★★

corrigé p. 60

Soient a, b deux réels, $(E) : y'' + ay' + by = 0$, $\Delta = a^2 - 4b$, et f une solution **non nulle** de (E) .

- On suppose $\Delta > 0$. En écrivant $f(x) = e^{r_2 x} (C_1 e^{(r_1 - r_2)x} + C_2)$, montrer que f s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Même question si $\Delta = 0$.
- On suppose $\Delta < 0$, et on note $\alpha \pm i\beta$ ($\beta > 0$) les racines de l'équation caractéristique.
 - Justifier que $f(x) = R e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$ ($R > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$), puis que les zéros de f sont des réels z_k ($k \in \mathbb{Z}$) tels que $z_{k+1} - z_k = \frac{\pi}{\beta}$.
 - Montrer que $f'(x) = R\rho e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi + \psi)$, où $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\cos \psi = \frac{\alpha}{\rho}$, $\sin \psi = \frac{\beta}{\rho}$. En déduire que f atteint ses extremums en des réels t_k ($k \in \mathbb{Z}$) tels que $t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\beta}$ et $f(t_{k+1}) = -e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}} f(t_k)$.
- Application.* Une solution f de (E) s'annule exactement en tous les entiers relatifs, vérifie $f'(0) = \pi$, et deux extremums consécutifs de f sont dans le rapport $-\frac{1}{e}$. Déterminer a, b et f .

Exercice 47 Le wronskien ★★★

corrigé p. 60

Soient a, b deux réels et $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Pour deux solutions f et g de (E) , on appelle **wronskien** de (f, g) la fonction $W = fg' - f'g$.

- Montrer que $W' = -aW$, puis que $W(x) = W(0)e^{-ax}$ pour tout réel x . En déduire que W est soit identiquement nul, soit jamais nul.
- On suppose $W(0) \neq 0$. Soit h une solution de (E) . Montrer qu'il existe un unique couple (λ, μ) tel que $\lambda f(0) + \mu g(0) = h(0)$ et $\lambda f'(0) + \mu g'(0) = h'(0)$, puis que $h = \lambda f + \mu g$.
- On suppose $W = 0$ et $f \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que $g = kf$ (considérer $f(0)g - g(0)f$ ou $f'(0)g - g'(0)f$). En déduire que deux solutions non nulles ayant un zéro commun sont proportionnelles.
- Entrelacement des zéros.* On suppose $W \neq 0$, et que f s'annule en deux réels $x_1 < x_2$ sans s'annuler entre eux.
 - Montrer que $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$ sont non nuls et de signes contraires.
 - En calculant $W(x_1)$ et $W(x_2)$, montrer que g s'annule au moins une fois dans $]x_1, x_2[$.
- Application.* Vérifier que $u(x) = e^{-3x} \cos 4x$ et $v(x) = e^{-3x} \sin 4x$ sont solutions de $y'' + 6y' + 25y = 0$, calculer leur wronskien, et en déduire toutes les solutions de cette équation. Vérifier sur u et v la propriété de la question 4.

Exercice 48 Le cas $\Delta = 0$, frontière entre les deux autres ★★★

corrigé p. 61

Pour tout réel m , on considère (E_m) : $y'' - 2y' + (1 - m)y = 0$, et l'on note f_m la solution de (E_m) telle que $f_m(0) = 0$ et $f'_m(0) = 1$.

1. Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = f(x)e^{-x}$. Montrer que f est solution de (E_m) si et seulement si $g'' = mg$.
2. En déduire que, pour tout réel x :

$$f_m(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{m}} (e^{\sqrt{m}x} - e^{-\sqrt{m}x}) \text{ si } m > 0, \quad f_0(x) = x e^x, \quad f_m(x) = \frac{e^x \sin(\sqrt{-m}x)}{\sqrt{-m}} \text{ si } m < 0.$$

3. Soit x un réel fixé. Montrer que $\lim_{m \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow 0^-} f_m(x) = f_0(x)$.
4. Montrer que $e^u - e^{-u} \geq 2u$ et $\sin u \leq u$ pour tout $u \geq 0$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $f_m(x) \geq f_0(x)$ si $m > 0$, et $f_m(x) \leq f_0(x)$ si $m < 0$.
5. Déterminer, selon m , le nombre de zéros de f_m dans $]0, +\infty[$. Pour $m < 0$, on note x_m le plus petit d'entre eux : calculer $\lim_{m \rightarrow 0^-} x_m$ et interpréter.

22 Équations fonctionnelles

L'inconnue est une fonction. On fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre (ou on dérive une intégrale) pour obtenir une **équation différentielle** avec ses conditions initiales ; on la résout, puis on **vérifie** que les fonctions trouvées conviennent (synthèse).

Exercice 49 Trois équations d'addition ★

corrigé p. 61

1. Soit g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x+y) = g(x) + g(y) + g(x)g(y)$ pour tous réels x, y ; on pose $a = g'(0)$.
a) Montrer que $g(0) \in \{0, -1\}$, et que g est constante si $g(0) = -1$. **b)** On suppose $g(0) = 0$. Montrer que $g'(x) = a(1 + g(x))$ pour tout réel x , puis déterminer g et vérifier qu'elle convient.
2. Soit h dérivable sur $]0, +\infty[$ telle que $h(xy) = h(x)h(y)$ pour tous $x > 0, y > 0$; on pose $a = h'(1)$.
a) Montrer que $h(1) \in \{0, 1\}$, et que h est nulle si $h(1) = 0$. **b)** On suppose $h(1) = 1$. Montrer que $x h'(x) = a h(x)$ pour tout $x > 0$. En posant $k(t) = h(e^t)$ ($t \in \mathbb{R}$), montrer que $k' = ak$, puis déterminer h .
3. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)e^{f(y)}$ pour tous réels x, y . Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 50 Trois équations « du parallélogramme » ★

corrigé p. 62

Dans cet exercice, f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$.

1. On suppose que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ pour tous réels x, y .
a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est paire. **b)** En dérivant deux fois par rapport à y , montrer que f'' est constante. En déduire qu'il existe un réel c tel que $f(x) = cx^2$, et vérifier que ces fonctions conviennent.
2. On suppose que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ pour tous réels x, y . Montrer que $f'' + f = 0$ et en déduire f ; vérifier. Déterminer f si de plus $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$, et l'écrire sous la forme $R \cos(x - \varphi)$.
3. Mêmes questions (sans les conditions $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$) avec $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\operatorname{ch} y$.

Exercice 51 Équations intégrales à noyau exponentiel ★★

corrigé p. 62

- Soit λ un réel. On cherche les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $(E_\lambda) : f(x) = 1 + \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$ pour tout réel x .
 - Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = e^{-x} f(x)$. Montrer que f vérifie (E_λ) si et seulement si $g(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^x g(t) dt$ pour tout x .
 - En déduire que f vérifie (E_λ) si et seulement si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f' = (1 + \lambda)f - 1$ et $f(0) = 1$.
 - Résoudre (E_λ) (distinguer $\lambda = -1$ et $\lambda \neq -1$). Pour quelles valeurs de λ la solution est-elle bornée sur $[0, +\infty[$?
- Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = x + 2 \int_0^x e^{t-x} f(t) dt$ pour tout réel x (on posera $g(x) = e^x f(x)$).

Exercice 52 Une équation intégrale à noyau $\min(x, t)$ ★★

corrigé p. 63

Pour f continue sur $[0, 1]$ et $x \in [0, 1]$, on pose $Kf(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$. Soit λ un réel ; on cherche les fonctions f continues sur $[0, 1]$ telles que $(E_\lambda) : f(x) = 1 + \lambda Kf(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- Montrer que $Kf(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$, puis que Kf est deux fois dérivable sur $[0, 1]$, avec $(Kf)'(x) = \int_x^1 f(t) dt$ et $(Kf)'' = -f$. Calculer $Kf(0)$ et $(Kf)'(1)$.
- Montrer que, si f est solution de (E_λ) , alors f est deux fois dérivable, $f'' = -\lambda f$, $f(0) = 1$ et $f'(1) = 0$.
- Réciproquement, soit f deux fois dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f'' = -\lambda f$, $f(0) = 1$ et $f'(1) = 0$, et $u = f - 1 - \lambda Kf$. Montrer que $u'' = 0$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$, et conclure que f est solution de (E_λ) .
- Résoudre (E_1) , puis (E_{-1}) . Plus généralement, soit $\omega > 0$: résoudre $(E_{-\omega^2})$, et montrer que (E_{ω^2}) a une unique solution si $\cos \omega \neq 0$, et aucune si $\cos \omega = 0$.

Exercice 53 L'équation $f(x + y) = f(x) + f(y) + f'(x)f'(y)$ ★★★

corrigé p. 63

On cherche les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que (A) : $f(x+y) = f(x) + f(y) + f'(x)f'(y)$ pour tous réels x, y . On pose $a = f'(0)$ et $b = f''(0)$.

- Montrer que $f(0) = -a^2$ et que $(1 - b)f'(x) = a$ pour tout réel x .
- On suppose $b \neq 1$. Montrer que f' est constante, puis que $f(x) = ax - a^2$; vérifier que ces fonctions conviennent.
- On suppose $b = 1$. **a)** Montrer que $a = 0$ et $f(0) = 0$; on pose $g = f'$. **b)** En dérivant (A) par rapport à x , puis par rapport à y , montrer que $g(x) + g'(x)g(y) = g(y) + g(x)g'(y)$ pour tous réels x, y . **c)** Justifier l'existence d'un réel y_0 tel que $g(y_0) \neq 0$, puis montrer qu'il existe un réel c tel que $g' = 1 + cg$. **d)** En déduire g , puis f (distinguer $c = 0$ et $c \neq 0$).
- Vérifier que les fonctions obtenues en 3 conviennent, et donner toutes les solutions de (A).

Exercice 54 L'équation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ★★★

corrigé p. 64

On cherche les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que (E) : $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que f est deux fois dérivable et que $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ pour tout $x > 0$.
2. Soit f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g(t) = f(e^t)$ ($t \in \mathbb{R}$). Montrer que $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ pour tout $x > 0$ si et seulement si $g'' - g' + g = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que toute solution de (E) s'écrit $f(x) = \sqrt{x} (A \cos(\omega \ln x) + B \sin(\omega \ln x))$, avec $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et A, B réels.
4. Déterminer les réels A et B pour lesquels cette fonction est solution de (E). En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions $f_C : x \mapsto C\sqrt{x} \cos\left(\omega \ln x - \frac{\pi}{6}\right)$, $C \in \mathbb{R}$.
5. Soit f la solution de (E) telle que $f(1) = \sqrt{3}$. Montrer que $-2\sqrt{x} \leq f(x) \leq 2\sqrt{x}$ pour tout $x > 0$, et déterminer les points où la courbe de f touche celle de $x \mapsto 2\sqrt{x}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

23

Modélisation

On traduit une loi (chimie, économie, biologie, mécanique) par une **équation différentielle**, on la résout, puis on **interprète** : équilibre, durée caractéristique, ordre de grandeur.

Exercice 55 Une réaction réversible ★

corrigé p. 65

Un composé A se transforme en son isomère B , et B redonne A (réaction **réversible** $A \rightleftharpoons B$). Les concentrations $a(t)$, $b(t)$ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, t en min) vérifient $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $a' = -0,3a + 0,1b$ et $a + b = 1$.

1. Montrer que $a' = -0,4a + 0,1$. Donner la solution constante de cette équation, puis déterminer $a(t)$ et $b(t)$.
2. Calculer les limites a_∞ et b_∞ de a et b en $+\infty$, puis $K = \frac{b_\infty}{a_\infty}$; comparer à $\frac{0,3}{0,1}$.
3. À quel instant t_1 a-t-on $a = b$? Montrer que l'écart $a(t) - a_\infty$ est divisé par 2 pendant toute durée égale à un même τ , à préciser.
4. Déterminer $a(t)$ et $b(t)$ si B est pur au départ ($a(0) = 0$). L'équilibre dépend-il de l'état initial ?

Exercice 56 Le prix d'équilibre d'un marché ★

corrigé p. 65

Le prix $p(t)$ d'un bien (en dirhams, t en mois) varie proportionnellement à l'excès de la demande D sur l'offre S : $p' = 0,1(D - S)$, avec $S = 10 + 4p$ et $p(0) = 25$.

1. Dans cette question, $D = 100 - 2p$. Montrer que $p' = -0,6p + 9$; déterminer le prix d'équilibre p_e (pour lequel $D = S$), puis $p(t)$ et sa limite. À partir de quel instant a-t-on $p(t) - p_e \leq 0,1$?
2. La demande augmente avec le temps : $D = 100 - 2p + 3,6t$. **a)** Montrer que $p' = -0,6p + 9 + 0,36t$ et déterminer une solution affine de cette équation ; en déduire $p(t)$. **b)** Montrer que le prix commence par baisser ; calculer son minimum. **c)** Le prix d'équilibre instantané $p_e(t)$ est défini par $D = S$: le calculer. Montrer que $p(t) - p_e\left(t - \frac{5}{3}\right)$ tend vers 0 en $+\infty$ et interpréter.

Exercice 57 Une population au rythme des saisons ★★

corrigé p. 66

L'effectif $P(t)$ d'une population d'insectes (t en années, $t = 0$ au début de l'été) vérifie (E) : $P' = r(t)P$, $P(0) = P_0 > 0$, où le taux $r(t) = 0,1 + 0,5 \cos(2\pi t)$ suit les saisons.

1. Soit $R(t) = 0,1t + \frac{\sin(2\pi t)}{4\pi}$. Vérifier que $R' = r$. Soit P une solution de (E) et $z = P e^{-R}$: montrer que $z' = 0$. En déduire que $P(t) = P_0 e^{R(t)}$, et vérifier que cette fonction convient.
2. Montrer que $P(t+1) = e^{0,1} P(t)$ pour tout $t \geq 0$. Calculer $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$; au bout de combien d'années entières l'effectif aura-t-il doublé ?
3. Déterminer les instants de $[0, 1]$ où P est décroissante, et la durée de cette période (en mois).
4. Soit $Q(t) = P_0 e^{0,1t}$ (taux moyen). Montrer que $e^{-\frac{1}{4\pi}} \leq \frac{P(t)}{Q(t)} \leq e^{\frac{1}{4\pi}}$ et interpréter.
5. **Cas général** : r continue et 1-périodique, $m = \int_0^1 r(s) ds$. Montrer que $P(t) = P_0 \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$, que $t \mapsto \int_t^{t+1} r(s) ds$ est constante, puis que $P(t+1) = e^m P(t)$. Limite de $P(n)$ selon le signe de m ?

Exercice 58 Un tunnel à travers la Terre ★★

corrigé p. 66

La Terre est une boule homogène de centre O , de rayon $R = 6400$ km ; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On admet qu'un objet de masse m situé en un point M intérieur à la Terre subit la force $\vec{F} = -\frac{mg}{R} \vec{OM}$. Dans un tunnel rectiligne sans frottement, on lâche un objet sans vitesse depuis la surface.

1. Le tunnel suit un diamètre, sur lequel l'objet a pour abscisse $x(t)$ (origine O , $x(0) = R$, $x'(0) = 0$). Montrer que $x'' + \omega^2 x = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$; calculer ω , puis déterminer $x(t)$.
2. Combien de temps dure la traversée jusqu'aux antipodes ? Quelle est la vitesse maximale de l'objet, et où est-elle atteinte ?
3. Le tunnel suit une corde $[AB]$ de milieu H , de longueur 2ℓ ; l'objet, lâché en A , a pour abscisse $s(t)$ sur (AB) (origine H). La réaction étant perpendiculaire à (AB) , montrer que $s'' + \omega^2 s = 0$, et que la durée du trajet ne dépend pas de la corde. Vitesse maximale si $2\ell = 1000$ km ?
4. Un satellite décrit à vitesse constante v un cercle de rayon R contenant le diamètre du 1, avec $\frac{v^2}{R} = g$. Calculer v et la période ; montrer que sa projection sur ce diamètre a le mouvement de l'objet du 1.

Exercice 59 Un tir avec frottement ★★★

corrigé p. 67

Un projectile est lancé de l'origine O d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\vec{j}$ vertical ascendant ; m, s) avec la vitesse $\vec{v}_0 = 20\vec{i} + 20\vec{j}$. Avec un frottement proportionnel à la vitesse, ses coordonnées vérifient $x'' = -0,5x'$ et $y'' = -10 - 0,5y'$.

1. Déterminer $x'(t)$ et $y'(t)$, puis $x(t)$ et $y(t)$. Calculer les limites de $x(t)$, $x'(t)$ et $y'(t)$ en $+\infty$; interpréter.
2. Déterminer l'instant et les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Sans frottement, la trajectoire serait la parabole $P : y = x - \frac{x^2}{80}$ (à vérifier) : comparer les sommets.
3. Montrer que la trajectoire Γ a pour équation $y = 2x + 40 \ln\left(1 - \frac{x}{40}\right)$, $0 \leq x < 40$. Montrer que Γ est au-dessous de P (étudier $\varphi(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ln(1-u)$ sur $[0, 1]$).
4. Montrer que Γ recoupe (Ox) en un unique point d'abscisse $x_p \in]31,6; 32[$ ($\ln 0,21 \approx -1,5606$, $\ln 0,2 \approx -1,6094$). Comparer à la portée sans frottement.

Exercice 60 La chaîne qui glisse ★★★

corrigé p. 67

Une chaîne homogène de longueur $L = 2$ m repose sur une table, une partie pendant par-dessus le bord ; $x(t)$ est la longueur pendante (en m, t en s), $x(0) = 0,5$, $x'(0) = 0$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\text{ch } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$.

- Sans frottement**, la loi de Newton donne $x'' = \frac{g}{L}x = 5x$. **a)** Déterminer $x(t)$. **b)** Déterminer l'instant t_1 où la chaîne quitte la table ($x = 2$). **c)** Montrer que $x'^2 - 5x^2$ est constante ; en déduire la vitesse de la chaîne à l'instant t_1 .
- Avec frottement** (coefficient $\mu = \frac{1}{4}$ sur la partie posée), on admet que, tant que la chaîne glisse, $x'' = \frac{g}{L}((1 + \mu)x - \mu L)$. **a)** Écrire l'équation ; quelle est sa solution constante ? **b)** En posant $z = x - 0,4$, déterminer $x(t)$, l'instant t_2 où la chaîne quitte la table et sa vitesse à cet instant. **c)** Que se passe-t-il si $x(0) = 0,4$?

24 Défis de concours

Notations : $\text{ch } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$, $\text{sh } u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\text{th } u = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u}$ et $\text{coth } u = \frac{\text{ch } u}{\text{sh } u}$.

Exercice 61 Un principe de moindre action ★★★

corrigé p. 68

Soit C l'ensemble des fonctions y deux fois dérivables sur $[0, 1]$, à dérivée seconde continue, telles que $y(0) = 0$, et $A = \{y \in C : y(1) = 1\}$. On pose $J(y) = \int_0^1 (y'(x)^2 + y(x)^2) dx$.

- Déterminer l'unique fonction u telle que $u'' = u$, $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$.
- Soit $y \in A$ et $h = y - u$. **a)** Montrer que $\int_0^1 (u'h' + uh) dx = 0$. **b)** En déduire que $J(y) = J(u) + J(h) \geq J(u)$, avec égalité si et seulement si $y = u$ (si $J(h) = 0$, étudier $H(x) = \int_0^x h(t)^2 dt$). **c)** Montrer que $J(u) = u(1)u'(1) = \text{coth } 1$; comparer à $J(x)$ et $J(x^2)$.
- En déduire que $J(y) \geq \text{coth}(1)y(1)^2$ pour tout $y \in C$.
- Une condition « naturelle »**. Pour $y \in C$, on pose $K(y) = J(y) - 2y(1)$. Montrer que $K(y) \geq -\text{th } 1$, avec égalité si et seulement si $y = v$, où $v(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } 1}$. Vérifier que $v'' = v$, $v(0) = 0$ et $v'(1) = 1$.

Exercice 62 Les orbites des planètes ★★★

corrigé p. 68

Le Soleil S est fixe, à l'origine ; une planète a pour coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$. On admet que $r^2\theta' = C$ (**loi des aires**) et $r'' - r\theta'^2 = -\frac{\kappa}{r^2}$ ($C, \kappa > 0$ constantes), et que $r(t) = \rho(\theta(t))$ avec ρ deux fois dérivable ; on pose $u = \frac{1}{\rho}$.

- Montrer que $r' = -C u'(\theta)$, puis que $r'' = -C^2 u(\theta)^2 u''(\theta)$. En déduire que $u'' + u = k$, avec $k = \frac{\kappa}{C^2}$.
- En déduire que $u(\theta) = k(1 + e \cos(\theta - \varphi))$, $e \geq 0$; on prend $\varphi = 0$ (choix de l'axe polaire) et $p = \frac{1}{k}$: $\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$. **a)** Si $e < 1$: calculer la plus petite distance r_p (périhélie) et la plus grande r_A (aphélie). **b)** Si $e \geq 1$: montrer que $r \rightarrow +\infty$ (la comète s'éloigne).
- Soit $e < 1$, et $M(x, y)$ la planète ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$). **a)** Montrer que $SM = p - ex$, puis que $(1 - e^2)x^2 + 2pex + y^2 = p^2$. **b)** Soit $a = \frac{p}{1 - e^2}$ et $S'(-2ae, 0)$. Montrer que $SM + S'M = 2a$: l'orbite est une **ellipse** de foyers S et S' (première loi de Kepler).
- a)** Pour la Terre, $\frac{r_A}{r_p} \approx 1,034$: calculer e . **b)** Pour la comète de Halley, $r_p \approx 0,586$ UA et $e \approx 0,967$: calculer r_A et a , puis sa période T en années ($T^2 = a^3$, a en UA).

Exercice 63 Les modes propres d'une corde ★★★★★

corrigé p. 69

Soit λ un réel. On dit que λ est une **valeur propre** s'il existe une fonction y **non nulle**, deux fois dérivable sur $[0, 1]$, telle que $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

1. Montrer qu'aucun réel $\lambda \leq 0$ n'est valeur propre.
2. Soit $\omega > 0$. Montrer que ω^2 est valeur propre si et seulement si $\tan \omega = -\omega$; préciser y .
3. **a)** Montrer que $\tan \omega = -\omega$ n'a pas de solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et une unique solution ω_k dans $[(k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[$ ($k \geq 1$), avec $\omega_k < k\pi$, et que $2 < \omega_1 < 2,05$ ($\tan 2 \approx -2,185$, $\tan 2,05 \approx -1,925$).
b) Soit $\delta_k = \omega_k - (k - \frac{1}{2})\pi$. Montrer que $\delta_k = \arctan \frac{1}{\omega_k}$, puis déterminer les limites de δ_k et de $k \delta_k$.
4. Soit $y_k(x) = \sin(\omega_k x)$. **a)** Calculer de deux façons $\int_0^1 (y_j'' y_k - y_j y_k'') dx$; en déduire que $\int_0^1 y_j y_k dx = 0$ si $j \neq k$. **b)** Montrer que $\int_0^1 y_k^2 dx = \frac{2 + \omega_k^2}{2(1 + \omega_k^2)}$.

Exercice 64 Une couche limite ★★★★★

corrigé p. 69

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ et y_ε la solution de $\varepsilon y'' + y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, que l'on compare à e^{-x} , solution de l'équation « réduite » $y' + y = 0$, $y(0) = 1$.

1. Montrer que l'équation caractéristique a deux racines $r_1 < r_2 < -1$, avec $r_2 = \frac{-2}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}$, et que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $r_2 \rightarrow -1$, $r_1 \rightarrow -\infty$ et $\varepsilon r_1 \rightarrow -1$.
2. Montrer que $y_\varepsilon(x) = \frac{r_1 e^{r_2 x} - r_2 e^{r_1 x}}{r_1 - r_2}$.
3. Soit $x \geq 0$. **a)** Montrer que $0 \leq y_\varepsilon(x) - e^{-x} \leq \frac{r_2}{r_1 - r_2}$. **b)** Montrer que $0 \leq e^{-x} - e^{r_2 x} \leq \frac{-1 - r_2}{e}$. **c)** En déduire que $\sup_{x \geq 0} |y_\varepsilon(x) - e^{-x}| \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Quelle condition initiale est perdue ?
4. **a)** Calculer $y_\varepsilon'(x)$ et montrer que, pour $x > 0$ fixé, $y_\varepsilon'(x) \rightarrow -e^{-x}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. **b)** Montrer que $y_\varepsilon'(\varepsilon) \rightarrow -(1 - \frac{1}{e})$. Interpréter (« couche limite » d'épaisseur de l'ordre de ε).

Exercice 65 L'équation fonctionnelle du sinus ★★★★★

corrigé p. 70

On cherche les fonctions f **dérivables** sur $\mathbb{R}$ telles que (S) : $f(x + y) = f(x)f'(y) + f'(x)f(y)$ pour tous réels x, y .

1. Montrer que $f(0)(1 - 2f'(0)) = 0$.
2. On suppose $f(0) \neq 0$. Montrer que $f' = \frac{1}{2f(0)}f$; déterminer f et vérifier.
3. On suppose $f(0) = 0$ et f non nulle. **a)** Montrer que $f'(0) = 1$. **b)** Soit y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$: en écrivant (S) pour $y = y_0$, montrer que f' est dérivable. **c)** Montrer que $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ pour tous x, y , puis qu'il existe un réel k tel que $f'' = kf$. **d)** En déduire f (selon le signe de k) et vérifier.
4. Déterminer les solutions de (S) bornées sur $\mathbb{R}$, puis celles qui sont bornées et s'annulent en π .

Exercice 66 Le modèle de croissance de Solow ★★★★★

corrigé p. 70

Le capital par travailleur $k(t) > 0$ (t en années) vérifie (S) : $k' = s k^\alpha - \delta k$, $k(0) = k_0 > 0$, où α, s (taux d'épargne) $\in]0, 1[$ et $\delta > 0$ sont constants. La production par travailleur est k^α , la consommation $(1 - s)k^\alpha$.

1. Soit k une solution de (S) sur $[0, +\infty[$, à valeurs strictement positives, et $z = k^{1-\alpha}$. Montrer que $z' = (1 - \alpha)(s - \delta z)$; en déduire z , puis k . Réciproquement, vérifier que la fonction obtenue est une solution strictement positive de (S).
2. Montrer que k est monotone et tend vers $k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, unique solution constante strictement positive de (S).
3. **Règle d'or.** La consommation d'équilibre est $c(s) = (1 - s)(k^*)^\alpha$. Montrer que c est maximale pour $s = \alpha$.
4. On prend $\alpha = \frac{1}{3}$, $\delta = 0,05$, $s = 0,2$ et $k_0 = 1$. Calculer k^* et $k(t)$. Au bout de combien d'années k atteint-il 90 % de k^* ?

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau 1

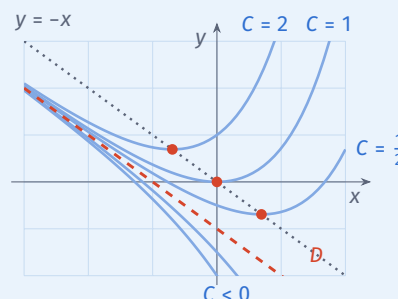
■ Corrigé de l'exercice 1

1. $((x^2 + 1)e^x)' = (x^2 + 2x + 1)e^x$, donc $y' - y = 2xe^x$ ✓. Avec $s = \sin(\sqrt{2}x)$, $c = \cos(\sqrt{2}x)$ et $y = e^{-x}s$:
 $y' = e^{-x}(-s + \sqrt{2}c)$, $y'' = e^{-x}(-s - 2\sqrt{2}c)$, d'où $y'' + 2y' + 3y = e^{-x}[(-1 - 2 + 3)s + (-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2})c] = 0$
 ✓ (les racines de $r^2 + 2r + 3$ sont $-1 \pm i\sqrt{2}$).

2. La tangente au point $(x, f(x))$ est horizontale si et seulement si $f'(x) = x + f(x) = 0$: ces points sont sur la **droite** $y = -x$. Pour $g(x) = -x - 1$: $g'(x) = -1 = x + g(x)$, donc D est une courbe intégrale.

3. Soit $g = f + x + 1$: $g' - g = f' + 1 - f - x - 1 = f' - (x + f)$.
 Donc f est solution de (E) $\iff g' = g \iff g = Ce^x$:
 $f_C(x) = Ce^x - x - 1$.

Si $C > 0$: $f'_C(x) = Ce^x - 1$ est négative sur $]-\infty, -\ln C[$, positive ensuite : **minimum** en $x_0 = -\ln C$, de valeur $f_C(x_0) = 1 + \ln C - 1 = \ln C = -x_0$: le point $(x_0, -x_0)$ est sur la droite $y = -x$ (comme le prévoyait 2.). Si $C < 0$: $f'_C < 0$, f_C est strictement décroissante, sans extremum. Enfin $f_C(x) - (-x - 1) = Ce^x$: C_{f_C} est au-dessus de D si $C > 0$, au-dessous si $C < 0$ (deux courbes intégrales ne se coupent pas).



■ Corrigé de l'exercice 2

1. a) $y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}y$: $y = Ce^{-x/\sqrt{3}}$. b) $y' = \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}$, solution constante $-\frac{3}{2}$: $y = Ce^{\frac{2x}{5}} - \frac{3}{2}$. c) $y' = -ey + e$:
 $y = 1 + Ce^{-ex}$. d) $y' = -3y + \frac{3}{2}$: $y = \frac{1}{2} + Ce^{-3x}$. Pour b) : en $+\infty$, $Ce^{\frac{2x}{5}} \rightarrow \pm\infty$ si $C \neq 0$: seule la solution constante $-\frac{3}{2}$ a une limite finie ; en $-\infty$, **toutes** tendent vers $-\frac{3}{2}$.

2. a) $Ce^{-1} = 2$: $f(x) = 2e^{1-\frac{x}{\sqrt{3}}}$. b) $Ce^{\ln 2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $C = 2$: $f(x) = 2e^{\frac{2x}{5}} - \frac{3}{2}$. c) La tangente $y = f'(0)x + f(0)$ passe par $B(1, 0)$ si et seulement si $f'(0) + f(0) = 0$; avec $f(0) = 1 + C$ et $f'(0) = -eC$:
 $1 + C(1 - e) = 0$, $f(x) = 1 + \frac{e^{-ex}}{e - 1}$. d) L'équation donne $f'(0) = -3f(0) + \frac{3}{2} = f(0)$, donc $f(0) = \frac{3}{8}$.

$$C = -\frac{1}{8} : \boxed{f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}e^{-3x}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 3

a) $p' - p = -ax^2 + (2a - b)x + (b - c) = -x^2 \iff a = 1, b = 2, c = 2 : p = x^2 + 2x + 2$, et $y = x^2 + 2x + 2 + Ce^x$; nulle en 0 : $C = -2$, $\boxed{f(x) = x^2 + 2x + 2 - 2e^x}$.

b) $p' - p = (2b - a)\cos 2x - (2a + b)\sin 2x = 5\cos 2x \iff b = -2a$ et $2b - a = -5a = 5 : a = -1, b = 2$; $\boxed{y = 2\sin 2x - \cos 2x + Ce^x}$ (p est la seule solution bornée).

c) Pour $q = (ax + b)e^{3x} : q' - 3q = ae^{3x}$, multiple constant de e^{3x} : il faudrait $2x + 1 = a$ pour tout x , impossible (e^{3x} est solution de l'équation homogène). Pour $p = (ax^2 + bx)e^{3x} : p' - 3p = (2ax + b)e^{3x}$, d'où $a = b = 1$: $\boxed{y = (x^2 + x + C)e^{3x}}$.

d) $(ae^{-x})' - ae^{-x} = -2ae^{-x} = 2e^{-x} \iff a = -1$. Par superposition, $x^2 + 2x + 2 - e^{-x}$ est solution, et $y = x^2 + 2x + 2 - e^{-x} + Ce^x$; $f(0) = 1 + C = 1$: $\boxed{f(x) = x^2 + 2x + 2 - e^{-x}}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

1. a) $r^2 - 5r - 14 = (r - 7)(r + 2) : \boxed{Ae^{7x} + Be^{-2x}}$. b) $(4r - 1)^2 = 0 : \boxed{(Ax + B)e^{\frac{x}{4}}}$. c) $\Delta = -100, r = 2 \pm 5i$:

$\boxed{e^{2x}(A \cos 5x + B \sin 5x)}$. d) $r = \pm i\sqrt{7} : \boxed{A \cos \sqrt{7}x + B \sin \sqrt{7}x}$. e) $(2r - \sqrt{3})^2 = 0 : \boxed{(Ax + B)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}}$. f)

$6r^2 - r - 1 = (2r - 1)(3r + 1) : \boxed{Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{3}}}$. g) $\Delta = -4, r = \frac{-1 \pm i}{2} : \boxed{e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \right)}$. h) $r^2 = 3$:

$\boxed{Ae^{\sqrt{3}x} + Be^{-\sqrt{3}x}}$.

2. a) $A + B = 0, 7A - 2B = 9 : \boxed{f = e^{7x} - e^{-2x}}$. b) $B = 4, f'(0) = A + \frac{B}{4} = 2 : \boxed{f = (x + 4)e^{\frac{x}{4}}}$. c) $A = 0, 5B = 5$:

$\boxed{f = e^{2x} \sin 5x}$. d) $A = \sqrt{3}, \sqrt{7}B = \sqrt{7} : f = \sqrt{3} \cos \sqrt{7}x + \sin \sqrt{7}x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \sqrt{7}x + \sin \frac{\pi}{6} \sin \sqrt{7}x \right) =$

$\boxed{2 \cos \left(\sqrt{7}x - \frac{\pi}{6} \right)}$: amplitude 2, période $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$, maximum 2 atteint en $x = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

■ Corrigé de l'exercice 5

1. $z = y'$ vérifie $z' + 3z = 9$, soit $z' = -3z + 9 : z = 3 + Ke^{-3x}$, puis $y = 3x + Ae^{-3x} + B$ (primitives). $f'(0) = 3 - 3A = 0, f(0) = A + B = 0 : \boxed{f(x) = 3x - 1 + e^{-3x}}$.

2. $z' = (f' + 2f)e^{2x}$, donc f est solution $\iff z' = \frac{2x}{1+x^2} \iff z = \ln(1+x^2) + C$, soit $y = (\ln(1+x^2) + C)e^{-2x}$. Avec $f(0) = 1 : \boxed{f(x) = (1 + \ln(1+x^2))e^{-2x}} > 0$ (car $\ln(1+x^2) \geq 0$). En $-\infty : f \rightarrow +\infty$. En $+\infty : \ln(1+x^2) \leq x^2$, donc $0 < f(x) \leq (1+x^2)e^{-2x} \rightarrow 0$.

3. $g = f + 2 : g'' - 4g = f'' - 4f - 8$, donc f est solution $\iff g'' = 4g \iff f = Ae^{2x} + Be^{-2x} - 2$. $f(0) = A + B - 2 = 0$ et $f'(0) = 2A - 2B = 0 : A = B = 1, f = e^{2x} + e^{-2x} - 2 = \boxed{(e^x - e^{-x})^2}$.

■ Corrigé de l'exercice 6

1. $p'' - 2p' - 3p = -3ax^2 - (4a + 3b)x + (2a - 2b - 3c) = -3x^2 - 4x + 5 \iff a = 1, b = 0, c = -1 : p = x^2 - 1$. Par linéarité, $(f - p)'' - 2(f - p)' - 3(f - p) = (f'' - 2f' - 3f) - (5 - 4x - 3x^2)$, nul si et seulement si f est solution. $r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) : y = x^2 - 1 + Ae^{3x} + Be^{-x}$. $f(0) = -1 + A + B = 0, f'(0) = 3A - B = 0$:

$A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, \boxed{f(x) = x^2 - 1 + \frac{e^{3x} + 3e^{-x}}{4}}$.

2. 3 est racine de $r^2 - 2r - 3$: ae^{3x} est solution de l'équation **homogène**, donc $(ae^{3x})'' - 2(ae^{3x})' - 3ae^{3x} = 0 \neq 8e^{3x}$. Pour $p = axe^{3x}$: $p' = a(3x+1)e^{3x}$, $p'' = a(9x+6)e^{3x}$, et $p'' - 2p' - 3p = a(9x+6 - 6x - 2 - 3x)e^{3x} = 4ae^{3x}$: $a = 2$, $y = (2x + A)e^{3x} + Be^{-x}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

a) **Vrai** : $A \cos 3x + B \sin 3x$ est $\frac{2\pi}{3}$ -périodique ($3(x + \frac{2\pi}{3}) = 3x + 2\pi$). b) **Faux** : $f'(0) = 1 - f(0)$; même nombre dérivé en 0 $\Rightarrow$ même valeur en 0 $\Rightarrow$ même solution (unicité). c) **Vrai** : $f'' = -af' - bf$ est dérivable, et en dérivant, $(f')'' + a(f')' + bf' = 0$. d) **Faux** : $f = (Ax + B)e^x$, $f(0) = B = 0$, puis $f(1) = Ae = 0$, donc $f = 0$. e) **Faux** : $(xe^x)'' + a(xe^x)' + bxe^x = [(1+a+b)x + 2+a]e^x = 0$ pour tout x impose $a = -2$, $b = 1$; mais alors $(e^{2x})'' - 2(e^{2x})' + e^{2x} = e^{2x} \neq 0$. f) **Vrai** : $f = A \cos 2x + B \sin 2x$, $f(0) = A = 0$, et $f(\frac{\pi}{2}) = B \sin \pi = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 8

1. $p(h) = 1013 e^{-kh}$ et $899 = 1013 e^{-1000k}$: $k = \frac{1}{1000} \ln \frac{1013}{899} \approx 1,194 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. $\frac{p(h+1000)}{p(h)} = e^{-1000k} = \frac{899}{1013}$: à chaque kilomètre, la pression est multipliée par $\frac{899}{1013} \approx 0,887$, elle baisse de $\frac{114}{1013} \approx 11,25 \%$.

2. $p(8849) = 1013 \left(\frac{899}{1013}\right)^{8,849} \approx 352 \text{ hPa}$. $e^{-kh} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\ln 2}{k} \approx 5806 \text{ m}$. $1013 e^{-kh} = 750 \Leftrightarrow h = \frac{1}{k} \ln \frac{1013}{750} \approx 2518 \text{ m}$.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

Partie I. 1. $z' = (f' - f)e^{-x}$: f est solution $\Leftrightarrow z' = -\frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow z = C - \arctan x \Leftrightarrow f(x) = e^x(C - \arctan x)$. 2. $e^x(C - \arctan x) > 0$ pour tout $x \Leftrightarrow C > \arctan x$ pour tout x . Si $C \geq \frac{\pi}{2}$, c'est vrai car $\arctan x < \frac{\pi}{2}$; si $C < \frac{\pi}{2}$, comme $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, on a $\arctan x > C$ pour x assez grand. D'où $C \geq \frac{\pi}{2}$.

Partie II.

1. En $-\infty$: $\frac{\pi}{2} - \arctan x \rightarrow \pi$ et $e^x \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow 0$: l'axe (Ox) est **asymptote**. Pour $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, d'où $f(x) = e^x \arctan \frac{1}{x}$. Soit $\varphi(t) = \arctan t - \frac{t}{1+t^2}$: $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0$ et $\varphi(0) = 0$: $\varphi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Avec $t = \frac{1}{x}$: $\arctan \frac{1}{x} \geq \frac{x}{1+x^2}$, donc $f(x) \geq \frac{xe^x}{1+x^2} \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{e^x}{1+x^2} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) .

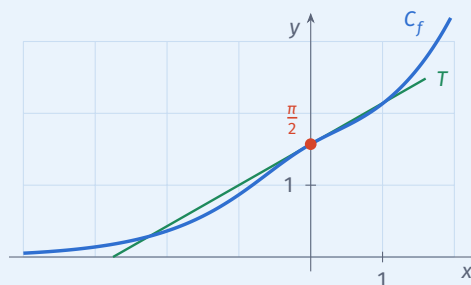
2. D'après (E), $f' = f - \frac{e^x}{1+x^2} = e^x g(x)$. $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{(x-1)^2}{(1+x^2)^2} \leq 0$, nul seulement en 1 : g est strictement décroissante, de limite 0 en $+\infty$. Donc $g > 0$ (si $g(x_1) \leq 0$, alors $g \leq g(x_1 + 1) < g(x_1) \leq 0$ sur $[x_1 + 1, +\infty[$, et la limite serait < 0). Ainsi $f' > 0$: f est continue, strictement croissante, de limites 0 et $+\infty$: **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

3. $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = g(0) = \frac{\pi}{2} - 1$:

$$T : y = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + \frac{\pi}{2}.$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{\pi - 2} \approx 1,75.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
	0	



■ Corrigé de l'exercice 10

Partie I. $p'' - 3p' + 2p = 0 - 3 + 2x$ ✓. Par linéarité, $(f - p)'' - 3(f - p)' + 2(f - p) = (f'' - 3f' + 2f) - (2x - 3)$. Comme $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$: $y = x + Ae^x + Be^{2x}$; $f(0) = A + B = -1$, $f'(0) = 1 + A + 2B = 1$: $B = 1$, $A = -2$, $f(x) = x - 2e^x + e^{2x}$.

Partie II.

1. $f(x) - x = e^x(e^x - 2) \rightarrow 0$ en $-\infty$: Δ est **asymptote** ; C_f est au-dessous de Δ sur $]-\infty, \ln 2[$, au-dessus sur $]\ln 2, +\infty[$, et la coupe en $(\ln 2, \ln 2)$. En $+\infty$: $f(x) = e^{2x}(1 - 2e^{-x} + xe^{-2x}) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{e^x(e^x - 2)}{x} \rightarrow +\infty$: **branche parabolique** de direction (Oy) .

2. $f'(x) = 1 - 2e^x + 2e^{2x} = 2\left(e^{2x} - e^x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$: f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: $f(x) = 0$ a une unique solution α . $f\left(\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{e} - 1)^2 - \frac{1}{2} \approx -0,08 < 0$ et $f(1) = (e - 1)^2 > 0$: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ($\alpha \approx 0,524$).

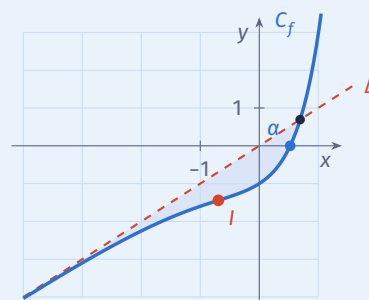
3. $f''(x) = -2e^x + 4e^{2x} = 2e^x(2e^x - 1)$ s'annule en changeant de signe en $-\ln 2$: C_f est concave sur $]-\infty, -\ln 2]$, convexe sur $[-\ln 2, +\infty[$, $I\left(-\ln 2, -\ln 2 - \frac{3}{4}\right)$.

4. Sur $[a, \ln 2]$, $f(x) \leq x$ (question 1), donc

$$A(a) = \int_a^{\ln 2} (2e^x - e^{2x}) dx = \left[2e^x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_a^{\ln 2},$$

soit $A(a) = 2 - 2e^a + \frac{e^{2a}}{2}$ u.a. (aire colorée pour $a = -4$),

qui tend vers $\boxed{2}$ quand $a \rightarrow -\infty$.



■ Corrigé de l'exercice 11

1. Pour $z = \frac{1}{f}$: $z' = -\frac{f'}{f^2}$. Si f est solution, $z' = -\frac{f - xf^2}{f^2} = -z + x$. Réciproquement, si $z' + z = x$, alors $f' = -\frac{z'}{z^2} = \frac{z - x}{z^2} = f - xf^2$. (F) a la solution affine $x - 1$: $\boxed{z = x - 1 + Ce^{-x}}$.

2. $\varphi'_C(x) = 1 - Ce^{-x}$. Si $C \leq 0$: $\varphi'_C > 0$ et $\varphi_C \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, donc φ_C prend des valeurs négatives. Si $C > 0$: φ_C décroît sur $]-\infty, \ln C]$, croît sur $[\ln C, +\infty[$, de minimum $\varphi_C(\ln C) = \ln C$. Donc $\varphi_C > 0$ sur $\mathbb{R} \iff C > 1$. Une solution $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ donne $z = \frac{1}{f} > 0$, solution de (F) sur $\mathbb{R}$: $z = \varphi_C$

avec $C > 1$; et réciproquement : ce sont les $\boxed{f_C = \frac{1}{x - 1 + Ce^{-x}}}$, $C > 1$. En $\pm\infty$, $\varphi_C \rightarrow +\infty$ (en $-\infty$, $\varphi_C = e^{-x}(C + (x - 1)e^x)$), donc $f_C \rightarrow 0$; **maximum** $\frac{1}{\ln C}$, atteint en $\ln C$.

3. Sur le plus grand intervalle $J \ni 0$ où $f \neq 0$, $\frac{1}{f} = x - 1 + Ce^{-x}$ avec $\frac{1}{f(0)} = -1$, soit $C = 0$: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, qui ne s'annule pas. Elle est définie sur $]-\infty, 1[$ et tend vers $-\infty$ en 1^- (« explosion » en temps fini : on ne peut pas la prolonger) ; elle tend vers 0 en $-\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $z' = (y' + y)e^x$: y est solution $\iff z' = \frac{e^x}{1+x^2} \iff z(x) = C + \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt \iff y = Ce^{-x} + \int_0^x \frac{e^{t-x}}{1+t^2} dt = Ce^{-x} + F(x)$.
2. Pour $x > 0$, l'intégrande est > 0 : $F(x) > 0$. Sur $[0, \frac{x}{2}]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $\int_0^{x/2} e^{t-x} dt = e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}}$; sur $[\frac{x}{2}, x]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+x^2/4} = \frac{4}{4+x^2}$ et $\int_{x/2}^x e^{t-x} dt = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \leq 1$. D'où $0 < F(x) \leq e^{-\frac{x}{2}} + \frac{4}{4+x^2} \rightarrow 0$: $F \rightarrow 0$, et toute solution $Ce^{-x} + F(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.
3. $F(0) = 0$, $F(1) > 0$ et $F \rightarrow 0$: il existe $A > 1$ tel que $F(x) < F(1)$ pour $x \geq A$. Sur $[0, A]$, F continue atteint son maximum en x_0 , avec $F(x_0) \geq F(1) > \max(F(0), F(A))$: $x_0 \in]0, A[$, et pour $x \geq A$, $F(x) < F(1) \leq F(x_0)$: c'est le maximum sur $[0, +\infty[$. En ce point intérieur, $F'(x_0) = 0$, et l'équation $F' = -F + \frac{1}{1+x^2}$ donne $F(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$ (numériquement $x_0 \approx 1,065$, $F(x_0) \approx 0,469$).

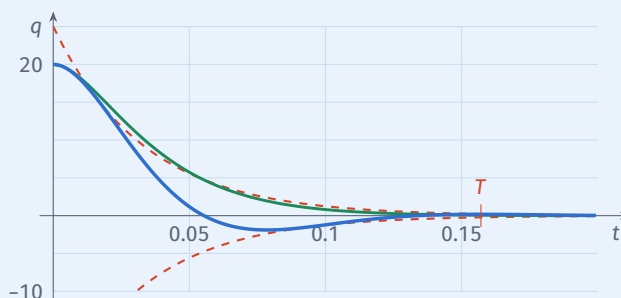
■ Corrigé de l'exercice 13

1. $v = 10e^{-t/5} > 0$: le bateau ne s'arrête jamais ; $x(t) = \int_0^t v = 50(1 - e^{-t/5}) < 50$: il parcourt moins de 50 m (limite 50 m).
2. Tant que $v > 0$, $z = \frac{1}{v}$ vérifie $z' = -\frac{v'}{v^2} = 0,02$ et $z(0) = 0,1$: $z = \frac{t+5}{50}$, $v = \frac{50}{t+5}$ (qui ne s'annule pas, donc valable pour tout $t \geq 0$), et $x = 50 \ln\left(1 + \frac{t}{5}\right)$: $v \rightarrow 0$ mais $x \rightarrow +\infty$!
3. $z' = -\frac{v'}{v^2} = \frac{0,2}{v} + 0,02 = 0,2z + 0,02$: $z = Ke^{t/5} - 0,1$, $z(0) = 0,1$ donne $K = 0,2$, $z = \frac{2e^{t/5}-1}{10}$ et $v = \frac{10}{2e^{t/5}-1} = \frac{10e^{-t/5}}{2-e^{-t/5}}$. Avec $w = 2 - e^{-s/5}$, $w' = \frac{1}{5}e^{-s/5}$: $x(t) = \int_0^t \frac{50w'(s)}{w(s)} ds = 50 \ln(2 - e^{-t/5})$. Distance totale $50 \ln 2 \approx 34,7$ m. **Bilan** : le terme en v^2 seul ne suffit pas à arrêter le bateau sur une distance finie (à faible vitesse, $v^2 \ll v$) ; le terme en v garantit une distance finie ; les deux ensemble donnent la plus courte : $34,7 < 50 < +\infty$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. En divisant par L : $q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{q}{LC} = 0$, avec $\frac{R}{L} = 60$ et $\frac{1}{LC} = \frac{1}{0,2 \times 0,002} = 2500$. $\Delta = 3600 - 10\,000 < 0$: régime **pseudo-périodique**, $r = -30 \pm 40i$, $T = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157$ s. $q = e^{-30t}(A \cos 40t + B \sin 40t)$, $A = q(0) = 0,02$, $C, q'(0) = -30A + 40B = 0$: $B = 0,015$, et
- $$q(t) = e^{-30t}(0,02 \cos 40t + 0,015 \sin 40t) = 0,025 e^{-30t} \cos(40t - \varphi), \quad i(t) = -1,25 e^{-30t} \sin 40t.$$
2. $E' = \frac{qq'}{C} + Lii' = i\left(\frac{q}{C} + Lq''\right) = i(-Rq') = -Ri^2 \leq 0$: l'énergie est dissipée par effet Joule. $E(0) = \frac{0,02^2}{2 \times 0,002} = 0,1$ J. En T : $\cos 40T = 1$, $\sin 40T = 0$, donc $i(T) = 0$, $q(T) = 0,02 e^{-\frac{3\pi}{2}}$ et $E(T) = 0,1 e^{-3\pi} \approx 8,1 \cdot 10^{-6}$ J.

3. Régime critique $\Leftrightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 = \frac{4}{LC} \Leftrightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 20 \, \Omega$. Alors $q'' + 100q' + 2500q = 0$, racine double -50 : $q = (A+Bt)e^{-50t}$, $A = 0,02$, $B - 50A = 0$: $q = 0,02(1+50t)e^{-50t}$. **Figure** (q en mC) : pseudo-périodique (bleu, entre les enveloppes $\pm 25e^{-30t}$) et critique (vert).



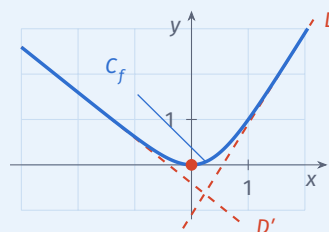
■ Corrigé de l'exercice 15

1. Si f est solution, $z = e^f > 0$ et $z' = f'e^f = (e^{2x-f} - 1)e^f = e^{2x} - z$. Réciproquement, si $z > 0$ vérifie $z' + z = e^{2x}$, $f = \ln z$ vérifie $f' = \frac{z'}{z} = \frac{e^{2x}}{z} - 1 = e^{2x-f} - 1$. Solution particulière $\frac{e^{2x}}{3}$: $z = \frac{e^{2x}}{3} + Ce^{-x} = e^{-x}\left(\frac{e^{3x}}{3} + C\right)$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $C \geq 0$ (si $C < 0$, elle est négative pour x assez petit). Solutions : $x \mapsto \ln\left(\frac{e^{2x}}{3} + Ce^{-x}\right)$, $C \geq 0$.

2. $f(0) = \ln\left(\frac{1}{3} + C\right) = 0$: $C = \frac{2}{3}$, $f(x) = \ln \frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{3}$; $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^{-x}}{e^{2x} + 2e^{-x}} = \frac{2(e^{3x} - 1)}{e^{3x} + 2} = 2 - \frac{6}{e^{3x} + 2}$, du signe de x : f décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, de **minimum** $f(0) = 0$: $f \geq 0$ (c'est l'inégalité arithmético-géométrique $e^{2x} + e^{-x} + e^{-x} \geq 3$). $f''(x) = \frac{18e^{3x}}{(e^{3x} + 2)^2} > 0$: C_f est **convexe**.

3. $f(x) - (2x - \ln 3) = \ln \frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{e^{2x}} = \ln(1 + 2e^{-3x})$, positif et de limite 0 en $+\infty$; $f(x) - \left(-x + \ln \frac{2}{3}\right) = \ln \frac{e^{3x} + 2}{2} = \ln\left(1 + \frac{e^{3x}}{2}\right)$, positif et de limite 0 en $-\infty$: D et D' sont asymptotes, et C_f est au-dessus.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



■ Corrigé de l'exercice 16

1. $z' = \frac{y' \cos x + y \sin x}{\cos^2 x}$: y est solution $\Leftrightarrow z' = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow z = \tan x + C \Leftrightarrow y = \sin x + C \cos x$. Les solutions de $y'' + y = 0$ sont les $A \cos x + B \sin x$, et $g'(0) = B = 1$: ce sont les $\sin x + A \cos x$, la même famille.

2. Sur I , $\cos x > 0$: $\sin x + C \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -C \Leftrightarrow x = -\arctan C$ ($\tan$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$) : **un seul zéro**. Si $C \leq 0$: $y(x) \leq \sin x < 1$ sur I , pas de maximum égal à 2. Si $C > 0$: $y = \sqrt{1+C^2} \cos(x - \varphi)$ avec $\cos \varphi = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}$, $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset I$: maximum $\sqrt{1+C^2} = 2 \Leftrightarrow$

$C = \sqrt{3}$: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, maximum en $\frac{\pi}{6}$.

27 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- Sur $I : z = f x^{-\alpha}$, $z' = x^{-\alpha-1}(x f' - \alpha f)$. Sur $J : |x| = -x$, $z = f(-x)^{-\alpha}$, $z' = -(-x)^{-\alpha-1}(x f' - \alpha f)$. Dans les deux cas, $z' = 0 \iff x f' = \alpha f$: les solutions sont $C x^\alpha$ sur I et $D |x|^\alpha$ sur J .
- En $x = 0 : 0 = \alpha f(0)$, donc $f(0) = 0$ si $\alpha \neq 0$. Une solution sur $\mathbb{R}$ vaut $C x^\alpha$ sur I , $D |x|^\alpha$ sur J , et doit être dérivable en 0.
 - $\alpha < 0 : |x|^\alpha \rightarrow +\infty$ en 0, la continuité impose $C = D = 0 : \boxed{f = 0}$.
 - $\alpha = 0 : f$ est constante sur I et sur J , continue en 0 : **les constantes**.
 - $0 < \alpha < 1 : \frac{f(x)}{x} = C x^{\alpha-1} \rightarrow \pm\infty$ en 0^+ si $C \neq 0$; de même à gauche : $\boxed{f = 0}$.
 - $\alpha = 1 : f = C x$ sur $[0, +\infty[$, $-D x$ sur $]-\infty, 0]$, dérivable en 0 si et seulement si $C = -D : \boxed{f = C x}$.
 - $\alpha > 1 : \frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ des deux côtés, $f'(0) = 0$ et l'équation est vérifiée en 0 : $\boxed{f = C x^\alpha (x \geq 0), D |x|^\alpha (x < 0)}$, C, D **quelconques** (deux paramètres).
- $\alpha = 2 : f(1) = C = 1$, D quelconque : **une infinité** de solutions (x^2 pour $x \geq 0$, $D x^2$ pour $x < 0$). L'équation s'écrit $y' = \frac{\alpha}{x} y$ seulement sur I ou sur J : en 0, le coefficient de y' s'annule, et la condition en 1 ne « traverse » pas 0.

■ Corrigé de l'exercice 18

- $c^2 + c - 2 = 0$: solutions constantes $\boxed{1}$ et $\boxed{-2}$. Si $y = \frac{f'}{f} : y' = \frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{f''}{f} - y^2$. Donc $y' = 2 - y - y^2 \iff \frac{f''}{f} = 2 - \frac{f'}{f} \iff f'' + f' - 2f = 0$.
- $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) : f = A e^x + B e^{-2x}$ et $y = \frac{f'}{f} = \frac{A e^x - 2B e^{-2x}}{A e^x + B e^{-2x}}$ ($B = 0 : 1 ; A = 0 : -2$). $y(0) = \frac{A-2B}{A+B} = 0 : A = 2B$, et avec $B = 1 : y = \frac{2e^x - 2e^{-2x}}{2e^x + e^{-2x}} = \frac{2(e^{3x} - 1)}{2e^{3x} + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$. $y' = \frac{18e^{3x}}{(2e^{3x}+1)^2} > 0 : y$ croît de -2 (en $-\infty$) à 1 (en $+\infty$), entre les deux solutions constantes.
- $\frac{A-2B}{A+B} = 3 \iff 5B = -2A$; avec $A = 5, B = -2 : y = \frac{5e^{3x} + 4}{5e^{3x} - 2}$, définie là où $5e^{3x} > 2$: sur $\left] \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5}, +\infty \right[$ ($\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} \approx -0,31$). À la borne gauche, le numérateur tend vers 6 et le dénominateur vers $0^+ : y \rightarrow +\infty$ (explosion) ; en $+\infty, y \rightarrow 1$; et $y' = (1-y)(y+2) < 0 : y$ décroît.

■ Corrigé de l'exercice 19

- Le second membre $a f(x) + b f(-x)$ est dérivable, donc f' aussi, et $f''(x) = a f'(x) - b f'(-x) = a [a f(x) + b f(-x)] - b [a f(-x) + b f(x)] = (a^2 - b^2) f(x)$.
 $a = 1, b = 2 : f'' = -3f$, donc nécessairement $f = A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x$. Alors $f'(x) = -\sqrt{3}A \sin \sqrt{3}x + \sqrt{3}B \cos \sqrt{3}x$ et $f(x) + 2f(-x) = 3A \cos \sqrt{3}x - B \sin \sqrt{3}x$; l'égalité (en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$) équivaut à $\sqrt{3}B = 3A$, i.e. $B = \sqrt{3}A : f = A (\cos \sqrt{3}x + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x) = 2A \cos \left(\sqrt{3}x - \frac{\pi}{3} \right)$.
 $a = b : f'' = 0$, $f = \alpha + \beta x$, et $\beta = a(f(x) + f(-x)) = 2a\alpha : \boxed{f(x) = \alpha(1 + 2ax)}$.
- Comme $(x \mapsto f(-x))'' = f''(-x) : p''(x) = \frac{f''(x) + f''(-x)}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$ et $q''(x) = \frac{f''(x) - f''(-x)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -q(x)$. Donc $p = A e^x + B e^{-x}$ avec p paire : $(A-B)(e^x - e^{-x}) = 0, A = B$; et $q = C \cos x + D \sin x$ impaire : $C = 0$. Ainsi $f = p + q = \alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \beta \sin x$; réciproquement $f''(x) = \alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \beta \sin x = f(-x)$

$$\checkmark. f(0) = \alpha = 1, f'(0) = \beta = 1 : \boxed{f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sin x}.$$

■ Corrigé de l'exercice 20

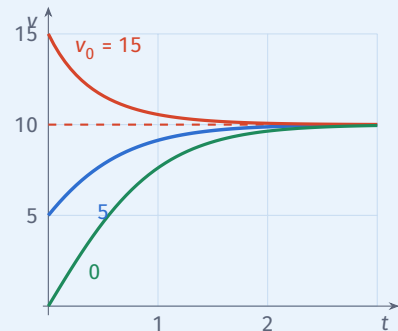
$$1. z' = \frac{x'}{10}z, z'' = \left(\frac{x''}{10} + \frac{x'^2}{100}\right)z = \left(1 - \frac{x'^2}{100} + \frac{x'^2}{100}\right)z = z; z(0) = 1, z'(0) = \frac{v_0}{10}.$$

$$2. z = Ae^t + Be^{-t}, A + B = 1, A - B = \frac{1}{2} : z = \frac{3e^t + e^{-t}}{4},$$

$$\boxed{x = 10 \ln \frac{3e^t + e^{-t}}{4}}, \quad \boxed{v = 10 \frac{3e^t - e^{-t}}{3e^t + e^{-t}}} = 10 \frac{3 - e^{-2t}}{3 + e^{-2t}} \rightarrow 10, \text{ et}$$

$$v' = \frac{120}{(3e^t + e^{-t})^2} > 0. \text{ Enfin } x - \left(10t - 10 \ln \frac{4}{3}\right) = 10 \ln \left(1 + \frac{e^{-2t}}{3}\right) \rightarrow 0 : \text{ asymptote (courbe au-dessus).}$$

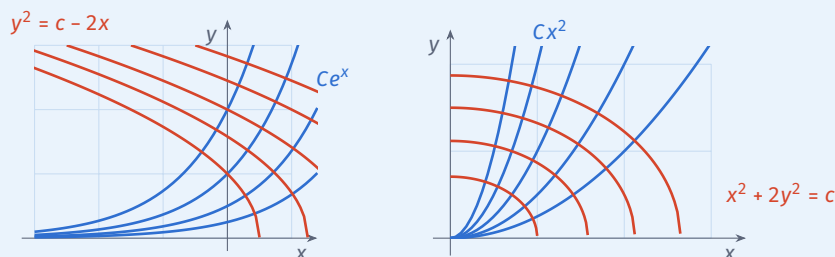
$$3. A + B = 1, A - B = \frac{3}{2} : z = \frac{5e^t - e^{-t}}{4}, v = 10 \frac{5e^t + e^{-t}}{5e^t - e^{-t}} = 10 \frac{5 + e^{-2t}}{5 - e^{-2t}} \rightarrow 10, v' = \frac{-200}{(5e^t - e^{-t})^2} < 0. \text{ Quel que soit } v_0, v \rightarrow 10 \text{ m/s : c'est la vitesse pour laquelle } x'' = 10 - 0,1v^2 = 0 \text{ (poids et frottement se compensent).}$$



■ Corrigé de l'exercice 21

1. La courbe $y = Ce^x$ passant par $M(x, y)$ a pour pente $Ce^x = \boxed{y}$. La courbe de φ les coupe orthogonalement en chaque point $(x, \varphi(x))$ si et seulement si $\varphi'(x)\varphi(x) = -1$. Avec $z = \varphi^2$: $z' = 2\varphi\varphi' = -2 \iff z = c - 2x$: $\boxed{\varphi(x) = \sqrt{c - 2x}}$ sur $]-\infty, \frac{c}{2}[$. Les courbes $y^2 = c - 2x$ sont des **paraboles** d'axe (Ox) (figure de gauche).

2. La parabole $y = Cx^2$ passant par $M(x, y)$ a $C = \frac{y}{x^2}$, et pour pente $2Cx = \frac{2y}{x}$. Orthogonalité : $\varphi' \cdot \frac{2\varphi}{x} = -1 \iff 2\varphi\varphi' = -x \iff z' = -x \text{ (} z = \varphi^2 \text{)} \iff \varphi^2 = c' - \frac{x^2}{2} \iff \boxed{x^2 + 2\varphi^2 = c}$ ($c = 2c' > 0$) : des arcs d'**ellipses** (figure de droite).



■ Corrigé de l'exercice 22

1. $g'(t) = (1 + \tan^2 t) f'(\tan t)$, puis $g''(t) = 2 \tan t (1 + \tan^2 t) f'(\tan t) + (1 + \tan^2 t)^2 f''(\tan t)$. Avec $x = \tan t$ ($\tan$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$) : $g''(t) + \lambda^2 g(t) = (1 + x^2)^2 f''(x) + 2x(1 + x^2) f'(x) + \lambda^2 f(x)$. D'où l'équivalence.

2. $\theta = \arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \theta > 0$ et $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + x^2$: $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin \theta = x \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin 2\theta = \frac{2x}{1+x^2}$. $(E_1) : g = A \cos t + B \sin t$, $\boxed{f(x) = \frac{A + Bx}{\sqrt{1+x^2}}}$. $(E_2) :$

$$g = A \cos 2t + B \sin 2t, \quad \boxed{f(x) = \frac{A(1-x^2) + 2Bx}{1+x^2}}.$$

3. $f(0) = A = 1$ et $f'(0) = g'(0) = 2B = 2 : B = 1$, $f(x) = \frac{1+2x-x^2}{1+x^2}$. Comme $g(t) = \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) : f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2 \arctan x - \frac{\pi}{4}\right)$. $2 \arctan x - \frac{\pi}{4}$ décrit $\left]-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ et ne vaut 0 qu'en $x = \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$: **maximum** $\sqrt{2}$ en $\sqrt{2} - 1$. En $\pm\infty : f \rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 23

1. $z' = \frac{-x'(a-x)+x'(b-x)}{(a-x)^2} = \frac{(b-a)x'}{(a-x)^2} = k(b-a)\frac{b-x}{a-x} = k(b-a)z$. Ici $k(b-a) = -\frac{1}{2}$ et $z(0) = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} : z = \frac{1}{2}e^{-t/2}$. De

$$z(2-x) = 1-x : x(1-z) = 1-2z, x = \frac{1-2z}{1-z} = \frac{2(1-e^{-t/2})}{2-e^{-t/2}}.$$

2. $x' = 0,5(2-x)(1-x) > 0$: x est croissante, de limite $\boxed{1} = b$: la réaction s'arrête quand B est épuisé, B est le **réactif limitant** (il reste $a-b = 1$ mol/L de A). $x' = 0,5(2-x)(1-x)$ est un produit de facteurs positifs décroissants en x , et x croît : la vitesse est **maximale à l'instant initial**, $x'(0) = 1$ mol/(L·min). 90 % de B : $x = 0,9$, $z = \frac{0,1}{1,1} = \frac{1}{11} = \frac{1}{2}e^{-t/2} : t = 2 \ln \frac{11}{2} \approx 3,41$ min.

28

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $x = y = 0 : f(0)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$, $y = 0$ donne $f(|x|) = f(x)f(0) = 0$, donc $f = 0$ sur $[0, +\infty[$, puis $f(x)^2 = f(\sqrt{2}|x|) = 0 : f = 0$, exclu. Donc $\boxed{f(0) = 1}$, et $y = 0$ donne $f(x) = f(|x|) : f$ est **paire**.
 $y = x : f(x)^2 = f(\sqrt{2}x)$; en remplaçant x par $\frac{x}{\sqrt{2}} : f(x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$. Si $f(x_0) = 0$, alors $f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et, par récurrence, $f\left(\frac{x_0}{2^{n/2}}\right) = 0$; or $\frac{x_0}{2^{n/2}} \rightarrow 0$ et f est continue : $f(0) = 0$, contradiction. Donc $f > 0$.
2. À $y > 0$ fixé, en dérivant par rapport à $x > 0$ (avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) : $f'(x)f(y) = \frac{x}{r}f'(r)$; de même $f(x)f'(y) = \frac{y}{r}f'(r)$. Donc $\frac{f'(x)f(y)}{x} = \frac{f(x)f'(y)}{y}$ et, en divisant par $f(x)f(y) > 0 : \frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{f'(y)}{yf(y)}$. Cette fonction est donc constante sur $]0, +\infty[$; notons-la $2a : f'(x) = 2axf(x)$ pour $x > 0$. f paire donne f' impaire : pour $x < 0$, $f'(x) = -f'(-x) = -2a(-x)f(-x) = 2axf(x)$, et $f'(0) = 0$. D'où $\boxed{f'(x) = 2axf(x)}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $z' = (f' - 2axf)e^{-ax^2} = 0 : z$ est constante, égale à $z(0) = 1 : \boxed{f(x) = e^{ax^2}}$. Réciproquement, $e^{ax^2}e^{ay^2} = e^{a(x^2+y^2)} = f(\sqrt{x^2+y^2})$ ✓. Limite nulle en $+\infty \iff a < 0$: ce sont les **gaussiennes** $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (loi de Maxwell des vitesses).

■ Corrigé de l'exercice 25

1. $\sin c = 0 : \boxed{c = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$. $(f(x+c))' = f'(x+c) = \sin f(x+c)$; $(-f)' = -\sin f = \sin(-f)$; $(f+2\pi)' = f' = \sin(f+2\pi)$.
2. Par les accroissements finis ($|\cos| \leq 1$) : $|d'| = |\sin f - \sin g| \leq |f - g| = |d|$. Puis $(d^2 e^{-2x})' = 2e^{-2x}(dd' - d^2) \leq 2e^{-2x}(|d||d'| - d^2) \leq 0$ et $(d^2 e^{2x})' = 2e^{2x}(dd' + d^2) \geq 2e^{2x}(d^2 - |d||d'|) \geq 0$. Pour $x \geq x_0 : 0 \leq d^2(x)e^{-2x} \leq d^2(x_0)e^{-2x_0} = 0$; pour $x \leq x_0 : 0 \leq d^2(x)e^{2x} \leq d^2(x_0)e^{2x_0} = 0$. Donc $d = 0 : \boxed{f = g}$.

3. Si f prenait la valeur 0 ou π en un point, elle coïnciderait (unicité) avec la solution constante 0 ou π , ce qui contredit $f(0) = y_0$. f étant continue et ne prenant jamais ces valeurs, le TVI donne $0 < f < \pi$; alors $f' = \sin f > 0$: f est strictement croissante.

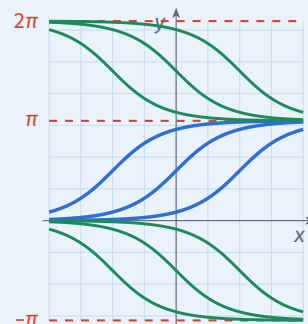
4. $z = \tan \frac{f}{2}$ est défini ($\frac{f}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$) et $z' = \frac{f'}{2} (1 + \tan^2 \frac{f}{2}) = \frac{\sin f}{2 \cos^2 \frac{f}{2}} = \frac{2 \sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2}}{2 \cos^2 \frac{f}{2}} = z$. Donc $z = \tan \frac{y_0}{2} e^x$ et

$$f(x) = 2 \arctan \left(e^x \tan \frac{y_0}{2} \right), \text{ de limites } 0 \text{ en } -\infty \text{ et } \pi \text{ en } +\infty$$

(asymptotes $y = 0$ et $y = \pi$). $f'' = f' \cos f = \frac{1}{2} \sin 2f$ change de signe quand f franchit $\frac{\pi}{2}$: un seul point d'inflexion, à

mi-hauteur. Pour $y_0 = \frac{2\pi}{3}$: $\sqrt{3}e^x = 1$, $x = -\frac{\ln 3}{2}$. **Allure :**

les droites $y = k\pi$; dans chaque bande $]k\pi, (k+1)\pi[$, des courbes translatées horizontalement les unes des autres, croissantes si k est pair, décroissantes si k est impair (car $-f$ et $f + 2\pi$ sont solutions).



■ Corrigé de l'exercice 26

- 0 convient, et $((x-c)^3)' = 3(x-c)^2 = 3|(x-c)^3|^{\frac{2}{3}}$. Avec $f(0) = 0$: 0 et x^3 conviennent, **pas d'unicité**.
- $f' = 3|f|^{\frac{2}{3}} \geq 0$: f croît. Où $f > 0$: $(f^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}f^{-\frac{2}{3}}f' = 1$; où $f < 0$: $((-f)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(-f)^{-\frac{2}{3}}(-f') = -1$. Si f ne s'annulait pas, elle serait de signe constant (TVI) : si $f > 0$, $f^{\frac{1}{3}} = x + K$ sur $\mathbb{R}$, qui est < 0 pour $x < -K$, absurde ; de même si $f < 0$. Donc $Z = \{x : f(x) = 0\}$ est non vide ; c'est un intervalle (f croissante), fermé (f continue) : $Z = [a, b] \cap \mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. Sur $]b, +\infty[$, $f > 0$, $f^{\frac{1}{3}} = x + K$, et la continuité en b donne $K = -b$: $f = (x-b)^3$. De même, sur $] -\infty, a[$, $(-f)^{\frac{1}{3}} = a - x$: $f = (x-a)^3$. Réciproquement, $f_{a,b}$ est dérivable en a et en b (dérivées nulles des deux côtés) et vérifie (E) partout.
- $f(1) = 1 > 0$: $1 > b$ et $(1-b)^3 = 1$, soit $b = 0$; $a \in [-\infty, 0]$ est **quelconque** : une infinité de solutions. Si K existait, avec $v = 0$ et $u > 0$: $3u^{\frac{2}{3}} \leq Ku$, soit $K \geq 3u^{-\frac{1}{3}} \rightarrow +\infty$ quand $u \rightarrow 0^+$: absurde. L'exercice 25 reposait sur $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$, qui donnait $|d'| \leq |d|$; ici, faute d'une telle inégalité près de 0, la preuve tombe, et l'unicité aussi.

■ Corrigé de l'exercice 27

- $u' = f' \cos x - f \sin x - f'' \sin x - f' \cos x = -(f'' + f) \sin x$; $v' = f' \sin x + f \cos x + f'' \cos x - f' \sin x = (f'' + f) \cos x$; $u \cos x + v \sin x = f(\cos^2 x + \sin^2 x) = f$ (et de même $-u \sin x + v \cos x = f'$). Posons $U(x) = \int_0^x g(t) \sin t dt$ et $V(x) = \int_0^x g(t) \cos t dt$. Si $f'' + f = g$: $u = f(0) - U$, $v = f'(0) + V$, et $f = u \cos x + v \sin x = f(0) \cos x + f'(0) \sin x + h(x)$, où

$$h(x) = \sin x V(x) - \cos x U(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) g(t) dt = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt.$$

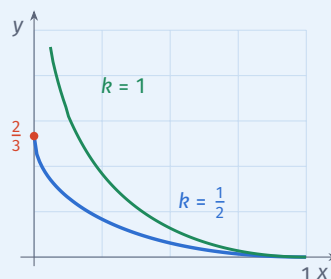
Réciproquement, $h' = \cos x V + \sin x U$ (les termes en g se compensent), puis $h'' = -\sin x V + \cos x U + g = -h + g$: h est solution, et $f = f(0) \cos x + f'(0) \sin x + h$ aussi.

- $V(x) = \int_0^x 1 dt = x$ et $U(x) = \int_0^x \tan t dt = -\ln(\cos x)$: $y = (A + \ln(\cos x)) \cos x + (B + x) \sin x$.

3. Si f est 2π -périodique, f' aussi : $f(2\pi) = f(0)$, $f'(2\pi) = f'(0)$. Réciproquement, $F(x) = f(x + 2\pi)$ est solution (g est 2π -périodique) avec les mêmes conditions initiales que f : $F = f$ (unicité, la différence étant solution de $y'' + y = 0$ nulle ainsi que sa dérivée en 0). Or $f(2\pi) = u(2\pi) = f(0) - U(2\pi)$ et $f'(2\pi) = v(2\pi) = f'(0) + V(2\pi)$: f est 2π -périodique $\iff U(2\pi) = V(2\pi) = 0$, condition qui ne dépend pas de f : toutes les solutions, ou aucune.
- $g = \cos^2$: $U(2\pi) = \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$, $V(2\pi) = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$: toutes périodiques ; avec $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\alpha + \beta \cos 2x$ convient si $\alpha = \frac{1}{2}$, $-3\beta = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{6} + A \cos x + B \sin x$.
 - $g = \sin^3$: $U(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4} \neq 0$ ($\sin^4 t = \frac{3-4\cos 2t+\cos 4t}{8}$) : **aucune** solution périodique (résonance : $\sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$ contient $\sin t$).

■ Corrigé de l'exercice 28

1. $\sqrt{1+f'^2} > |f'| \geq -f'$, donc $u > 0$. $u' = f'' + \frac{f'f''}{\sqrt{1+f'^2}} = \frac{f''u}{\sqrt{1+f'^2}}$, donc $xu' = \frac{xf''}{\sqrt{1+f'^2}} u = ku$. Comme à l'exercice 17 (sur $]0, 1[$) : $(ux^{-k})' = x^{-k-1}(xu' - ku) = 0$, $u = Cx^k$, et $u(1) = 0 + 1 = 1$: $u = x^k$. De $\sqrt{1+f'^2} = u - f' : 1 + f'^2 = u^2 - 2uf' + f'^2$, $f' = \frac{u^2-1}{2u} = \frac{1}{2}(x^k - x^{-k})$; au passage, $\sqrt{1+f'^2} = u - f' = \frac{1}{2}(x^k + x^{-k})$.
2. $f(1) = 0$ donne $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{1+k}}{1+k} - \frac{x^{1-k}}{1-k} \right) + \frac{k}{1-k^2}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow \frac{k}{1-k^2}$ ($1 \pm k > 0$) : le chien rejoint l'axe, donc le lièvre, en $H\left(0, \frac{k}{1-k^2}\right)$. Le lièvre y arrive à l'instant $\frac{k}{(1-k^2)v}$, et le chien a parcouru $w \cdot \frac{k}{(1-k^2)v} = \frac{1}{1-k^2}$ (c'est bien $\int_0^1 \frac{x^k+x^{-k}}{2} dx$). Pour $k = \frac{1}{2}$: $f(x) = \frac{x^{3/2}}{3} - \sqrt{x} + \frac{2}{3}$, capture en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, distance $\frac{4}{3}$.
3. $k = 1$: $u = x$, $f' = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$, $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{\ln x}{2} \rightarrow +\infty$ en 0^+ : le chien n'atteint jamais l'axe, **pas de capture**. Le lièvre est sur la tangente, en $(0, f(x) - xf'(x))$: leur distance vaut $x\sqrt{1+f'^2} = \frac{x}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.



■ Corrigé de l'exercice 29

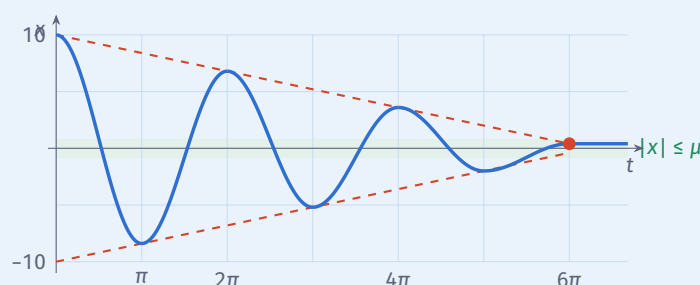
1. f continue sur $[0, 1]$ atteint son maximum en c ; $f(c) > 0 \geq f(0), f(1)$, donc $c \in]0, 1[$, et en ce maximum intérieur $f'(c) = 0$; puis $f''(c) \geq f(c) > 0$. Comme $\frac{f'(x)}{x-c} = \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} \rightarrow f''(c) > 0$, on a $f' > 0$ sur un intervalle $]c, c+\delta[$: f y est strictement croissante, et $f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) > f(c)$, contradiction. Donc $f \leq 0$ sur $[0, 1]$.
2. Si f_1, f_2 sont solutions, $d = f_1 - f_2$ vérifie $d'' = d$ et $d(0) = d(1) = 0$; 1. appliqué à d et à $-d$ donne $d \leq 0$ et $-d \leq 0$: $d = 0$.
3. 1 est solution constante de $y'' - y = -1$: $w = 1 + Ae^x + Be^{-x}$, et $w(0) = w(1) = 0$ donnent $A = -\frac{1}{1+e}$,

$B = -\frac{e}{1+e} : w(x) = 1 - \frac{e^x + e^{1-x}}{1+e}$. $-w$ vérifie $(-w)'' = -w + 1 \geq -w$ et s'annule en 0 et 1 : par 1., $-w \leq 0$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $e^x + e^{1-x} \geq 2\sqrt{e^x e^{1-x}} = 2\sqrt{e}$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{2} : w \leq w\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{e}}{1+e} \approx 0,1132$.

4. $h = f - Mw : h'' - h = (f'' - f) - M(w'' - w) = (f'' - f) + M \geq 0$ et $h(0) = h(1) = 0$, donc $h \leq 0 : f \leq Mw$. De même avec $-f : -f \leq Mw$. D'où $|f| \leq Mw \leq 0,1132 M \leq \boxed{0,12 M}$.

■ Corrigé de l'exercice 30

- Hérédité (le cas $k = 0, a_0 = a$, donne la première formule) : supposons $x(k\pi) = (-1)^k a_k, x'(k\pi) = 0$ avec $a_k > \mu$ ($|x(k\pi)| > \mu$: le palet repart). Soit $\varphi_k(t) = (-1)^k [\mu + (a_k - \mu) \cos(t - k\pi)] : \varphi_k'' + \varphi_k = (-1)^k \mu, \varphi_k(k\pi) = (-1)^k a_k, \varphi_k'(k\pi) = 0$, et $\varphi_k'(t) = (-1)^{k+1} (a_k - \mu) \sin(t - k\pi)$ a le signe de $(-1)^{k+1}$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$: si k est pair, $\varphi_k' < 0$ et l'équation du mouvement est bien $x'' + x = \mu$; si k est impair, $\varphi_k' > 0$ et c'est $x'' + x = -\mu$. Par unicité (conditions initiales en $k\pi$), $x = \varphi_k$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, et $x((k+1)\pi) = (-1)^k (2\mu - a_k) = (-1)^{k+1} a_{k+1}$, avec $x'((k+1)\pi) = 0$.
- À l'instant $(k+1)\pi$, le palet est arrêté en $(-1)^{k+1} a_{k+1}$, et $a_{k+1} = a_k - 2\mu > -\mu$: il reste immobile si et seulement si $a_{k+1} \leq \mu$. Il s'arrête donc définitivement en $N\pi, N = \min\{n : a - 2n\mu \leq \mu\}$ (qui existe car $a_n \rightarrow -\infty$). Les amplitudes a_k décroissent **arithmétiquement** (de 2μ par demi-oscillation) et le mouvement cesse en un temps fini ; dans le circuit de l'exercice 14 (frottement « visqueux »), les extremums successifs sont dans le rapport $-e^{-\frac{3\pi}{4}}$: décroissance **géométrique**, oscillations sans fin. **Application** : $a_k = 10 - 1,6k : 10 ; 8,4 ; 6,8 ; 5,2 ; 3,6 ; 2 ; 0,4 \leq 0,8 : \boxed{N = 6}$, arrêt à l'instant $6\pi \approx 18,8$ en $\boxed{x = 0,4}$.



29 Corrigés : premier ordre $y' = ay + b$

■ Corrigé de l'exercice 31

- On isole y' , puis on applique $y' = ay + b \iff y = Ce^{ax} + \ell$, avec $\ell = -\frac{b}{a}$.
 $(E_1) : y' = \frac{3}{4}y, \boxed{y = Ce^{\frac{3}{4}x}}$, solution constante 0. $(E_2) : y' = \frac{4}{3}y - 4, \ell = 3 : \boxed{y = Ce^{\frac{4}{3}x} + 3}$.
 $(E_3) : y' = -\frac{5}{2}y - 5, \ell = -2 : \boxed{y = Ce^{-\frac{5}{2}x} - 2}$. $(E_4) : y' = -(\ln 2)y + \ln 4, \ell = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$, et $e^{-x \ln 2} = 2^{-x} : \boxed{y = C 2^{-x} + 2}$.
- a) $f_1(4) = Ce^3 = e^3$, donc $C = 1 : \boxed{f_1(x) = e^{\frac{3}{4}x}}$.
b) $e^{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln 3} = 3$, donc $f_2\left(\frac{3}{4} \ln 3\right) = 3C + 3 = 0$ et $C = -1 : \boxed{f_2(x) = 3 - e^{\frac{4}{3}x}}$.
c) $f_3'(x) = -\frac{5}{2}Ce^{-\frac{5}{2}x}$, donc $f_3'(0) = -\frac{5}{2}C = 5$ et $C = -2 : \boxed{f_3(x) = -2 - 2e^{-\frac{5}{2}x}}$.

d) $f_4(1) = \frac{C}{2} + 2 = 3$, donc $C = 2$ et $f_4(x) = 2 + 2^{1-x}$. Comme $2^{1-x} = e^{(1-x)\ln 2}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = +\infty$.

3. $\ell = 1$ et $g(x) = 1 + Ce^{-3x}$: $\int_0^{\ln 2} g(t) dt = \ln 2 + C \left[-\frac{e^{-3t}}{3} \right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \frac{C}{3} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \ln 2 + \frac{7C}{24}$.

La valeur moyenne vaut $1 + \frac{7C}{24 \ln 2} = 1 + \frac{7}{12 \ln 2}$ si et seulement si $C = 2$: $g(x) = 1 + 2e^{-3x}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. $(E) \iff y' = -\frac{3}{2}y + \frac{9}{2}$: $y = 3 + Ce^{-\frac{3}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$, et $\ell = 3$.

2. $2(f - g)' + 3(f - g) = (2f' + 3f) - (2g' + 3g) = 9 - 9 = 0$, donc $f - g = Ke^{-\frac{3}{2}x}$ ($K \in \mathbb{R}$). Si $f(x_0) = g(x_0)$, alors $Ke^{-\frac{3}{2}x_0} = 0$, donc $K = 0$ et $f = g$. **Deux courbes intégrales distinctes n'ont aucun point commun** : l'une reste strictement au-dessus de l'autre.

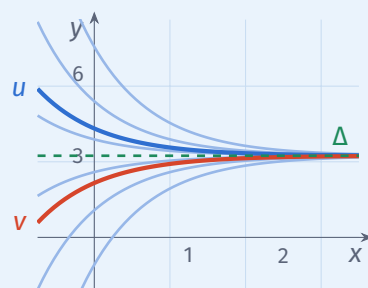
3. $f = 3 + Ce^{-\frac{3}{2}x}$ avec $C \neq 0$: $f' = -\frac{3}{2}Ce^{-\frac{3}{2}x} = -\frac{3}{2}(f - 3)$, puis $f'' = -\frac{3}{2}f' = \frac{9}{4}(f - 3)$. Or $f - 3 = Ce^{-\frac{3}{2}x}$ a le signe de C :

- courbe **au-dessus** de Δ ($C > 0$) : $f' < 0$ et $f'' > 0$, f est strictement décroissante et convexe ;
- courbe **au-dessous** de Δ ($C < 0$) : $f' > 0$ et $f'' < 0$, f est strictement croissante et concave.

4. $2(6 - f)' + 3(6 - f) = -(2f' + 3f) + 18 = -9 + 18 = 9$
✓. Les points $(x, f(x))$ et $(x, 6 - f(x))$ ont pour milieu $(x, 3)$: **le faisceau est symétrique par rapport à Δ** .

5. $k(x) = f(x + c)$: $2k'(x) + 3k(x) = 2f'(x + c) + 3f(x + c) = 9$
✓.

Si $C > 0$, on pose $c = -\frac{2}{3} \ln C$, de sorte que $C = e^{-\frac{3}{2}c}$; alors $f(x) = 3 + e^{-\frac{3}{2}(x+c)} = u(x + c)$: la courbe de f est l'image de celle de u par la translation de vecteur $-c\vec{i}$. Si $C < 0$, on écrit de même $-C = e^{-\frac{3}{2}c}$ et $f(x) = v(x + c)$. **Toutes les courbes au-dessus de Δ sont « la même » à une translation près**, de même pour celles au-dessous.



■ Corrigé de l'exercice 33

1. $f(x) = \ell + Ce^{ax}$, donc $f(x + h) - \ell = Ce^{ax}e^{ah} = e^{ah}(f(x) - \ell)$.

2. Avec $x = n$ et $h = 1$: $u_{n+1} - \ell = e^a(u_n - \ell)$, soit $u_{n+1} = e^a u_n + \ell(1 - e^a)$: la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison e^a , donc $u_n = \ell + (u_0 - \ell)e^{na}$.

3. Avec $q = e^a$ et $u_0 = 0$: $u_1 = \ell(1 - q) = 2$ et $u_2 = 2q + \ell(1 - q) = 2q + 2 = 8$, donc $e^a = 3$, $a = \ln 3$, $\ell = \frac{2}{1-3} = -1$ et $b = -a\ell = \ln 3$: $(E) : y' = (\ln 3)(y + 1)$, et $f(x) = -1 + Ce^{x \ln 3}$ avec $f(0) = 0$: $f(x) = 3^x - 1$ (on vérifie $f(1) = 2$, $f(2) = 8$).

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{k=0}^n 3^k - (n+1) = \frac{3^{n+1} - 1}{2} - (n+1) = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2}.$$

4. D'après la question 2, il suffit que $e^a = 2$ et $\ell(1 - 2) = 3$: $a = \ln 2$, $\ell = -3$, $b = -a\ell = 3 \ln 2$, soit $y' = (\ln 2)(y + 3)$, et g la solution telle que $g(0) = v_0 = 1$: $g(x) = 4 \cdot 2^x - 3$. La suite $(g(n))$ vérifie la même relation de récurrence que (v_n) et a le même premier terme, donc (récurrence

immédiate) $v_n = g(n)$: $v_n = 2^{n+2} - 3$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. T_x : $Y = f(x) + f'(x)(X - x)$. Comme $f'(x) \neq 0$: $Y = 0 \iff X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
2. La condition s'écrit $\frac{f(x)}{f'(x)} = 2$ pour tout x , soit $f' = \frac{1}{2}f$: $f(x) = Ce^{\frac{x}{2}}$, et f' ne s'annule pas si et seulement si $C \neq 0$. Réciproquement, ces fonctions conviennent : $f(x) = Ce^{\frac{x}{2}}$, $C \neq 0$.
3. T_x n'est pas parallèle à D (car $f'(x) \neq 0$) et la coupe au point d'abscisse X telle que $3 = f(x) + f'(x)(X - x)$, soit $X = x + \frac{3 - f(x)}{f'(x)}$. La condition $X = x + 2$ s'écrit $2f' = 3 - f$, soit $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$:
 $f(x) = 3 + Ce^{-\frac{x}{2}}$, $C \neq 0$.
 $f(x) - 3 = Ce^{-\frac{x}{2}} \rightarrow 0$ en $+\infty$: D est asymptote à toutes ces courbes en $+\infty$. $f(0) = 3 + C = 1$:
 $f(x) = 3 - 2e^{-\frac{x}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. $\ell = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$: $f(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$. $f'(x) = e^{-2x}$ et $f''(x) = -2e^{-2x} < 0$: la courbe est concave.
2. La courbe intégrale Γ_k passant par M_k (solution φ_k de (E) telle que $\varphi_k(kh) = u_k$) a pour pente en M_k : $\varphi'_k(kh) = 1 - 2u_k$, pente du segment $[M_k, M_{k+1}]$, qui porte donc la tangente en M_k à Γ_k .
 $u_{k+1} = (1 - 2h)u_k + h$ et $\frac{1}{2} = (1 - 2h)\frac{1}{2} + h$; par différence, $u_{k+1} - \frac{1}{2} = (1 - 2h)(u_k - \frac{1}{2})$: la suite $(u_k - \frac{1}{2})$ est géométrique, et $u_k - \frac{1}{2} = (1 - 2h)^k(0 - \frac{1}{2})$, d'où $u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2h)^k$. Pour $k = n$, $h = \frac{x}{n}$:
 $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n$.
3. Pour $n > 2x$: $\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2x}{n}\right)\right)$, et avec $t = -\frac{2x}{n} \rightarrow 0$: $n \ln(1 + t) = -2x \frac{\ln(1 + t)}{t} \rightarrow -2x$.
 Par continuité de $\exp$: $\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2x}$, et $u_n \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} = f(x)$.
4. $\psi(t) = \ln(1 - t) + t$: $\psi'(t) = \frac{-t}{1 - t}$, positive sur $]-\infty, 0]$, négative sur $[0, 1[$, donc $\psi \leq \psi(0) = 0$. Avec $t = \frac{2x}{n} \in]0, 1[$: $n \ln\left(1 - \frac{2x}{n}\right) \leq -2x$, donc $\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n \leq e^{-2x}$ et $u_n \geq f(x)$.
Explication. $u_k < \frac{1}{2}$ (car $(1 - 2h)^k > 0$), donc Γ_k est située sous la droite $y = \frac{1}{2}$ (les courbes intégrales ne se coupent pas) ; elle est alors concave, puisque $\varphi''_k = -2\varphi'_k = -2(1 - 2\varphi_k) < 0$. Une courbe concave est au-dessous de ses tangentes : M_{k+1} est au-dessus de Γ_k , donc Γ_{k+1} au-dessus de Γ_k . Par récurrence, chaque Γ_k est au-dessus de $\Gamma_0 = C_f$, et $u_n \geq f(x)$.
5. $u_{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(0,8)^{10} \approx 0,4463$ et $f(1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \approx 0,4323$: erreur d'environ 0,014.

■ Corrigé de l'exercice 36

1. a) $f'(x) = 1 + |f(x)| \geq 1 > 0$: f est strictement croissante, et $f(0) = 0$; donc $f(x) < 0$ si $x < 0$ et $f(x) > 0$ si $x > 0$.
 b) Sur $[0, +\infty[$, $f \geq 0$ donc $f' = 1 + f$, et $A(x) = (1 + f(x))e^{-x}$ vérifie $A' = (f' - 1 - f)e^{-x} = 0$: $A(x) = A(0) = 1$, d'où $f(x) = e^x - 1$. Sur $]-\infty, 0]$, $f \leq 0$ donc $f' = 1 - f$, et $B(x) = (1 - f(x))e^x$ vérifie $B' = (1 - f - f')e^x = 0$: $B(x) = 1$, d'où $f(x) = 1 - e^{-x}$. Ainsi $f = \varphi$.
2. $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ vaut $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$ si $x \rightarrow 0^+$, et $\frac{e^{-x} - 1}{-x} \rightarrow 1$ si $x \rightarrow 0^-$: φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 1 = 1 + |\varphi(0)|$. Pour $x > 0$: $\varphi'(x) = e^x = 1 + \varphi(x) = 1 + |\varphi(x)|$; pour $x < 0$: $\varphi'(x) = e^{-x} = 1 - \varphi(x) = 1 + |\varphi(x)|$ ✓.
 Pour $x > 0$: $\varphi(-x) = 1 - e^x = -\varphi(x)$: φ est impaire. Elle est continue, strictement croissante ($\varphi' \geq 1$), de limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$: c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. a) $k(x) = f(x) - x$ vérifie $k' = |f| \geq 0$: k est croissante, donc pour $x \leq 0$, $k(x) \leq k(0) = 1$, soit $f(x) \leq 1 + x$. Ainsi $f(-1) \leq 0 < f(0) = 1$; f étant continue et strictement croissante, elle s'annule en un unique $\alpha \in [-1, 0]$.
 b) Sur $[\alpha, +\infty[$, $f \geq 0$, donc $f' = 1 + f$ et $(1 + f(x))e^{-x} = (1 + f(\alpha))e^{-\alpha} = e^{-\alpha}$: $f(x) = e^{x-\alpha} - 1$. Alors $f(0) = e^{-\alpha} - 1 = 1$: $\alpha = -\ln 2$. Sur $]-\infty, \alpha]$, $f \leq 0$, donc $f' = 1 - f$ et $(1 - f(x))e^x = e^{\alpha} = \frac{1}{2}$:

$$f(x) = 2e^x - 1 \text{ si } x \geq -\ln 2, \quad f(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x \leq -\ln 2.$$

30

Corrigés : se ramener au connu

■ Corrigé de l'exercice 37

1. a) $p' + p = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma) = x^2 + 2x - 1$: $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -1$, $p(x) = x^2 - 1$. $y = x^2 - 1 + Ce^{-x}$, et la solution nulle en 0 ($C = 1$) : $x^2 - 1 + e^{-x}$.
 b) $p' + \sqrt{3}p = (\beta + \sqrt{3}\alpha)\cos x + (\sqrt{3}\beta - \alpha)\sin x$: $\alpha = \sqrt{3}\beta$ et $4\beta = 4$, d'où $p(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ et $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + Ce^{-\sqrt{3}x}$.
 p est bornée ($|p| \leq 2$). Si $C \neq 0$: $|y(x)| \geq |C|e^{-\sqrt{3}x} - 2 \rightarrow +\infty$ en $-\infty$, et y n'est pas bornée. p est la seule solution bornée.
- c) $p'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta)e^x$, $2p' + p = (3\alpha x + 2\alpha + 3\beta)e^x$: $\alpha = 1, \beta = 2$. $y = (x + 2)e^x + Ce^{-\frac{x}{2}}$;
 $f(0) = 2 + C = 0$: $f(x) = (x + 2)e^x - 2e^{-\frac{x}{2}}$.
- d) $p = 1$ convient ($0 + 25p = 25$). $z = y - 1$ vérifie $z'' + 25z = 0$ ($r = \pm 5i$) : $y = 1 + A\cos 5x + B\sin 5x$.
 $f(0) = 1 + A = 0$ et $f'(0) = 5B = 0$: $f(x) = 1 - \cos 5x = 2\sin^2 \frac{5x}{2}$.
2. Pour f deux fois dérivable, $f'' - 2f' = 4x \iff z' - 2z = 4x$ avec $z = f'$. Avec $z = ax + b$: $a - 2a - 2b = 4x$, donc $a = -2, b = -1$, et $z(x) = -2x - 1 + Ce^{2x}$. Les solutions de (F) sont les primitives de ces fonctions : $y = C_1 e^{2x} - x^2 - x + C_2, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

■ Corrigé de l'exercice 38

Partie I.

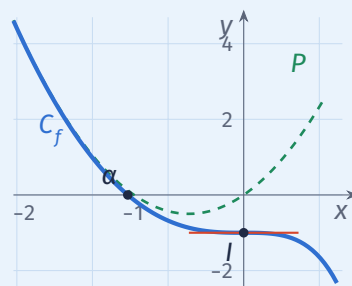
1. $p = ax^2 + bx + c$: $p' - 2p = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = -4x^2 + 2$, d'où $a = 2$, $b = 2$, $c = 0$:

$$p(x) = 2x^2 + 2x.$$
2. $(f - p)' - 2(f - p) = (f' - 2f) - (2 - 4x^2)$ est nul si et seulement si f est solution. Donc les solutions sont les fonctions $y = 2x^2 + 2x + Ce^{2x}$, et $f(0) = C = -1$ donne $f(x) = 2x^2 + 2x - e^{2x}$.

Partie II.

1. En $-\infty$: $e^{2x} \rightarrow 0$, donc $f \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = e^{2x}((2x^2 + 2x)e^{-2x} - 1)$ et $x^2 e^{-2x} \rightarrow 0$: $f \rightarrow -\infty$.
 $f(x) - (2x^2 + 2x) = -e^{2x} \rightarrow 0$ en $-\infty$, et $-e^{2x} < 0$: C_f est au-dessous de P , qui est une courbe asymptote à C_f en $-\infty$. En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 2x + 2 - \frac{e^{2x}}{x} \rightarrow -\infty$: branche parabolique de direction (Oy) .
2. $f'(x) = 4x + 2 - 2e^{2x}$, $f''(x) = 4(1 - e^{2x})$, positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$: f' croît puis décroît, de maximum $f'(0) = 0$. Donc $f'(x) < 0$ pour $x \neq 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. f'' s'annule en 0 en changeant de signe, $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$: $I(0, -1)$ est un point d'inflexion à tangente horizontale $y = -1$.
4. f est continue, strictement décroissante, de $+\infty$ à $-\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, d'où un unique α .
 $f(-1) = -e^{-2} < 0$ et $f(-1,1) = 0,22 - e^{-2,2} \approx 0,109 > 0$:

$$-1,1 < \alpha < -1 \quad (\alpha \approx -1,057).$$
5. C_f est sous P : $A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 e^{2x} dx = \frac{1 - e^{2\lambda}}{2}$ u.a., qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$.



■ Corrigé de l'exercice 39

1. $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t f''(e^t) + e^{2t} f'(e^t)$. Avec $t = \ln x$: $g'(\ln x) = x f'(x)$ et $g''(\ln x) = x f'(x) + x^2 f''(x)$, d'où le résultat.
2. $x f'(x) - 2f(x) - x^3 = g'(t) - 2g(t) - e^{3t}$ avec $t = \ln x$; comme $\ln$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, f est solution de (E_1) si et seulement si $g' - 2g = e^{3t}$. Avec ke^{3t} : $3k - 2k = 1$, $k = 1$, donc $g(t) = e^{3t} + Ce^{2t}$ et $f(x) = x^3 + Cx^2$. Nulle en 1 : $C = -1$, $f(x) = x^2(x - 1)$.
3. a) $x^2 f'' - x f' + 2f = (g'' - g') - g' + 2g = g'' - 2g' + 2g$ (en $t = \ln x$). Racines de $r^2 - 2r + 2$: $1 \pm i$, donc $g(t) = e^t(A \cos t + B \sin t)$ et $f(x) = x(A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x))$.
 b) $f(1) = g(0) = A = 0$ et $f'(1) = g'(0) = A + B = 1$: $f(x) = x \sin(\ln x)$. Elle s'annule en $x_k = e^{-k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$: une infinité de zéros dans $]0, 1]$. Comme $|f(x)| \leq x$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
4. $x^2 f'' - x f' - 3f = g'' - 2g' - 3g$, de racines caractéristiques 3 et -1 : $g(t) = Ae^{3t} + Be^{-t}$, $f(x) = Ax^3 + \frac{B}{x}$.
 $Ax^3 \rightarrow 0$ et $\frac{B}{x} \rightarrow \pm\infty$ si $B \neq 0$: les solutions ayant une limite finie en 0 sont les $x \mapsto Ax^3$ (limite 0).

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $z' = (f' + f)e^x$, donc $f' + f = \sin(e^x) \iff z' = e^x \sin(e^x)$ (de la forme $u' \sin u$), soit $z = C - \cos(e^x)$; les solutions de (E) sont les fonctions $y = e^{-x}(C - \cos(e^x))$, $C \in \mathbb{R}$.
2. $|C - \cos(e^x)| \leq |C| + 1$, donc $|y(x)| \leq (|C| + 1)e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$. En $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$, donc $C - \cos(e^x) \rightarrow C - 1$; si $C \neq 1$, le produit par $e^{-x} \rightarrow +\infty$ tend vers $\pm\infty$. Seule $C = 1$ convient : $f(x) = e^{-x}(1 - \cos(e^x)) = 2e^{-x} \sin^2\left(\frac{e^x}{2}\right)$, et avec $u = e^x \rightarrow 0^+$: $f(x) = u \cdot \frac{1 - \cos u}{u^2} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$.
3. $f \geq 0$ (produit de deux facteurs positifs). $f(x) = 0 \iff \sin \frac{e^x}{2} = 0 \iff \frac{e^x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{N}^*$ (car $e^x > 0$) : $x_k = \ln(2k\pi), k \in \mathbb{N}^*$. $x_{k+1} - x_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow 0$: les zéros se resserrent.
4. $\varphi(u) = \frac{u^2}{2} - 1 + \cos u$: $\varphi'(u) = u - \sin u \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$ (φ est paire). Alors $f(x) \leq e^{-x} \frac{e^{2x}}{2} = \frac{e^x}{2}$, et $1 - \cos \leq 2$ donne $f(x) \leq 2e^{-x}$. Si $x \leq \ln 2$: $f(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq 1$; si $x \geq \ln 2$: $f(x) \leq 2e^{-x} \leq 1$. Donc $0 \leq f \leq 1$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert) : en un extremum local x_0 , $f'(x_0) = 0$, et (E) donne $f(x_0) = \sin(e^{x_0}) - f'(x_0) = \sin(e^{x_0})$ ✓. (Le maximum de f , environ 0,72, est atteint vers $x_0 \approx 0,85$.)

■ Corrigé de l'exercice 41

1. $g'(t) = 2t f'(t^2)$ et $g''(t) = 2f'(t^2) + 4t^2 f''(t^2)$. Avec $t = \sqrt{x}$: $g''(\sqrt{x}) = 2f'(x) + 4x f''(x)$.
2. $4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(t) + g(t)$ avec $t = \sqrt{x}$; comme $t \mapsto t^2$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, f est solution de (E) si et seulement si $g'' + g = 0$ sur $]0, +\infty[$, soit $g(t) = A \cos t + B \sin t$: $f(x) = A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} = B = 1$, et $f'(x) = \frac{-A \sin \sqrt{x} + B \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ donne $f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{A}{\pi} = 0$: $f(x) = \sin \sqrt{x}$.
Zéros : $\sqrt{x} = k\pi$, soit $x = k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}^*$; maximum 1 pour $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, soit $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2, k \in \mathbb{N}$. L'écart $(k+1)^2\pi^2 - k^2\pi^2 = (2k+1)\pi^2$ tend vers $+\infty$: les oscillations sont de plus en plus lentes.
4. $f(x) = A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x} \rightarrow A$ en 0^+ : on prolonge par $f(0) = A$. Avec $u = \sqrt{x} \rightarrow 0^+$:
$$\frac{f(x) - A}{x} = A \frac{\cos u - 1}{u^2} + B \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{u}, \quad \text{où } \frac{\cos u - 1}{u^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{1}{u} \rightarrow +\infty.$$

Le taux a une limite finie si et seulement si $B = 0$: les solutions dérivables en 0 sont les $x \mapsto A \cos \sqrt{x}$, et $f'(0) = -\frac{A}{2}$.
5. $4xf'' + 2f' - f = g''(t) - g(t)$: $g'' = g, g(t) = Ae^t + Be^{-t}$, $f(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}$. $e^{-\sqrt{x}} \in]0, 1[$ et $e^{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$: les solutions bornées sont les $x \mapsto Be^{-\sqrt{x}}$.

■ Corrigé de l'exercice 42

$$1. z' = (f' + f)e^x \text{ et } z'' = (f'' + f' + f' + f)e^x = (f'' + 2f' + f)e^x. \text{ Donc } f'' + 2f' + f = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \iff z'' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$2. \int_0^x \arctan t \, dt = \left[t \arctan t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt = \boxed{x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}.$$

$$3. z' = \arctan x + C_1, \text{ puis } z = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2 :$$

$$\boxed{y = e^{-x} \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2 \right)}.$$

$$f(0) = z(0) = C_2 = 0 \text{ et } z'(0) = f'(0) + f(0) = 0 = C_1 : \boxed{f(x) = e^{-x} \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right)}.$$

4. $z'(x) = \arctan x$ a le signe de x : z est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $z(0) = 0$. Donc $z(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et $f = ze^{-x} \geq 0$, avec égalité seulement en 0.

5. En $+\infty$: $0 \leq z(x) \leq x \arctan x \leq \frac{\pi}{2}x$, donc $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}xe^{-x} \rightarrow 0$: $\boxed{f \rightarrow 0}$. En $-\infty$: $z(x) = |x| \left(|\arctan x| - \frac{\ln(1+x^2)}{2|x|} \right)$, où la parenthèse tend vers $\frac{\pi}{2}$; donc $z \rightarrow +\infty$, et comme $e^{-x} \rightarrow +\infty$: $\boxed{f \rightarrow +\infty}$.

Toute solution s'écrit $f(x) + (C_1 x + C_2)e^{-x}$, et $xe^{-x} \rightarrow 0$: toutes tendent vers 0 en $+\infty$.

31

Corrigés : second ordre homogène

■ Corrigé de l'exercice 43

$$a) r^2 - r - 12 = (r-4)(r+3) : y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} ; C_1 + C_2 = 0 \text{ et } 4C_1 - 3C_2 = 7 : \boxed{f(x) = e^{4x} - e^{-3x}}.$$

$$b) 25r^2 + 20r + 4 = (5r+2)^2 : y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{2}{5}x} ; C_2 = 5 \text{ et } f'(0) = C_1 - \frac{2}{5}C_2 = 0 : \boxed{f(x) = (2x+5) e^{-\frac{2}{5}x}}.$$

$$c) \Delta = 4 - 68 = -64, \text{ racines } -1 \pm 4i : y = e^{-x}(A \cos 4x + B \sin 4x) ; A = 2 \text{ et } -A + 4B = 2 : \boxed{f(x) = e^{-x}(2 \cos 4x + \sin 4x)}.$$

$$d) 2r^2 + r - 1 = (2r-1)(r+1) : y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x}. \text{ Si } C_1 \neq 0, f(x) \sim C_1 e^{\frac{x}{2}} \rightarrow \pm\infty \text{ en } +\infty ; \text{ donc } C_1 = 0, \text{ puis } f(0) = C_2 = 1 : \boxed{f(x) = e^{-x}}.$$

$$e) r^2 - 2\sqrt{2}r + 2 = (r - \sqrt{2})^2 : y = (C_1 x + C_2) e^{\sqrt{2}x} ; C_2 = 1 \text{ et } f'(0) = C_1 + \sqrt{2}C_2 = 0 : \boxed{f(x) = (1 - \sqrt{2}x) e^{\sqrt{2}x}}.$$

$$f) \Delta = 4 - 40 = -36, \text{ racines } -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i : y = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{3x}{2} + B \sin \frac{3x}{2} \right) ; f(0) = A = 0, \text{ puis } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = B e^{-\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{6}}, B = 1 : \boxed{f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{3x}{2}}.$$

Dans d) et f), les conditions imposées conduisent, comme les autres, à une valeur unique de chaque constante : la solution existe et est unique. Mais avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 : f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = B e^{-\frac{\pi}{3}} \sin \pi = 0 \neq 1$: **aucune solution**. Des conditions « aux deux bouts » ne garantissent ni l'existence ni l'unicité.

■ Corrigé de l'exercice 44

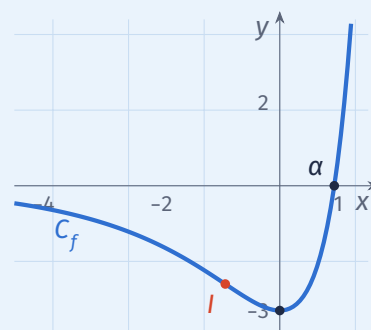
- $4r^2 + 9 = 0, r = \pm \frac{3}{2}i$: $y = A \cos \frac{3}{2}x + B \sin \frac{3}{2}x$. $f(0) = A = 1$ et $f'(0) = \frac{3}{2}B = \frac{3\sqrt{3}}{2}, B = \sqrt{3}$:
 $f(x) = \cos \frac{3}{2}x + \sqrt{3} \sin \frac{3}{2}x$.
- $f(x) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{3}{2}x + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{3}{2}x \right) = 2 \cos \left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3} \right)$: amplitude 2, période $T = \frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$.
 Maximum 2 pour $\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$: $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- Avec $u = \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$: $\cos u = \frac{1}{2} \iff u \in \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$, et $x = \frac{2}{3}\left(u + \frac{\pi}{3}\right)$, d'où
 $S = \left\{0, \frac{4\pi}{9}, \frac{4\pi}{3}, \frac{16\pi}{9}\right\}$. $f(x) \geq 1 \iff \cos u \geq \frac{1}{2} \iff u \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$: $S' = \left[0, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{16\pi}{9}\right]$.
- $h = A \cos \frac{3}{2}x + B \sin \frac{3}{2}x$ et $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} = B = 0$; l'amplitude est alors $|A| = 3$:
 $h(x) = 3 \cos \frac{3}{2}x$ ou $h(x) = -3 \cos \frac{3}{2}x$.

■ Corrigé de l'exercice 45

Partie I. $2r^2 - 5r + 2 = (2r - 1)(r - 2)$: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$. $C_1 + C_2 = -3$ et $2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 0$: $C_1 = 1, C_2 = -4$,
 $f(x) = e^{2x} - 4e^{\frac{x}{2}}$.

Partie II.

- En $-\infty$: $f \rightarrow 0$: asymptote $y = 0$, et $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{3x}{2}} - 4 \right) < 0$ au voisinage de $-\infty$. En $+\infty$:
 $f(x) = e^{2x} \left(1 - 4e^{-\frac{3x}{2}} \right) \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty$: branche parabolique de direction (Oy).
- $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{3x}{2}} - 1 \right)$, du signe de x : f décroît de 0 à $f(0) = -3$ sur $]-\infty, 0]$, puis croît de -3 à $+\infty$.
- $f(x) = 0 \iff e^{\frac{3x}{2}} = 4 \iff x = \alpha = \frac{4}{3} \ln 2 \approx 0,924$.
 $f < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $f > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
- $f''(x) = 4e^{2x} - e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(4e^{\frac{3x}{2}} - 1 \right)$ s'annule en changeant de signe uniquement pour $e^{\frac{3x}{2}} = \frac{1}{4}$, soit $x = -\frac{4}{3} \ln 2 = -\alpha$. Avec $e^{-\frac{\alpha}{2}} = 2^{-\frac{2}{3}}$: $f(-\alpha) = 2^{-\frac{8}{3}} - 2^{\frac{4}{3}} = -15 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}, I\left(-\frac{4}{3} \ln 2, -\frac{15}{4\sqrt[3]{4}}\right)$ ($\approx -2,36$).



- Nombre de solutions de $f(x) = m$: 0 si $m < -3$; 1 si $m = -3$; 2 si $-3 < m < 0$ (une dans $]-\infty, 0[$, une dans $]0, \alpha[$) ; 1 si $m \geq 0$.

Partie III.

- $\int_{\lambda}^{\alpha} (2f'' - 5f' + 2f) = 2[f']_{\lambda}^{\alpha} - 5[f]_{\lambda}^{\alpha} + 2J(\lambda) = 0$, d'où $J(\lambda) = \frac{5}{2}(f(\alpha) - f(\lambda)) - (f'(\alpha) - f'(\lambda))$.
- $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) = 2e^{\frac{\alpha}{2}}(4 - 1) = 6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 6\sqrt[3]{4}$. Donc $J(\lambda) = -\frac{1}{2}e^{2\lambda} + 8e^{\frac{\lambda}{2}} - 6\sqrt[3]{4}$. Comme $f \leq 0$ sur $[\lambda, \alpha]$, l'aire vaut $-J(\lambda)$, qui tend vers $6\sqrt[3]{4} \approx 9,52$ u.a. (sans aucune primitive à chercher !)

■ Corrigé de l'exercice 46

1. $\Delta > 0$: $f(x) = 0 \iff C_1 e^{(r_1 - r_2)x} = -C_2$, avec $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$. Si $C_1 = 0$, pas de zéro ; sinon $x \mapsto e^{(r_1 - r_2)x}$ est strictement monotone ($r_1 \neq r_2$) : au plus un zéro. $\Delta = 0$: $f(x) = 0 \iff C_1 x + C_2 = 0$, au plus une solution.
2. a) $f(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ avec $(A, B) \neq (0, 0)$. Avec $R = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$, le point $(\frac{A}{R}, \frac{B}{R})$ est sur le cercle trigonométrique : il existe φ tel que $\cos \varphi = \frac{A}{R}$, $\sin \varphi = \frac{B}{R}$, et $A \cos \beta x + B \sin \beta x = R \cos(\beta x - \varphi)$.
- $$f(x) = 0 \iff \beta x - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = z_k = \frac{\varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi}{\beta}, k \in \mathbb{Z} : z_{k+1} - z_k = \frac{\pi}{\beta}.$$
- b) $f'(x) = R e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x - \varphi) - \beta \sin(\beta x - \varphi)) = R \rho e^{\alpha x}(\cos \psi \cos(\beta x - \varphi) - \sin \psi \sin(\beta x - \varphi)) = R \rho e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi + \psi)$. f' s'annule en changeant de signe exactement aux $t_k = \frac{\varphi - \psi + \frac{\pi}{2} + k\pi}{\beta}$: ce sont les points d'extremum, et $t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\beta}$. Enfin $\beta t_{k+1} - \varphi = \beta t_k - \varphi + \pi$, donc $f(t_{k+1}) = R e^{\alpha t_k} e^{\frac{\alpha \pi}{\beta}} \cdot (-\cos(\beta t_k - \varphi)) = -e^{\frac{\alpha \pi}{\beta}} f(t_k)$.
3. f a plusieurs zéros, donc $\Delta < 0$ (question 1). Zéros consécutifs k et $k+1$: $\frac{\pi}{\beta} = 1$, $\beta = \pi$. Rapport : $-e^\alpha = -\frac{1}{e}$, $\alpha = -1$. L'équation caractéristique est $(r+1)^2 + \pi^2 = 0$: $a = 2$, $b = 1 + \pi^2$. Alors $f(x) = e^{-x}(A \cos \pi x + B \sin \pi x)$, $f(0) = A = 0$ et $f'(0) = \pi B = \pi$: $f(x) = e^{-x} \sin(\pi x)$, qui s'annule bien exactement aux entiers.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $W' = f'g' + fg'' - f''g - f'g' = fg'' - f''g = f(-ag' - bg) - (-af' - bf)g = -a(fg' - f'g) = -aW$. Donc $(We^{\alpha x})' = (W' + aW)e^{\alpha x} = 0$ et $W(x) = W(0)e^{-\alpha x}$: nul partout si $W(0) = 0$, jamais nul sinon.
2. Le déterminant de ce système linéaire est $f(0)g'(0) - f'(0)g(0) = W(0) \neq 0$: il a une unique solution (λ, μ) . Alors $k = \lambda f + \mu g$ est solution de (E) (linéarité), avec $k(0) = h(0)$ et $k'(0) = h'(0)$: par unicité, $h = \lambda f + \mu g$.
3. Si $f(0) = f'(0) = 0$, l'unicité donne $f = 0$: exclu. Si $f(0) \neq 0$: $\varphi = f(0)g - g(0)f$ est solution, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = f(0)g'(0) - g(0)f'(0) = W(0) = 0$, donc $\varphi = 0$ et $g = \frac{g(0)}{f(0)}f$. Si $f(0) = 0$, alors $f'(0) \neq 0$ et $W(0) = -f'(0)g(0) = 0$ donne $g(0) = 0$; $\psi = f'(0)g - g'(0)f$ vérifie $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, donc $\psi = 0$ et $g = \frac{g'(0)}{f'(0)}f$.
- Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$, alors $W(x_0) = 0$, donc $W = 0$ (question 1) et g est proportionnelle à f .
4. a) $f \neq 0$ (sinon $W = 0$). Si $f'(x_1) = 0$, alors $f(x_1) = f'(x_1) = 0$ et $f = 0$ par unicité : exclu ; de même $f'(x_2) \neq 0$. Par le TVI, f garde un signe constant sur $]x_1, x_2[$, disons $f > 0$ (sinon on change f en $-f$). Alors $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x)}{x - x_1} \geq 0$, donc $f'(x_1) > 0$; et $f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x)}{x - x_2} \leq 0$, donc $f'(x_2) < 0$.
- b) $W(x_1) = -f'(x_1)g(x_1)$ et $W(x_2) = -f'(x_2)g(x_2)$ sont non nuls et de même signe (signe de $W(0)$). Donc $g(x_1), g(x_2)$ sont non nuls, de signes contraires (car $f'(x_1), f'(x_2)$ le sont) : par le TVI, g s'annule dans $]x_1, x_2[$. **Les zéros de f et de g s'entrelacent.**
5. $r^2 + 6r + 25 = 0$ a pour racines $-3 \pm 4i$: u et v sont solutions. $u' = -e^{-3x}(3 \cos 4x + 4 \sin 4x)$, $v' = e^{-3x}(4 \cos 4x - 3 \sin 4x)$, d'où

$$W = uv' - u'v = e^{-6x} [\cos 4x (4 \cos 4x - 3 \sin 4x) + \sin 4x (3 \cos 4x + 4 \sin 4x)] = 4e^{-6x}$$

(on retrouve $W(0)e^{-\alpha x}$ avec $\alpha = 6$). Comme $W(0) = 4 \neq 0$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto e^{-3x}(\lambda \cos 4x + \mu \sin 4x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les zéros de u sont les $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, ceux de v les $\frac{k\pi}{4}$: entre

deux zéros consécutifs de u se trouve exactement un zéro de v ✓.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $f = g e^x$: $f' = (g' + g)e^x$ et $f'' = (g'' + 2g' + g)e^x$, d'où

$$f'' - 2f' + (1 - m)f = (g'' + 2g' + g - 2g' - 2g + g - mg)e^x = (g'' - mg)e^x.$$

2. $g = f_m e^{-x}$ vérifie $g'' = mg$, $g(0) = 0$ et $g'(0) = f'_m(0) - f_m(0) = 1$.

• $m > 0$: $g = C_1 e^{\sqrt{m}x} + C_2 e^{-\sqrt{m}x}$, $C_1 + C_2 = 0$ et $\sqrt{m}(C_1 - C_2) = 1$: $C_1 = -C_2 = \frac{1}{2\sqrt{m}}$.

• $m = 0$: $g'' = 0$, $g(x) = x$. $m < 0$: $g'' + (-m)g = 0$, $g = A \cos \sqrt{-m}x + B \sin \sqrt{-m}x$, $A = 0$, $B = \frac{1}{\sqrt{-m}}$.

On multiplie par e^x : on obtient les trois formules annoncées.

3. Pour $x = 0$, tout vaut 0. Pour $x \neq 0$ et $m > 0$, avec $u = \sqrt{m}x \rightarrow 0$: $f_m(x) = x e^x \cdot \frac{e^u - e^{-u}}{2u}$ et $\frac{e^u - e^{-u}}{2u} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^u - 1}{u} + \frac{e^{-u} - 1}{-u} \right) \rightarrow 1$. Pour $m < 0$, avec $u = \sqrt{-m}x \rightarrow 0$: $f_m(x) = x e^x \frac{\sin u}{u} \rightarrow x e^x$.

Donc $\lim_{m \rightarrow 0} f_m(x) = x e^x = f_0(x)$: la solution dépend continûment de m .

4. $k(u) = e^u - e^{-u} - 2u$: $k'(u) = e^u + e^{-u} - 2 = (e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}})^2 \geq 0$ et $k(0) = 0$, donc $k \geq 0$ sur $[0, +\infty[$; $s(u) = u - \sin u$: $s' = 1 - \cos u \geq 0$, $s(0) = 0$, donc $s \geq 0$. Pour $x \geq 0$ et $u = \sqrt{|m|}x \geq 0$:

$$m > 0 : f_m(x) = \frac{e^x (e^u - e^{-u})}{2\sqrt{m}} \geq \frac{e^x \cdot 2u}{2\sqrt{m}} = x e^x, \quad m < 0 : f_m(x) = \frac{e^x \sin u}{\sqrt{-m}} \leq \frac{e^x u}{\sqrt{-m}} = x e^x.$$

5. Si $m \geq 0$ et $x > 0$: $f_m(x) \geq f_0(x) = x e^x > 0$, **aucun zéro**. Si $m < 0$: $f_m(x) = 0 \iff \sqrt{-m}x = k\pi$, soit $x = \frac{k\pi}{\sqrt{-m}}$, $k \in \mathbb{N}^*$: **une infinité de zéros**, le premier étant $x_m = \frac{\pi}{\sqrt{-m}} \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow 0^-$.

Interprétation. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = 4m$. Quand $\Delta \rightarrow 0^-$, la pseudo-période $\frac{2\pi}{\sqrt{-m}}$ tend vers $+\infty$: les oscillations « s'étirent » et disparaissent à la frontière $\Delta = 0$, où $f_0(x) = x e^x$ est la limite commune des deux régimes.

32

Corrigés : équations fonctionnelles

■ Corrigé de l'exercice 49

1. **a)** $x = y = 0$: $g(0) = 2g(0) + g(0)^2$, soit $g(0)(1 + g(0)) = 0$: $g(0) \in \{0, -1\}$. Si $g(0) = -1$, $y = 0$ donne $g(x) = g(x) - 1 - g(x)$, donc $g = -1$ (fonction constante qui convient : $-1 = -1 - 1 + 1$).
b) À x fixé, on dérive par rapport à y : $g'(x+y) = g'(y)(1 + g(x))$; avec $y = 0$: $g'(x) = a(1 + g(x))$. Ainsi g est solution de $y' = ay + a$ avec $g(0) = 0$: $g = C e^{ax} - 1$ (si $a = 0$, g est constante égale à $g(0) = 0$), et $g(0) = 0$ donne $C = 1$: $g(x) = e^{ax} - 1$. Réciproquement, $1 + g(x+y) = e^{a(x+y)} = (1 + g(x))(1 + g(y)) = 1 + g(x) + g(y) + g(x)g(y)$ ✓. Solutions : $g = -1$ et $x \mapsto e^{ax} - 1$ ($a \in \mathbb{R}$).
2. **a)** $x = y = 1$: $h(1) = h(1)^2$, donc $h(1) \in \{0, 1\}$; si $h(1) = 0$, $y = 1$ donne $h(x) = h(x)h(1) = 0$.
b) À x fixé, on dérive par rapport à y : $x h'(xy) = h(x)h'(y)$; avec $y = 1$: $x h'(x) = a h(x)$. Alors $k'(t) = e^t h'(e^t) = a h(e^t) = a k(t)$ et $k(0) = h(1) = 1$, donc $k(t) = e^{at}$ et $h(x) = k(\ln x) = e^{a \ln x}$: $h(x) = x^a$, qui convient : $(xy)^a = x^a y^a$. Solutions : $h = 0$ et $x \mapsto x^a$ ($a \in \mathbb{R}$).
3. Supposons f non nulle : soit x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Avec $x = x_0$, $y = 0$: $f(x_0) = f(x_0)e^{f(0)}$, donc $e^{f(0)} = 1$ et $f(0) = 0$. À x fixé, on dérive par rapport à y : $f'(x+y) = f(x)f'(y)e^{f(y)}$; avec $y = 0$:

$f' = cf$ où $c = f'(0)$. Donc $f(x) = Ke^{cx}$, et $f(0) = 0$ donne $K = 0 : f = 0$, contradiction. $f = 0$, qui convient bien. (Plus directement : $x = 0$ donne $f(y) = f(0)e^{f(y)} = 0$.)

■ Corrigé de l'exercice 50

- a) $y = 0 : 2f(x) = 2f(x) + 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. $x = 0 : f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y) : f$ est paire.

b) À x fixé, on dérive deux fois par rapport à $y : f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y)$; avec $y = 0 : f''(x) = f''(0)$. Donc $f'' = 2c$ (constante), $f(x) = cx^2 + \beta x + f(0) = cx^2 + \beta x$, et la parité impose $\beta = 0 : f(x) = cx^2$. Réciproquement $c(x+y)^2 + c(x-y)^2 = 2cx^2 + 2cy^2$ ✓ (c'est l'égalité du parallélogramme).
- On dérive deux fois par rapport à $y : f''(x+y) + f''(x-y) = -2f(x)\cos y$; avec $y = 0 : f''(x) = -f(x)$. Donc $f(x) = A\cos x + B\sin x$. Réciproquement, $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y$ et $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y$: par linéarité, toutes ces fonctions conviennent. $f(0) = A = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 2$ donnent $B = \sqrt{3} : f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
- Comme $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch} 0 = 1$, on obtient de même $2f''(x) = 2f(x) : f'' = f$, donc $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Réciproquement, $e^{x+y} + e^{x-y} = 2e^x \operatorname{ch} y$ et $e^{-x-y} + e^{-x+y} = 2e^{-x} \operatorname{ch} y$: ces fonctions conviennent.

■ Corrigé de l'exercice 51

- a) $e^{-x} \int_0^x e^{x-t} f(t) dt = \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \int_0^x g(t) dt$. En multipliant (E_λ) par $e^{-x} \neq 0 : (E_\lambda) \iff g(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^x g(t) dt$ pour tout x .

b) Si f vérifie $(E_\lambda) : x \mapsto \int_0^x g$ est la primitive de g (continue) nulle en 0, donc g est dérivable, $g' = -e^{-x} + \lambda g$ et $g(0) = 1$. Alors $f = e^x g$ est dérivable, $f(0) = 1$ et $f' = e^x(g + g') = e^x((1+\lambda)g - e^{-x}) = (1+\lambda)f - 1$. Réciproquement, si $f' = (1+\lambda)f - 1$ et $f(0) = 1$, alors $g' = e^{-x}(f' - f) = \lambda g - e^{-x}$; la fonction $\varphi(x) = g(x) - e^{-x} - \lambda \int_0^x g$ vérifie $\varphi' = 0$ et $\varphi(0) = 0$, donc $\varphi = 0 : f$ vérifie (E_λ) d'après a).

c) Si $\lambda \neq -1 : f = \frac{1}{1+\lambda} + Ce^{(1+\lambda)x}$ et $f(0) = 1$ donne $C = \frac{\lambda}{1+\lambda} : f(x) = \frac{1 + \lambda e^{(1+\lambda)x}}{1 + \lambda}$. Si $\lambda = -1 : f' = -1$, $f(x) = 1 - x$.

Sur $[0, +\infty[: \text{si } \lambda < -1, e^{(1+\lambda)x} \rightarrow 0 \text{ et } f \text{ est bornée (continue, de limite finie)} ; \text{si } \lambda = -1, f \rightarrow -\infty ; \text{si } \lambda > -1 \text{ et } \lambda \neq 0, |f| \rightarrow +\infty ; \text{si } \lambda = 0, f = 1. f \text{ bornée} \iff \lambda < -1 \text{ ou } \lambda = 0.$
- En multipliant par $e^x : g(x) = xe^x + 2 \int_0^x g(t) dt$. Comme en 1, cela équivaut à : g dérivable, $g' = (x+1)e^x + 2g$ et $g(0) = 0$. Avec $g' = e^x(f + f') : f' = f + x + 1$ et $f(0) = 0$. Une solution affine $ax + \beta$ vérifie $a = ax + \beta + x + 1$, d'où $a = -1, \beta = -2$. Donc $f = Ce^x - x - 2$ avec $C = 2 : f(x) = 2e^x - x - 2$.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $\min(x, t) = t$ pour $t \leq x$ et $= x$ pour $t \geq x$: $Kf(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$. Les fonctions $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et $x \mapsto \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt$ ont pour dérivées $xf(x)$ et $-f(x)$: $(Kf)'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t) dt - xf(x) = \int_x^1 f(t) dt$, à nouveau dérivable : $(Kf)'' = -f$. $\boxed{Kf(0) = 0, (Kf)'(1) = 0}$.
2. $f = 1 + \lambda Kf$ est deux fois dérivable, $f'' = \lambda(Kf)'' = -\lambda f$, $f(0) = 1 + \lambda Kf(0) = 1$ et $f'(1) = \lambda(Kf)'(1) = 0$.
3. $u'' = f'' + \lambda f = 0$: u est affine, $u(x) = \alpha x + \beta$. Or $u(0) = f(0) - 1 - \lambda Kf(0) = 0$ et $u'(1) = f'(1) - \lambda(Kf)'(1) = 0$, d'où $\beta = \alpha = 0$: $u = 0$, c'est-à-dire $f = 1 + \lambda Kf$. Ainsi $(E_\lambda) \iff (f'' = -\lambda f, f(0) = 1, f'(1) = 0)$.
4. (E_1) : $f = \cos x + B \sin x$ et $f'(1) = -\sin 1 + B \cos 1 = 0$, d'où $B = \tan 1$: $\boxed{f(x) = \frac{\cos(x-1)}{\cos 1}}$.
 $(E_{-\omega^2})$: $f'' = \omega^2 f$, $f = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$; les conditions $\alpha + \beta = 1$ et $\omega(\alpha e^\omega - \beta e^{-\omega}) = 0$ ont une unique solution (déterminant $-\omega(e^\omega + e^{-\omega}) \neq 0$), et $x \mapsto \frac{\text{ch}(\omega(x-1))}{\text{ch } \omega}$ (avec $\text{ch } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$) les vérifie : $\boxed{f(x) = \frac{\text{ch}(\omega(x-1))}{\text{ch } \omega}}$; pour $\omega = 1$: $f(x) = \frac{e^{x-1} + e^{1-x}}{e + e^{-1}}$.
 (E_{ω^2}) : $f = \cos \omega x + B \sin \omega x$ et $f'(1) = \omega(-\sin \omega + B \cos \omega)$. Si $\cos \omega \neq 0$: unique $B = \tan \omega$, $f(x) = \frac{\cos(\omega(x-1))}{\cos \omega}$. Si $\cos \omega = 0$: $\sin \omega = \pm 1$ et $f'(1) = \mp \omega \neq 0$: **aucune solution** (pour $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$).

■ Corrigé de l'exercice 53

1. $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0) + a^2$, donc $\boxed{f(0) = -a^2}$. À x fixé, on dérive par rapport à y : $f'(x+y) = f'(y) + f'(x)f''(y)$; avec $y = 0$: $f'(x) = a + bf'(x)$, soit $(1-b)f'(x) = a$.
2. $f' = \frac{a}{1-b}$ est constante, égale à $f'(0) = a$; donc $\boxed{f(x) = ax - a^2}$. Réciproquement : $(ax - a^2) + (ay - a^2) + a \cdot a = a(x+y) - a^2$ ✓.
3. a) Avec $b = 1$, la relation du 1 donne $a = 0$, puis $f(0) = -a^2 = 0$.
 b) En dérivant (A) par rapport à x : $f'(x+y) = g(x) + g'(x)g(y)$; par rapport à y : $f'(x+y) = g(y) + g(x)g'(y)$. D'où l'égalité.
 c) $g(0) = 0$ et $g'(0) = b = 1$: g n'est pas la fonction nulle, d'où y_0 . Avec $y = y_0$: $g'(x)g(y_0) = g(y_0) + g(x)(g'(y_0) - 1)$, soit $g' = 1 + cg$ avec $c = \frac{g'(y_0)-1}{g(y_0)}$.
 d) Si $c = 0$: $g' = 1$, $g(0) = 0$, $g(x) = x$ et $\boxed{f(x) = \frac{x^2}{2}}$. Si $c \neq 0$: $g = Ke^{cx} - \frac{1}{c}$ et $g(0) = 0$ donne $g(x) = \frac{e^{cx}-1}{c}$, puis (primitive nulle en 0) $\boxed{f(x) = \frac{e^{cx}-1-cx}{c^2}}$.
4. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy = \frac{(x+y)^2}{2}$ ✓. Pour $c \neq 0$: $c^2(f(x) + f(y) + f'(x)f'(y)) = e^{cx} - 1 - cx + e^{cy} - 1 - cy + (e^{cx}-1)(e^{cy}-1) = e^{c(x+y)} - 1 - c(x+y) = c^2 f(x+y)$ ✓.
Solutions de (A) : $x \mapsto ax - a^2$ ($a \in \mathbb{R}$), $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \frac{e^{cx}-1-cx}{c^2}$ ($c \neq 0$). (La deuxième est la limite de la troisième quand $c \rightarrow 0$.)

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $f' = f \cdot u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ dérivable : f' est dérivable et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'(x) = -\frac{1}{x^2}f(x)$ (par (E) en $\frac{1}{x}$).
Donc $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.
2. $g'(t) = e^t f'(e^t)$ et $g''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$: avec $x = e^t$, $x^2 f''(x) + f(x) = g''(t) - g'(t) + g(t)$.
Comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, on obtient l'équivalence.
3. $r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $g(t) = e^{t/2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$, et $f(x) = g(\ln x) = \sqrt{x} (A \cos(\omega \ln x) + B \sin(\omega \ln x))$.
4. Avec $\theta = \omega \ln x$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\left(\frac{A}{2} + \omega B \right) \cos \theta + \left(\frac{B}{2} - \omega A \right) \sin \theta \right]$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} (A \cos \theta - B \sin \theta)$. Comme θ décrit $\mathbb{R}$, (E) équivaut (prendre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, la réciproque étant claire) à $\omega B = \frac{A}{2}$ et $\frac{3}{2}B = \omega A$, c'est-à-dire, avec $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $B = \frac{A}{\sqrt{3}}$. Alors, avec $C = \frac{2A}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = A\sqrt{x} \left(\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) = C\sqrt{x} \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{6} \sin \theta \right) = \boxed{C\sqrt{x} \cos \left(\omega \ln x - \frac{\pi}{6} \right)}.$$

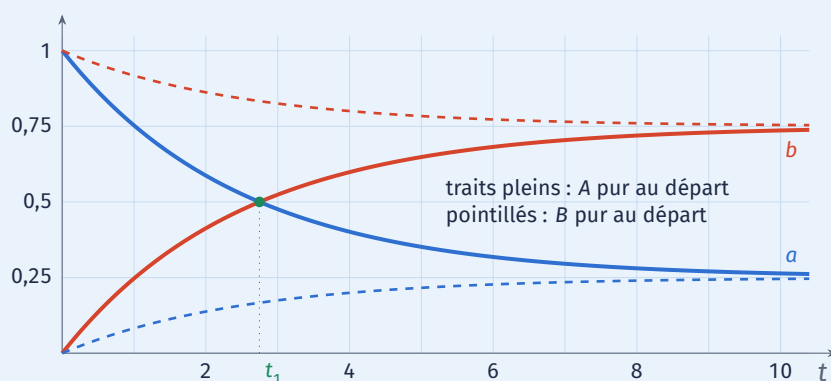
5. $f(1) = C \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}C = \sqrt{3}$: $C = 2$ et $f(x) = 2\sqrt{x} \cos \left(\omega \ln x - \frac{\pi}{6} \right)$, d'où $|f(x)| \leq 2\sqrt{x}$. Contact lorsque $\omega \ln x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi$: $x_k = \exp \left(\frac{(1 + 12k)\pi}{3\sqrt{3}} \right)$, $k \in \mathbb{Z}$ (une infinité, s'accumulant en 0). Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

33

Corrigés : modélisation

■ Corrigé de l'exercice 55

- Comme $b = 1 - a$: $a' = -0,3a + 0,1(1 - a) = -0,4a + 0,1$. Solution constante : $\frac{0,1}{0,4} = 0,25$. Donc $a = 0,25 + Ce^{-0,4t}$, et $a(0) = 1$ donne $C = 0,75$: $a(t) = 0,25 + 0,75e^{-0,4t}$, $b(t) = 0,75(1 - e^{-0,4t})$.
- $a_\infty = 0,25$, $b_\infty = 0,75$ et $K = 3 = \frac{0,3}{0,1}$: à l'équilibre $a' = 0$, soit $0,3a = 0,1b$: les deux réactions se compensent.
- $a = b \iff a = \frac{1}{2} \iff e^{-0,4t} = \frac{1}{3}$: $t_1 = 2,5 \ln 3 \approx 2,75 \text{ min}$. Pour tous $t, \tau \geq 0$: $a(t + \tau) - a_\infty = e^{-0,4\tau}(a(t) - a_\infty)$, et $e^{-0,4\tau} = \frac{1}{2} \iff \tau = 2,5 \ln 2 \approx 1,73 \text{ min}$.
- $a(0) = 0$ donne $C = -0,25$: $a(t) = 0,25(1 - e^{-0,4t})$ et $b(t) = 0,75 + 0,25e^{-0,4t}$: mêmes limites. Plus généralement $a(t) = 0,25 + (a(0) - 0,25)e^{-0,4t} \rightarrow 0,25$: **l'équilibre ne dépend pas de l'état initial.**

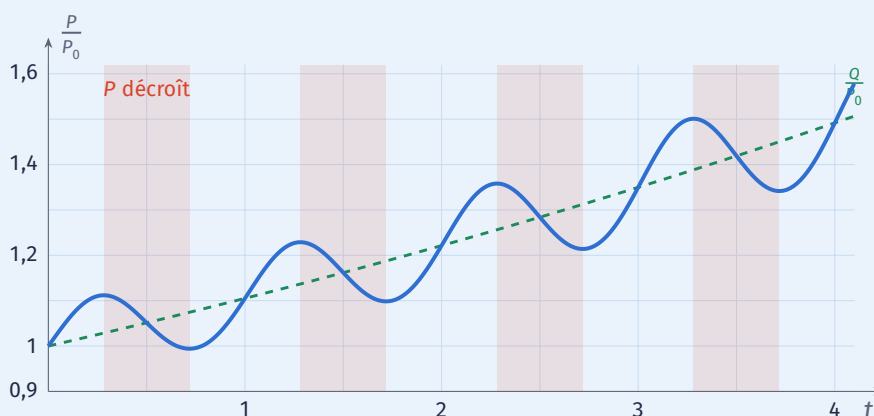


■ Corrigé de l'exercice 56

- $D - S = 90 - 6p$, donc $p' = -0,6p + 9$. $D = S \iff p = 15$: $p_e = 15$ est la solution constante, et $p = 15 + Ce^{-0,6t}$ avec $C = 10$: $p(t) = 15 + 10e^{-0,6t} \rightarrow 15$. Puis $p - p_e \leq 0,1 \iff e^{-0,6t} \leq 0,01 \iff t \geq \frac{\ln 100}{0,6} \approx 7,68 \text{ mois}$.
- $D - S = 90 - 6p + 3,6t$, d'où l'équation. Avec $p = \alpha t + \beta$: $\alpha = -0,6\alpha t - 0,6\beta + 9 + 0,36t$ pour tout t , d'où $\alpha = 0,6$ et $\beta = 14$. Donc $p = 0,6t + 14 + Ce^{-0,6t}$, et $p(0) = 25$: $p(t) = 0,6t + 14 + 11e^{-0,6t}$.
 - $p'(t) = 0,6 - 6,6e^{-0,6t}$: $p'(0) = -6 < 0$, et $p'(t) < 0 \iff e^{0,6t} < 11 \iff t < \frac{5}{3} \ln 11 \approx 4 \text{ mois}$. Le prix baisse, puis monte ; son minimum est $p\left(\frac{5}{3} \ln 11\right) = \ln 11 + 14 + 1 = 15 + \ln 11 \approx 17,40 \text{ DH}$.
 - $D = S \iff 6p = 90 + 3,6t$: $p_e(t) = 15 + 0,6t$. Alors $p(t) - p_e\left(t - \frac{5}{3}\right) = 0,6t + 14 + 11e^{-0,6t} - (14 + 0,6t) = 11e^{-0,6t} \rightarrow 0$: le prix **suit l'équilibre avec un retard de $\frac{5}{3}$ mois (50 jours)** ; il reste 1 DH au-dessous de $p_e(t)$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $R'(t) = 0,1 + \frac{2\pi \cos(2\pi t)}{4\pi} = r(t)$. Puis $z' = (P' - R'P)e^{-R} = (P' - rP)e^{-R} = 0$: z est constante, égale à $z(0) = P_0$ (car $R(0) = 0$), d'où $P(t) = P_0 e^{R(t)}$. Réciproquement $(P_0 e^R)' = R' P_0 e^R = rP$ ✓.
2. $R(t+1) = 0,1t + 0,1 + \frac{\sin(2\pi t + 2\pi)}{4\pi} = R(t) + 0,1$, d'où $P(t+1) = e^{0,1} P(t)$ et $P(n) = P_0 e^{0,1n}$. Doublement : $e^{0,1n} \geq 2 \iff n \geq 10 \ln 2 \approx 6,93$: au bout de **7 ans**.
3. $P > 0$, donc P' a le signe de r : P décroît $\iff \cos(2\pi t) \leq -\frac{1}{5}$. Avec $\theta_0 = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $t_0 = \frac{\theta_0}{2\pi} \approx 0,282$: P décroît sur $[t_0, 1 - t_0] \approx [0,282; 0,718]$ (automne et hiver), pendant $1 - 2t_0 \approx 0,436$ an, soit **environ 5,2 mois**.
4. $\frac{P(t)}{Q(t)} = e^{R(t)-0,1t} = \exp\left(\frac{\sin(2\pi t)}{4\pi}\right) \in \left[e^{-\frac{1}{4\pi}}, e^{\frac{1}{4\pi}}\right] \approx [0,92; 1,08]$: l'effectif reste à moins de 8 % du modèle au taux moyen ; à long terme, **seul le taux moyen compte**.
5. $R(t) = \int_0^t r(s) ds$ est la primitive de r (continue) nulle en 0 : le raisonnement du 1 donne $P = P_0 e^R$. La fonction $\psi(t) = \int_t^{t+1} r = R(t+1) - R(t)$ a pour dérivée $r(t+1) - r(t) = 0$: $\psi = \psi(0) = m$. D'où $P(t+1) = P_0 e^{R(t)+m} = e^m P(t)$ et $P(n) = P_0 e^{mn}$: $\rightarrow +\infty$ si $m > 0$, $\rightarrow 0$ si $m < 0$, constante si $m = 0$ (P est alors 1-périodique).

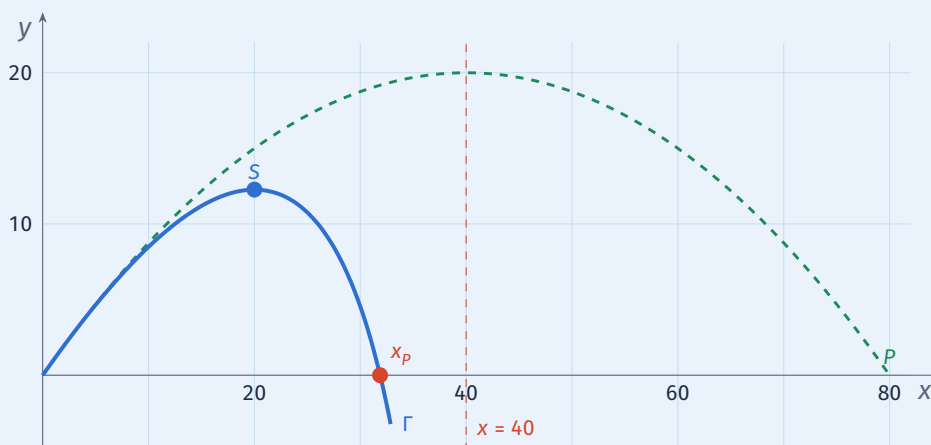


■ Corrigé de l'exercice 58

1. Sur l'axe du diamètre, la loi de Newton donne $m x'' = -\frac{mg}{R} x$, soit $x'' + \omega^2 x = 0$, avec $\omega = \sqrt{\frac{10}{6,4 \times 10^6}} = 1,25 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Donc $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$; $x(0) = R$ et $x'(0) = 0$ donnent $x(t) = R \cos(\omega t)$.
2. L'objet atteint $x = -R$ pour la première fois quand $\omega t = \pi$: $t = \frac{\pi}{\omega} = 800\pi \text{ s} \approx 41,9 \text{ min}$.
 $x' = -R\omega \sin(\omega t)$: vitesse maximale $R\omega = 8000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte quand $\sin(\omega t) = \pm 1$, c'est-à-dire en $x = 0$: **au centre** de la Terre.
3. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de (AB) dirigé de H vers A : $\vec{OM} = \vec{OH} + s \vec{u}$ avec $\vec{OH} \perp \vec{u}$. En projetant la loi de Newton sur $\vec{u}$ (la réaction est orthogonale à $\vec{u}$) : $m s'' = \vec{F} \cdot \vec{u} = -\frac{mg}{R} (\vec{OH} \cdot \vec{u} + s) = -\frac{mg}{R} s$. Avec $s(0) = \ell$, $s'(0) = 0$: $s = \ell \cos(\omega t)$, qui atteint B ($s = -\ell$) en $\frac{\pi}{\omega} \approx 41,9 \text{ min}$, **quelle que soit la corde**. Vitesse maximale : $\ell\omega = 5 \times 10^5 \times 1,25 \times 10^{-3} = 625 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (au milieu H).
4. $\frac{v^2}{R} = g$: $v = \sqrt{gR} = 8000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; vitesse angulaire $\frac{v}{R} = \sqrt{\frac{g}{R}} = \omega$, période $\frac{2\pi}{\omega} = 1600\pi \text{ s} \approx 83,8 \text{ min}$. En prenant $t = 0$ quand le satellite passe en $(R, 0)$, ses coordonnées sont $(R \cos \omega t, R \sin \omega t)$: sa projection sur le diamètre a pour abscisse $R \cos(\omega t) = x(t)$. L'objet du tunnel et l'« ombre » du satellite arrivent ensemble aux antipodes.

■ Corrigé de l'exercice 59

1. x' est solution de $u' = -0,5u$ avec $u(0) = 20$: $x' = 20e^{-t/2}$, et $x(t) = \int_0^t 20e^{-s/2} ds = 40(1 - e^{-t/2})$.
 y' est solution de $v' = -0,5v - 10$ (solution constante -20) avec $v(0) = 20$: $y' = -20 + 40e^{-t/2}$, et $y(t) = 80(1 - e^{-t/2}) - 20t$. En $+\infty$: $x \rightarrow 40$, $x' \rightarrow 0$, $y' \rightarrow -20$: le projectile tombe de plus en plus **verticalement**, vers la droite $x = 40$, avec une **vitesse limite** de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. $y' = 0 \iff e^{-t/2} = \frac{1}{2} \iff t_s = 2 \ln 2 \approx 1,39 \text{ s}$: $S(20; 40 - 40 \ln 2) \approx (20; 12,27)$. Sans frottement, $x = 20t$ et $y = 20t - 5t^2$, d'où $y = x - \frac{x^2}{80}$, de sommet $(40; 20)$: le frottement abaisse et rapproche le sommet.
3. Pour $0 \leq x < 40$: $e^{-t/2} = 1 - \frac{x}{40}$, $t = -2 \ln(1 - \frac{x}{40})$, d'où $y = 80 \cdot \frac{x}{40} + 40 \ln(1 - \frac{x}{40})$ ✓. Avec $u = \frac{x}{40}$: $(x - \frac{x^2}{80}) - y = -40u - 20u^2 - 40 \ln(1 - u) = -40\varphi(u)$. Or $\varphi'(u) = 1 + u - \frac{1}{1-u} = -\frac{u^2}{1-u} \leq 0$ et $\varphi(0) = 0$: $\varphi \leq 0$, donc Γ est **au-dessous** de P .
4. $h(x) = 2x + 40 \ln(1 - \frac{x}{40})$: $h'(x) = 2 - \frac{40}{40-x} = \frac{40-2x}{40-x}$; h croît sur $[0, 20]$ à partir de $h(0) = 0$ (donc $h > 0$ sur $]0, 20]$), puis décroît strictement sur $[20, 40[$ de $h(20) = 40 - 40 \ln 2 > 0$ à $-\infty$: un unique zéro x_p . $h(31,6) \approx 63,2 - 62,42 > 0$ et $h(32) \approx 64 - 64,38 < 0$: $31,6 < x_p < 32$ (sans frottement : 80 m).



■ Corrigé de l'exercice 60

1. a) $r^2 = 5$: $x = Ae^{\sqrt{5}t} + Be^{-\sqrt{5}t}$; $A+B = 0,5$ et $\sqrt{5}(A-B) = 0$ donnent $A = B = 0,25$: $x(t) = 0,5 \operatorname{ch}(\sqrt{5}t)$.
 b) $x = 2 \iff \operatorname{ch}(\sqrt{5}t) = 4 \iff X + \frac{1}{X} = 8$ avec $X = e^{\sqrt{5}t} \geq 1$, soit $X^2 - 8X + 1 = 0$: $X = 4 + \sqrt{15}$ (l'autre racine $4 - \sqrt{15}$ est < 1). $t_1 = \frac{\ln(4 + \sqrt{15})}{\sqrt{5}} \approx 0,92 \text{ s}$.
 c) $(x'^2 - 5x^2)' = 2x'(x'' - 5x) = 0$: $x'^2 - 5x^2 = 0 - 5 \times 0,25 = -1,25$. En t_1 : $x'^2 = 20 - 1,25 = 18,75$, vitesse $\frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. a) $x'' = 5(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}) = 6,25x - 2,5$; solution constante $x = 0,4$: la chaîne immobile, le poids de la partie pendante étant exactement compensé par le frottement.
 b) $z'' = 6,25z$, $z(0) = 0,1$, $z'(0) = 0$: comme en 1, $z = 0,1 \operatorname{ch}(2,5t)$ et $x(t) = 0,4 + 0,1 \operatorname{ch}(2,5t)$.
 $x = 2 \iff \operatorname{ch}(2,5t) = 16 \iff e^{2,5t} = 16 + \sqrt{255}$: $t_2 = 0,4 \ln(16 + \sqrt{255}) \approx 1,39 \text{ s}$. Puis $z'^2 - 6,25z^2 = -0,0625$ et $z = 1,6$ en t_2 : $z'^2 = 15,9375$, vitesse $2,5\sqrt{2,55} \approx 3,99 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Si $x(0) = 0,4$, l'unicité donne $x = 0,4$: la chaîne reste immobile (équilibre instable : le moindre excès $z(0) > 0$ croît comme ch). Si $x(0) < 0,4$, le frottement retient la chaîne, qui ne bouge pas.

34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

- $u = \alpha e^x + \beta e^{-x}$; $u(0) = 0$ impose $\beta = -\alpha$, donc $u = 2\alpha \operatorname{sh} x$, et $u(1) = 1$: $u(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}$.
- a) Comme $h(0) = h(1) = 0$ et $u'' = u$, par parties : $\int_0^1 u' h' = [u' h]_0^1 - \int_0^1 u'' h = - \int_0^1 u h$.
b) $J(u+h) = J(u) + 2 \int_0^1 (u' h' + u h) + J(h) = J(u) + J(h) \geq J(u)$. Si $J(h) = 0$: H est croissante ($H' = h^2 \geq 0$), $H(0) = 0$ et $H(1) \leq J(h) = 0$, donc $H = 0$ sur $[0, 1]$ et $h^2 = H' = 0$: $y = u$. Réciproque claire.
c) Par parties, $\int_0^1 u'^2 = [u u']_0^1 - \int_0^1 u u'' = u(1)u'(1) - \int_0^1 u^2$, d'où $J(u) = u(1)u'(1) = \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1} = \coth 1 \approx 1,313$. Comparaison : $J(x) = \int_0^1 (1 + x^2) dx = \frac{4}{3} \approx 1,333$ et $J(x^2) = \int_0^1 (4x^2 + x^4) dx = \frac{23}{15} \approx 1,533$: tous deux $> \coth 1$ ✓.
- Soit $c = y(1)$. Si $c \neq 0$, $\frac{y}{c} \in A$ et $J(y) = c^2 J\left(\frac{y}{c}\right) \geq c^2 \coth 1$; si $c = 0$, $J(y) \geq 0$. Dans les deux cas $J(y) \geq \coth(1) y(1)^2$, avec égalité si et seulement si $y = c u$ (pour $c = 0$: $J(y) = 0$ impose $y = 0$ comme en 2b).
- Avec $c = y(1)$: $K(y) \geq c^2 \coth 1 - 2c = \coth 1 (c - \operatorname{th} 1)^2 - \operatorname{th} 1 \geq -\operatorname{th} 1$. Égalité $\iff c = \operatorname{th} 1$ et $y = c u$, c'est-à-dire $y = \operatorname{th} 1 \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} 1} = v$. Et $v'' = v$, $v(0) = 0$, $v'(1) = \frac{\operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch} 1} = 1$: la condition $y(1) = 1$ est remplacée par la condition « naturelle » $y'(1) = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 62

- $r = \frac{1}{u(\theta)}$, donc $r' = -\frac{u'(\theta)\theta'}{u(\theta)^2}$, et $\theta' = \frac{c}{r^2} = C u(\theta)^2$: $r' = -C u'(\theta)$. Puis $r'' = -C u''(\theta)\theta' = -C^2 u^2 u''(\theta)$. Comme $r\theta'^2 = \frac{1}{u} C^2 u^4 = C^2 u^3$, la relation donne $-C^2 u^2 (u'' + u) = -k u^2$, soit $u'' + u = \frac{k}{C^2} = k$.
- k est solution constante, donc $u = k + A \cos \theta + B \sin \theta = k + R \cos(\theta - \varphi)$ avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$: $e = \frac{R}{k} \geq 0$ convient.
a) $1 + e \cos \theta \geq 1 - e > 0$: ρ est définie (et 2π -périodique) sur $\mathbb{R}$. Minimum pour $\cos \theta = 1$, maximum pour $\cos \theta = -1$: $r_P = \frac{p}{1+e}$, $r_A = \frac{p}{1-e}$.
b) Il faut $u > 0$, donc $1 + e \cos \theta > 0$: en partant de $\theta(0) \in]-\theta_\infty, \theta_\infty[$ avec $\theta_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$, θ (croissante) ne peut dépasser θ_∞ ; elle a donc une limite $\ell \leq \theta_\infty$. Si $\ell < \theta_\infty$, $u(\theta) \geq m > 0$ et $\theta' = C u^2 \geq C m^2$, d'où $\theta \rightarrow +\infty$: absurde. Donc $\theta \rightarrow \theta_\infty$, $u \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$.
- a) $p(1 + e \cos \theta) = p$ s'écrit $p + ex = p$: $SM = p = p - ex$. En élevant au carré : $x^2 + y^2 = (p - ex)^2$, d'où l'équation.
b) Avec $y^2 = p^2 - 2pex - (1 - e^2)x^2$: $S'M^2 = (x + 2ae)^2 + y^2 = e^2 x^2 + 2e(2a - p)x + 4a^2 e^2 + p^2$. Or $p = a(1 - e^2)$ donne $4a^2 e^2 = 4a^2 - 4ap$, donc $4a^2 e^2 + p^2 = (2a - p)^2$ et $S'M^2 = (2a - p + ex)^2 = (2a - SM)^2$. Comme $SM \leq r_A = a(1 + e) < 2a$: $S'M = 2a - SM$.
- a) $\frac{1+e}{1-e} = 1,034$ donne $e = \frac{0,034}{2,034} \approx 0,0167$: orbite presque circulaire. b) $p = r_p(1 + e) \approx 1,153$, $r_A = \frac{p}{1-e} \approx 34,9$ UA (au-delà de Neptune), $a = \frac{r_p + r_A}{2} \approx 17,76$ UA et $T = a^{3/2} \approx 75$ ans.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. $\lambda = 0$: $y = Ax$ (car $y(0) = 0$) et $y'(1) + y(1) = 2A = 0$, donc $y = 0$. $\lambda = -\mu^2$ ($\mu > 0$) : $y = \alpha e^{\mu x} + \beta e^{-\mu x}$ et $y(0) = 0$ donnent $y = 2\alpha \operatorname{sh}(\mu x)$; $y'(1) + y(1) = 2\alpha(\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu)$ avec $\mu \operatorname{ch} \mu + \operatorname{sh} \mu > 0$: $\alpha = 0$. Aucun $\lambda \leq 0$ ne convient.
2. $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ et $y(0) = 0$: $y = B \sin \omega x$, puis $y'(1) + y(1) = B(\omega \cos \omega + \sin \omega)$. Il existe $B \neq 0$ convenable (et alors $y = B \sin \omega x$) $\iff \omega \cos \omega + \sin \omega = 0$. Si $\cos \omega = 0$, $\sin \omega = \pm 1 \neq 0$: impossible ; donc la condition équivaut à $\tan \omega = -\omega$.
3. a) Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan \omega > 0 > -\omega$. Sur I_k , $\phi(\omega) = \tan \omega + \omega$ est continue, strictement croissante ($\phi' = 2 + \tan^2 \omega$), de $-\infty$ à $+\infty$: un unique zéro ω_k ; $\phi(k\pi) = k\pi > 0$ donne $\omega_k < k\pi$. Sur I_1 : $\phi(2) \approx -0,185 < 0 < 0,125 \approx \phi(2,05)$, d'où $2 < \omega_1 < 2,05$ ($\omega_1 \approx 2,029$, $\omega_2 \approx 4,913$, $\omega_3 \approx 7,979$).
b) Soit $\delta_k = \omega_k - (k - \frac{1}{2})\pi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Par π -périodicité, $\tan \omega_k = \tan(\delta_k - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \delta_k}$; la condition donne $\tan \delta_k = \frac{1}{\omega_k}$, d'où $\delta_k = \arctan \frac{1}{\omega_k} \rightarrow 0$ (car $\omega_k \rightarrow +\infty$). Puis $k\delta_k = \frac{k}{\omega_k} \cdot \frac{\arctan(1/\omega_k)}{1/\omega_k} \rightarrow \frac{1}{\pi}$, car $\frac{k}{\omega_k} \rightarrow \frac{1}{\pi}$ (encadrement) et $\frac{\arctan t}{t} \rightarrow \arctan'(0) = 1$.
4. a) D'une part, $y_j'' = -\omega_j^2 y_j$ donne $\int_0^1 (y_j'' y_k - y_j y_k'') = (\omega_k^2 - \omega_j^2) \int_0^1 y_j y_k$. D'autre part, c'est $[y_j' y_k - y_j y_k']_0^1 = y_j'(1)y_k(1) - y_j(1)y_k'(1) = -y_j(1)y_k(1) + y_j(1)y_k(1) = 0$ (car $y'(1) = -y(1)$ et $y(0) = 0$). Comme $\omega_j \neq \omega_k$: $\int_0^1 y_j y_k = 0$.
b) $\int_0^1 \sin^2(\omega x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4\omega}$; or $\sin 2\omega = 2 \sin \omega \cos \omega = -2\omega \cos^2 \omega$ et $\cos^2 \omega = \frac{1}{1+\tan^2 \omega} = \frac{1}{1+\omega^2}$:
$$\int_0^1 y_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1+\omega_k^2} \right) = \frac{2 + \omega_k^2}{2(1 + \omega_k^2)}.$$

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $\varepsilon r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4\varepsilon > 0$; avec $\sigma = \sqrt{1 - 4\varepsilon} \in]0, 1[$: $r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sigma}{2\varepsilon}$, de somme $-\frac{1}{\varepsilon} < 0$ et de produit $\frac{1}{\varepsilon} > 0$: $r_1 < r_2 < 0$. Puis $r_2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2\varepsilon(1 + \sigma)} = \frac{-2}{1 + \sigma}$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\sigma \rightarrow 1$, $r_2 \rightarrow -1$, $\varepsilon r_1 = -\frac{1 + \sigma}{2} \rightarrow -1$ et $r_1 \rightarrow -\infty$. Enfin $\sigma < 1$ donne $r_2 < -1$.
2. $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ avec $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha r_1 + \beta r_2 = 0$: $\alpha = \frac{-r_2}{r_1 - r_2}$, $\beta = \frac{r_1}{r_1 - r_2}$ ✓.
3. a) $y_\varepsilon(x) - e^{r_2 x} = \frac{r_2}{r_1 - r_2} (e^{r_2 x} - e^{r_1 x})$, avec $\frac{r_2}{r_1 - r_2} > 0$ et $0 \leq e^{r_2 x} - e^{r_1 x} \leq 1$ pour $x \geq 0$ ✓.
b) $e^{-x} - e^{r_2 x} = e^{-x} (1 - e^{-s})$ avec $s = (-1 - r_2)x \geq 0$: c'est entre 0 et $e^{-x}(-1 - r_2)x \leq \frac{-1 - r_2}{e}$.
c) $|y_\varepsilon(x) - e^{-x}| \leq \frac{r_2}{r_1 - r_2} + \frac{-1 - r_2}{e}$ pour tout $x \geq 0$, et ce majorant tend vers 0 ($r_2 \rightarrow -1$, $r_1 \rightarrow -\infty$) : **convergence uniforme** vers e^{-x} . La condition $y'(0) = 0$ est perdue : $(e^{-x})'(0) = -1$.
4. a) $y_\varepsilon'(x) = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} (e^{r_2 x} - e^{r_1 x})$, et $\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_2}{1 - r_2/r_1} \rightarrow -1$. Pour $x > 0$: $e^{r_1 x} \rightarrow 0$ et $e^{r_2 x} \rightarrow e^{-x}$, d'où $y_\varepsilon'(x) \rightarrow -e^{-x}$.
b) $e^{r_2 \varepsilon} \rightarrow 1$ et $e^{r_1 \varepsilon} = e^{\varepsilon r_1} \rightarrow e^{-1}$: $y_\varepsilon'(\varepsilon) \rightarrow -\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx -0,63$. Entre 0 et ε , y_ε' passe de 0 à environ -0,63, puis rejoint $-e^{-x}$: la fonction converge uniformément, mais pas sa dérivée près de 0 (**couche limite**).

■ Corrigé de l'exercice 65

- $x = y = 0 : f(0) = 2f(0)f'(0)$, soit $f(0)(1 - 2f'(0)) = 0$.
- Alors $f'(0) = \frac{1}{2}$, et $y = 0$ donne $f(x) = \frac{1}{2}f(x) + f(0)f'(x) : f' = \frac{f}{2f(0)}$. Avec $c = f(0) : \boxed{f(x) = c e^{\frac{x}{2c}}}$ ($c \neq 0$). Vérification : $f(x)f'(y) + f'(x)f(y) = 2 \cdot c e^{\frac{x}{2c}} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{y}{2c}} = c e^{\frac{x+y}{2c}} \checkmark$.
- a) $y = 0 : f(x) = f(x)f'(0)$ pour tout x , et f non nulle : $f'(0) = 1$.
b) $f'(x) = \frac{f(x+y_0)-f'(y_0)f(x)}{f(y_0)}$: le second membre est dérivable en x , donc f' l'est.
c) En dérivant (S) par rapport à $x : f'(x+y) = f'(x)f'(y) + f''(x)f(y)$; par rapport à $y : f'(x+y) = f(x)f''(y) + f'(x)f'(y)$. D'où $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, et avec $y = y_0 : f'' = kf$, $k = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$.
d) Avec $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$: si $k = 0$, $\boxed{f(x) = x}$; si $k = \omega^2 > 0$, $\boxed{f(x) = \frac{\text{sh}(\omega x)}{\omega}}$; si $k = -\omega^2 < 0$, $\boxed{f(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\omega}}$. Vérification : $x \cdot 1 + 1 \cdot y = x + y$; $\sin(\omega x) \cos(\omega y) + \cos(\omega x) \sin(\omega y) = \sin(\omega(x+y))$; de même $\text{sh } a \text{ ch } b + \text{ch } a \text{ sh } b = \text{sh}(a+b)$ (développer les exponentielles).
- Solutions de (S) : $0, x \mapsto c e^{\frac{x}{2c}}, x \mapsto x, x \mapsto \frac{\text{sh}(\omega x)}{\omega}, x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{\omega}$ ($c \neq 0, \omega > 0$). Bornées : 0 et $x \mapsto \frac{\sin(\omega x)}{\omega}$; s'annulant de plus en $\pi : 0$ et $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

■ Corrigé de l'exercice 66

- $z' = (1 - \alpha)k^{-\alpha}k' = (1 - \alpha)(s - \delta k^{1-\alpha}) = (1 - \alpha)(s - \delta z)$. Donc, avec $z_0 = k_0^{1-\alpha}$ et $\gamma = (1 - \alpha)\delta$: $z(t) = \frac{s}{\delta} + (z_0 - \frac{s}{\delta})e^{-\gamma t}$ et $\boxed{k(t) = \left(\frac{s}{\delta} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta}\right)e^{-\gamma t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$. Réciproquement, $z(t) = (1 - e^{-\gamma t})\frac{s}{\delta} + e^{-\gamma t}z_0$ est compris entre $z_0 > 0$ et $\frac{s}{\delta} > 0$, donc $k = z^{\frac{1}{1-\alpha}} > 0$ est dérivable et $k' = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z' = k^\alpha(s - \delta k^{1-\alpha}) = sk^\alpha - \delta k \checkmark$.
- $z - \frac{s}{\delta}$ garde le signe de $z_0 - \frac{s}{\delta}$ et $|z - \frac{s}{\delta}|$ décroît : z est monotone et tend vers $\frac{s}{\delta}$; $t \mapsto t^{\frac{1}{1-\alpha}}$ étant croissante et continue, k est monotone et $\boxed{k \rightarrow k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$. Enfin $sk^\alpha = \delta k \iff k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta}$ pour $k > 0$.
- $(k^*)^\alpha = \left(\frac{s}{\delta}\right)^\beta$ avec $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} : c(s) = \delta^{-\beta}(1-s)s^\beta$ et $c'(s) = \delta^{-\beta}s^{\beta-1}(\beta - (1+\beta)s)$, positive puis négative, nulle en $s = \frac{\beta}{1+\beta} = \alpha : \boxed{c \text{ est maximale pour } s = \alpha}$.
- $k^* = 4^{3/2} = \boxed{8}$, $\gamma = \frac{2}{3} \times 0,05 = \frac{1}{30}$, $z_0 = 1 : \boxed{k(t) = (4 - 3e^{-t/30})^{3/2}}$, croissante. $k(t) \geq 7,2 \iff 4 - 3e^{-t/30} \geq 7,2^{2/3} \iff t \geq 30 \ln \frac{3}{4-7,2^{2/3}} \approx \boxed{72 \text{ ans}}$.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Premier ordre $y' = ay + b$	31 à 36	/ 6	
Thème B · Se ramener à une équation connue	37 à 42	/ 6	
Thème C · Second ordre homogène	43 à 48	/ 6	
Thème D · Équations fonctionnelles	49 à 54	/ 6	
Thème E · Modélisation	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Structures algébriques

Maths Olympiad