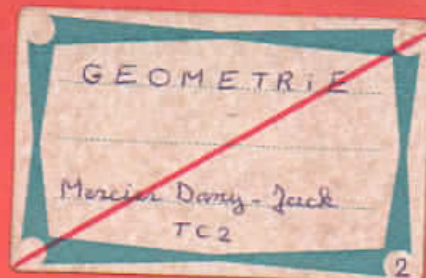




marque déposée



le Calligraphe

cahier _____

école _____

classe _____

nom _____



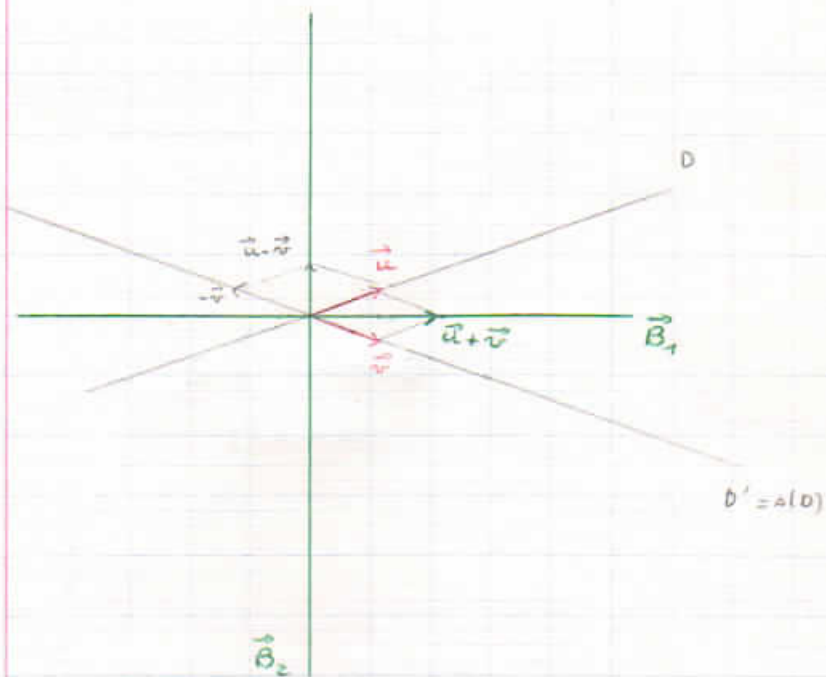
No 103

GEOMETRIE
(Suite)

COURS DE TERMINALE C
DE MME J. MANOTTE

recopié et présenté par D.-J. MERCIER

1974 - 75



$$\theta + \theta = \gamma + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{2\theta}_{\text{inc.}} = \underbrace{\gamma + k\pi}_{\text{donné}}$$

$$\theta = \frac{\gamma}{2} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\exists 2$ droites bissectrices (ou 4 demi-droites vectorielles)

Pratiquement, pour les trouver par le calcul, on utilise les symétries vectorielles.

Un vecteur directeur de $\vec{B}_1$ est $\vec{u} + \vec{v}$

Prendre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Un vecteur directeur de $\vec{B}_2$ est $\vec{u} - \vec{v}$

unitaires !

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, par exemple ;

$\vec{u} \in \vec{D}$, et $\vec{v} \in \vec{D}'$

17.4

Ensemble des points M de P tels que $(A, B) \in P^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α donné, (MA, MB) a pour mesure α .

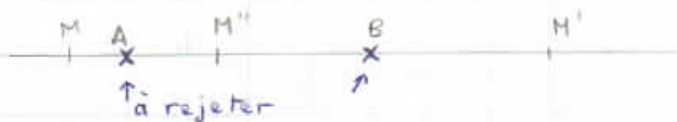
$$\alpha = \text{mes}(MA, MB)$$

17 Remarque : A et B ne peuvent être considérés comme points de l'ensemble.

ex : $M = A$ $\vdash$ droite (MA) non définie.

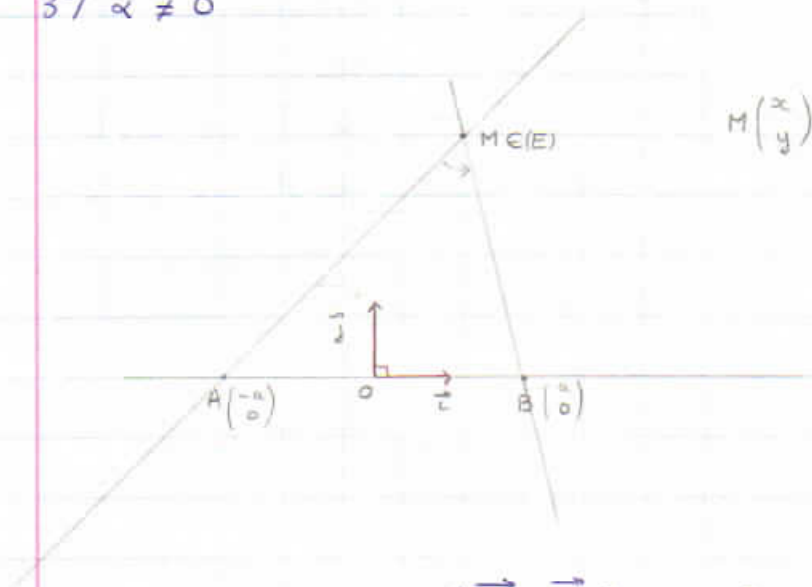
$$2^\circ \dot{\alpha} = 0$$

$$\alpha = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$E = (AB) - \{A, B\}$$

$$3^\circ \dot{\alpha} \neq 0$$



$$\text{mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \dot{\alpha} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \text{mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha + k2\pi \\ \text{mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\alpha + \pi) + k2\pi \end{cases} \quad (1)$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\vec{MA} \begin{pmatrix} -a-x \\ -y \end{pmatrix} \quad \vec{MB} \begin{pmatrix} a-x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{x^2 - a^2 + y^2}{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{MB}\|} \\ \sin(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{MB}\|} \end{cases}$$

$$\cos(\vec{MA}, \vec{MB}) - \alpha = 0 + k2\pi \text{ ou } \pi + k2\pi \quad (\text{voir (1)})$$

Ceci est équivalent à

$$\sin[\cos(\vec{MA}, \vec{MB}) - \alpha] = 0$$

Rappel

$$\cos(\vec{MA}, \vec{MB}) = \cos \cos(\vec{MA}, \vec{MB})$$

$$\sin \cos(\vec{MA}, \vec{MB}) \cdot \cos \alpha - \cos \cos(\vec{MA}, \vec{MB}) \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\frac{2ay}{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{MB}\|} \cos \alpha - \frac{x^2 - a^2 + y^2}{\|\vec{MA}\| \cdot \|\vec{MB}\|} \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha \neq 0,$$

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2ay \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

$$x^2 + \left(y - a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = a^2 + \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$x^2 + \left(y - a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}$$

$M \in \mathcal{C}$, cercle de centre $w(0, a \cotg \alpha)$ et
de rayon $R = \frac{a}{|\sin \alpha|}$

$A \in \mathcal{C}$? $A(-a, 0)$

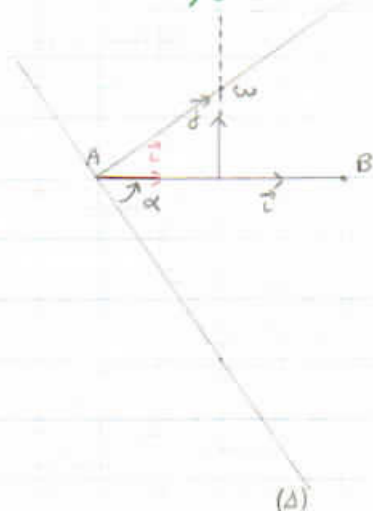
$$a^2 + \left(-a \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = 0 ?$$

$$a^2 + a^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha}\right) = 0 \quad \text{oui}$$

idem, $B \in \mathcal{C}$.

Tous les points du cercle sauf A et B conviennent
 $E = \mathcal{C} - \{A, B\}$

Construction pratique du centre du cercle à partir
des seules données A, B et α



Soit (Δ, AB) qui a pour mesure α

$\exists r / r(\vec{u}) = \vec{v}$; angle de r mesure par α .

$\exists r^{-1} / r^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}$; mesure angle $(\vec{v}, \vec{u}) = -\alpha$

$$M_{(r^{-1}, \vec{v}, \vec{u})} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}}$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

Comparons les directions des droites (ωA) et (Δ) :

$$\overrightarrow{\omega A} \begin{pmatrix} -a \\ -a \cot \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\omega A} \cdot \vec{u} = -a \cos \alpha + a \cos \alpha = 0$$

$$\underline{(\Delta) \perp (\omega A)}$$

Donc (Δ) tangente au cercle $\mathcal{C}$.

On utilise cette propriété pour la construction pratique de ω :

AB , puis (Δ) , puis $(A\omega)$, puis médiatrice de AB ,
intersection.

Ensemble E , des M de P tels que $\text{mes}(\vec{MA}, \vec{MB}) = \alpha + k2\pi$

* $E \subset E$, c'est sûr.

si $\alpha \neq 0 [2\pi]$

et $\alpha \neq \pi [2\pi]$

$$\cos \sin(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{2a \downarrow}{|| \quad ||}$$

* E est l'un des deux arcs $\widehat{AB}$; les points de l'un des arcs ont des y positifs, sur l'autre, $y < 0$, donc $\sin(\vec{MA}, \vec{MB})$ a, ou non, le signe de $\sin \alpha$, donné. On choisit celui des 2 arcs qui donne l'égalité des signes, donc l'égalité des sinus.

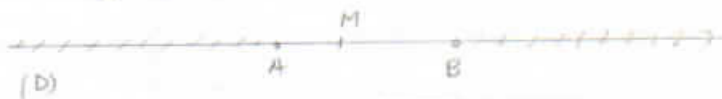
$$E = \text{un des arcs } \widehat{AB} - \{AB\}$$

* si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$



$$E = (D) - [AB]$$

* si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$



$$E = \text{the } \widehat{AB} =]AB[$$

24.4

13

Isométries

Définition γ isométrie de E si elle "conserve la distance".

$$\gamma: E \longrightarrow E$$

$$A \longmapsto A' = \gamma(A)$$

$$B \longmapsto B' = \gamma(B)$$

$$d(A', B') = d(A, B) \text{ ou } AB = A'B'$$

$$\text{et ceci } \forall (A, B) \in E^2$$

Propriétés

④ Conservation du produit scalaire.

$$(A, B) \in \overrightarrow{AB}$$

$$(A, C) \in \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = p$$

$$C' = \gamma(C)$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = p'$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 \right] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2} \left[\|\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'B'}\|^2 - \|\overrightarrow{A'C'}\|^2 \right]$$

Il sera préférable de choisir les vecteurs initiaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de façon que leur somme soit visible.

$$\left. \begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} [\|\vec{BC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2] \\ \vec{B'A'} \cdot \vec{A'C'} &= \frac{1}{2} [\|\vec{B'C'}\|^2 - \|\vec{A'B'}\|^2 - \|\vec{A'C'}\|^2] \end{aligned} \right\} \vdash \vec{BA} \cdot \vec{AC} = \vec{B'A'} \cdot \vec{A'C'}$$

$$\text{car } BC = B'C' \vdash \|\vec{BC}\| = \|\vec{B'C'}\|$$

② Toute isométrie est une bijection affine.

* $(O, I, J, K) \in E^4 \vdash (O', I', J', K')$ avec

$O' = f(O), I' = f(I), \dots, K' = f(K)$, et f isométrie,

Si le quadruplet initial est un repère orthonormé de E , le second l'est aussi (cf P1)

* On se donne (O, I, J, K) repère orthonormé.

$$\vec{OI} = \vec{i}, \vec{OJ} = \vec{j}, \vec{OK} = \vec{k},$$

$$\forall M \in E, \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\text{Soit } \vec{i}' = \vec{O'I'}, \vec{j}' = \vec{O'J'}, \vec{k}' = \vec{O'K'}$$

$$M' = f(M)$$

$$\vec{OM}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\begin{cases} \vec{OM} \cdot \vec{i} = x \\ \vec{OM}' \cdot \vec{i}' = x' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{OM} \cdot \vec{OI} = x \\ \vec{OM}' \cdot \vec{O'I'} = x' \end{cases} \vdash x = x'$$

$$\text{idem } y' = y$$

$$z' = z$$

$$\forall M'(x, y, z) \text{ dans } (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') = \mathbb{R}^3, \exists! M(x, y, z) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathbb{R}^3.$$

g, g' isométrie donnée, est donc une bijection.

→ Introduisons l'endomorphisme φ de $\vec{E}$ ainsi défini :

$$\varphi \left[\begin{array}{l} \vec{i}' = \varphi(\vec{i}) \\ \vec{j}' = \varphi(\vec{j}) \\ \vec{k}' = \varphi(\vec{k}) \end{array} \right.$$

Voyons si g est affine et associée à φ :

$$M' = g(M) ; N' = g(N)$$

$$\vec{OM} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

$$\vec{ON} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

Est ce que :

$$\varphi(\vec{MN}) = \vec{M'N'} ?$$

$$\varphi[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}] = (x_2 - x_1)\vec{i}' + (y_2 - y_1)\vec{j}' + (z_2 - z_1)\vec{k}'.$$

oui

Enfin, φ est un endomorphisme orthogonal puisque qu'une base orthonormée est transformée en une base orthonormée.

Réciproque immédiate

Z

g isométrie $\mapsto \varphi$ g est affine

φ , endomorphisme ass. est orthogonal

Groupe des isométries, sous-groupe des déplacements

$$f: E \rightarrow E$$

$$g: E \rightarrow E$$

On appelle déplacement une isométrie f associée à $\varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

g sera dite antidéplacement si et seulement si φ , associée à g , est tel que $\varphi \in \mathcal{O}_-(\vec{E})$.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \quad (\dim 1)$$

$$\varphi = \text{Id}_{\vec{E}_1} ; \quad \psi = -\text{Id}_{\vec{E}_1}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_2 \quad (\dim 2)$$

$$\varphi = \text{Id}_{\vec{E}_2} \text{ ou } \varphi = \text{une rotation vect.}$$

$\psi = \text{symétrie par rapport à une droite.}$

$$\vec{E} = \vec{E}_3 \quad (\dim 3)$$

$$\varphi = \text{une rotation ou } \text{Id}_{\vec{E}_3}$$

$\psi = \text{une réflexion vectorielle ou une transformation orthogonale sont le sous-espace des invariants à pour dim 0. (composées de 3 réflexions vectorielles)}$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de E .

$$\textcircled{1} (\mathcal{I}, \circ) = \text{groupe}$$

$$\ast \text{ Soit } (f, g) \in \mathcal{I}^2, \forall (A, B) \in E^2:$$

$$d(g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = d(g(A), g(B)) = d(A, B)$$

$$g \circ f \in \mathcal{I}.$$

$\circ$ interne dans $\mathcal{I}$.

* $\circ$ est associative

* $\text{Id}_E \in \mathcal{I}$ car $d(\text{Id}_E(A), \text{Id}_E(B)) = d(A, B)$.

* $\forall f \in \mathcal{I}, f$ bijective.

$\exists f^{-1}$.

$$\text{De plus: } d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = d(f \circ f^{-1}(A), f \circ f^{-1}(B))$$

$$= d(A, B)$$

donc $f^{-1} \in \mathcal{I}$

Donc

$$(\mathcal{I}, \circ) = \text{groupe}$$

③ Sous groupe des déplacements.

Les déplacements ont été définis ci-dessus.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des déplacements. Est-ce que $(\mathcal{D}, \circ)$ forme un sous groupe de $(\mathcal{I}, \circ)$?

Il suffit de démontrer que $\mathcal{D} \neq \emptyset$, que $\circ$ est interne dans $\mathcal{D}$, et que, si $f \in \mathcal{D}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{D}$.

* $\text{Id}_E \in \mathcal{D}$, puis l'endomorphisme associé à Id_E est Id_E

* $\circ$ interne.

$(f, g) \in \mathcal{D}$

$g \circ f$ a pour endomorphisme associé une rotation vectorielle

(voir composée de 2 rotations vectorielles).

Donc $g \circ f \in \mathcal{D}$.

* f associé à $\alpha \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

f^{-1} est associé à $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_+(\vec{E})$

Donc

$$(\mathcal{D}, \circ) = \text{groupe}$$

7.5

Isométries du plan P

$$f \in \mathcal{I}(P) \mapsto \begin{cases} f \text{ affine} \\ f_{\text{ass}} \text{ est h. orth de } \vec{P}. \end{cases}$$

φ = rotation ou symétrie par rapport à $\vec{P}$

$$\varphi \in \mathcal{O}(\vec{P}) \quad \begin{cases} \varphi = \rho \mapsto \varphi \in \mathcal{O}_+(\vec{P}) \\ \varphi = \sigma_{\vec{P}} \mapsto \varphi \in \mathcal{O}_-(\vec{P}) \end{cases}$$

f est un déplacement de P ou un antidéplacement de P .

Déplacements de (P) = translations et rotations ponctuelles.

$$\varphi = \text{Id}_P \text{ ou } \varphi \neq \text{Id}_P$$

$$f = t_{\vec{u}}$$

$$f = \text{déplacement} \neq t_{\vec{u}}$$

* Recherche des points invariants par un déplacement f avec $\varphi \neq \text{Id}_P$:

Soit $f(A, A', \varphi)$

M invariant $\mapsto f(M) = M$

$$\begin{aligned}\varphi(\overrightarrow{AM}) &= \overrightarrow{A'M} \\ &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) - \text{Id}_P(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'A}$$

$$(\varphi - \text{Id}_P)(\overrightarrow{AM}) = \underbrace{\overrightarrow{A'A}}_{\text{donné}}$$

$$\varphi: \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{et } a^2 + b^2 = 1, \quad a \neq 1$$

$$\text{Id}_P: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi - \text{Id}_P: \begin{bmatrix} a-1 & -b \\ b & a-1 \end{bmatrix}$$

$$D = (a-1)^2 + b^2 = 2(1-a) \neq 0$$

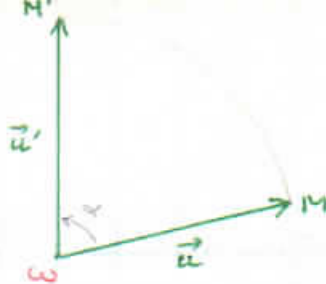
$\varphi - \text{Id}$ est bijective. $\exists! \overrightarrow{AM} \mapsto \exists! M$

$\exists! M$ invariant par f

Définition

"On appelle rotation de P une isométrie positive associée à un endomorphisme orthogonal différent de l'identité Id_P . $\exists! \omega$ invariant et $r_{(\omega, \alpha)}$ = rotation de centre ω et d'angle α ."

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{mes } \alpha \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. On peut écrire $r_{(\omega, \alpha)}$.



$$\begin{cases} \vec{u}' = e(\vec{u}) \\ M' = z(M) \end{cases} \quad e: \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{z(\vec{v})}$

Antidépassement du plan :

1° On connaît les sym. affines (isolutives) orthogonales par rapport à des droites

2° Soit $s_0 = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \vec{D}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

$f = s_0 \circ t_{\vec{u}}$ est un antidépassement (voir $s_0 \circ \text{Id}_{\vec{D}}$)

* Points invariants par f . Soit M invariant.

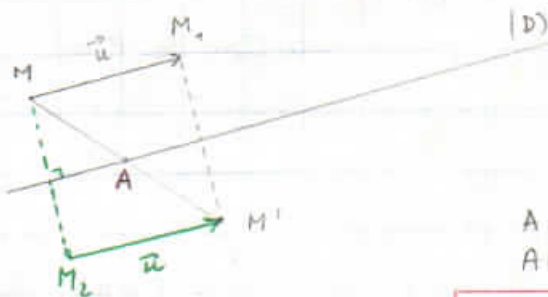
$$M \mapsto t_{\vec{u}}(M) = M_1$$

$$M_1 \mapsto s_0(M_1) = M$$

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$$

$$\overrightarrow{M_1M} \text{ orth } \vec{u}$$

} incompatible
 $\nexists M$ invariant.



A milieu de (M, M')

$A \in (D)$

$$s_0 \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_0$$

9.5

3/ Soit g un antidéplacement de P , sans point invariant.

$$g \neq s_o.$$

$$\text{Est-ce que } \underbrace{g}_{\text{donné}} = \underbrace{s_o}_{?} \circ \underbrace{t_{\vec{u}}}_{?} ? \text{ avec } \vec{u} \in \vec{D}$$

$$* \varphi(\text{associée à } g) = \sigma_{\vec{B}} \circ \text{Id}_P = \sigma_{\vec{B}} \quad \vec{B} \text{ connu car } \vec{B} \text{ est invariant}$$

Soit (A, A') un couple tel que $A \in (P)$ et $A' = g(A)$ Soit I le milieu de ce couple.

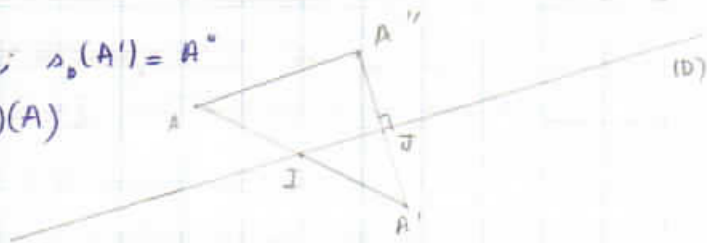
$$\text{Soit } (D) = (I, \vec{B}).$$

$$\exists! s_o = \text{symétrie orth. affine par rapport à } (D).$$

$$\text{Soit } s_o \circ g$$

$$A; g(A) = A'; s_o(A') = A''$$

$$A'' = (s_o \circ g)(A)$$



$$s_o \circ g \text{ est une translation (voir } \sigma_{\vec{B}} \circ \sigma_{\vec{B}})$$

$$\text{De plus } \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$$

$$= 2\overrightarrow{IA'} + 2\overrightarrow{A'J}$$

$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{AA''} \in \vec{D}$$

$$t_{\vec{u}} = s_o \circ g$$

$$g = s_o \circ t_{\vec{u}}$$

$$\exists (D, \vec{u})$$

* Ce couple $(D, \vec{u})$ est-il le seul?

Si non, $f = s_D \circ t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ t_{\vec{u}'}$, $\begin{cases} D' \parallel D \\ \vec{u}' \in \vec{D} \end{cases}$

alors :

$$s_D \circ \underbrace{t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}'}}_{t_{\vec{u}-\vec{u}'}} = s_{D'}$$

$$s_{D'} = s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u}'}$$

Si $\vec{u}-\vec{u}' \neq \vec{0}$, alors $s_D \circ t_{\vec{u}-\vec{u}'}$ n'a pas de point invariant tandis que $s_{D'}$ en a. L'égalité est absurde. Donc $\vec{u} = \vec{u}'$ et

$$\text{donc } s_D = s_{D'} \text{ et } D = D'.$$

Donc

$$\exists! (D, \vec{u}) \text{ avec } \vec{u} \in \vec{D} /$$

$$f = s_D \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_D$$

Cette décomposition s'appelle forme réduite de l'antidépacement f .

Composition de déplacements et antidépacements

$$1^\circ s_{D'} \circ s_D ?$$

* Si $D' = D$, $s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_D = Id_{\mathbb{P}}$

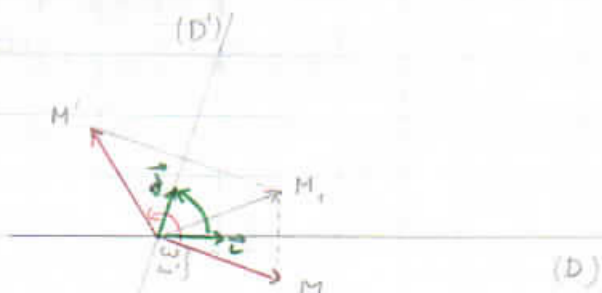
* $D' \parallel D \mapsto \vec{D}' = \vec{D}$



$$\begin{aligned}
 \vec{MM}' &= \vec{MM}_1 + \vec{M}_1M' \\
 &= 2(\vec{HM}_1 + \vec{M}_1H') \\
 &= 2\vec{HH'} = \text{vecteur fixe}
 \end{aligned}$$

$$\underline{s_{D'} \circ s_D = t_{\vec{u}}, \quad \vec{u} = 2\vec{HH'}}$$

* $\exists \omega \in D' \cap D$



ω est l'unique point invariant par le déplacement $s_{D'} \circ s_D$. $s_{D'} \circ s_D = \text{rotation de } P \text{ de centre } \omega$.

$$\begin{aligned}
 \text{angl}(\vec{\omega H}, \vec{\omega M}') &= \text{angl}(\vec{\omega H}, \vec{\omega H_1}) + \text{angl}(\vec{\omega H_1}, \vec{\omega M}') \\
 &= (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

avec $\alpha = \text{angl}(\vec{r}, \vec{\omega H_1})$

$\beta = \text{angl}(\vec{\omega H_1}, \vec{j})$

$\text{angl}(\vec{r}, \vec{j}) \equiv \alpha [2\pi]$.

Alors $\text{mes}(\vec{\omega H}, \vec{\omega M}') = \boxed{2\alpha} + k2\pi$

2° Réciproques

* On donne $t_{\vec{u}}$. $\exists D$ et $D' \in P$ / $t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D$

Il suffit que $D \parallel D'$; $\vec{D} = \vec{D}' \perp \vec{u}$

$$H \in (D), H' \in (D'), \overrightarrow{HH'} = \frac{\vec{u}}{2}$$

↑ ordre! ↑

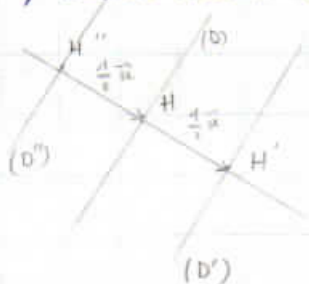
Il suffit de se donner arbitrairement l'une des 2 droites :

$$t_{\vec{u}} = s_{D'} \circ s_D, (D) \text{ donnée } \nexists! (D')$$

$$t_{\vec{u}} = s_D \circ s_{D'}, (D) \text{ donnée } \nexists! (D'')$$

$$\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2} \vec{u}$$

$$\overrightarrow{H''H} = \frac{1}{2} \vec{u}$$



* On se donne $n_{(\omega, x)}$, $\omega \in (P)$, $x \in \mathbb{R}$

$$n_{(\omega, x)} = s_{D'} \circ s_D \text{ ?}$$

En si $\omega \in (D) \cap (D')$

et si $\text{angl}(D, D') + \text{angl}(D, D') \in \mathcal{A}$ est un angle qui peut être inclus dans $\mathcal{A}$ si l'on se souvient que

$$\mathcal{A} = \{\alpha, \alpha + p\}$$

et que $\alpha + \alpha = \alpha + p + \alpha + p = \beta \in \mathcal{A}$

$$\text{Mesures: } \text{mes}(D, D') + \text{mes}(D, D') = \text{mes}(\alpha) = \alpha$$

$$\text{mes}(D, D') = \frac{\alpha}{2}, \text{ par exemple}$$

Les autres sont $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{mes}(D, D') \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Rappel : $\text{mes}(\vec{\omega M}, \vec{\omega M'}) \equiv \alpha [2\pi]$.

Remarque

$$\pi = s_{D'} \circ s_D = s_D \circ s_{D''}$$

$$3^\circ \quad \alpha'_{(\omega', \alpha')} \circ \alpha_{(\omega, \alpha)}$$

$$(\alpha, \alpha') \in \mathcal{A}$$

$$\text{mes } \alpha \equiv \alpha [2\pi]$$

$$\text{mes } \alpha' \equiv \alpha' [2\pi]$$

Soit $D = (\omega \omega')$ ou clas $D =$ droite passant par $\omega = \omega'$ si confon-
dus.

$$\text{Alors } \alpha_{(\omega, \alpha)} = s_D \circ s_{D'} \quad \text{avec } \text{mes}(D', D) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\alpha'_{(\omega', \alpha')} = s_{D''} \circ s_D \quad \text{avec } \text{mes}(D, D'') \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\omega \in D', \omega' \in D''$$

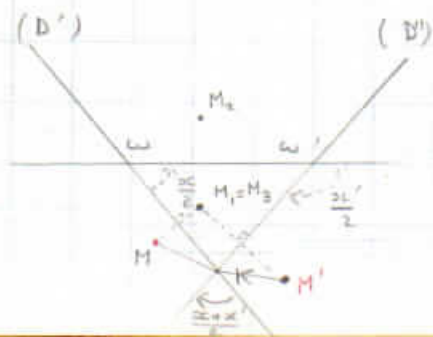
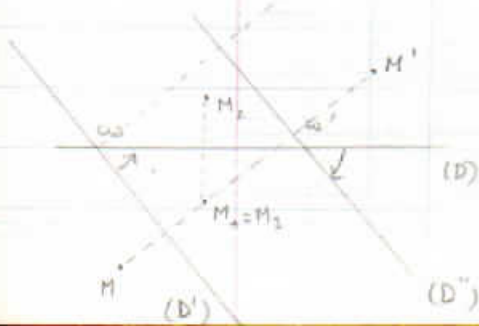
$$\text{Alors } \alpha' \circ \alpha = s_{D''} \circ s_D \circ s_D \circ s_{D'}$$

$$\underline{\alpha' \circ \alpha = s_{D''} \circ s_{D'}}$$

$$t_{\omega \omega'} = s_D \circ s_{D'}(\omega) = \omega'$$

$$\alpha + \alpha' \neq 0 [2\pi]$$

$$\alpha_{(\omega, \alpha + \alpha')} : M \mapsto M'$$



La composée de 2 rotations de centres distincts est une translation si $\alpha + \alpha' \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha'}{2} \equiv 0 \pmod{\pi} \text{ et } D' \parallel D''$$

(voir figure)

4° $r_{(\omega, \alpha)} \circ t_{\vec{u}} , \alpha \neq \omega$ (angle nul)

$$\begin{aligned} r_{(\omega, \alpha)} &= s_{D''} \circ s_{D'} \\ r_{(\omega, \alpha)} &= s_{D''} \circ s_{D'} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\downarrow \\ &\downarrow \end{aligned} \right\} \exists! D = (\omega, \vec{u}^\perp)$$

$$r \circ t = s_{D''} \circ s_{D'}$$

$$D' \cap D'' = \{\omega'\}$$

$$s_{D''} \circ s_{D'} = r_{(\omega', \alpha)}$$

un endomorphisme φ associé à $r_{(\omega, \alpha)} = t_{\vec{u}}$
 φ associé à r donné
 et à r' trouvé

même angle α

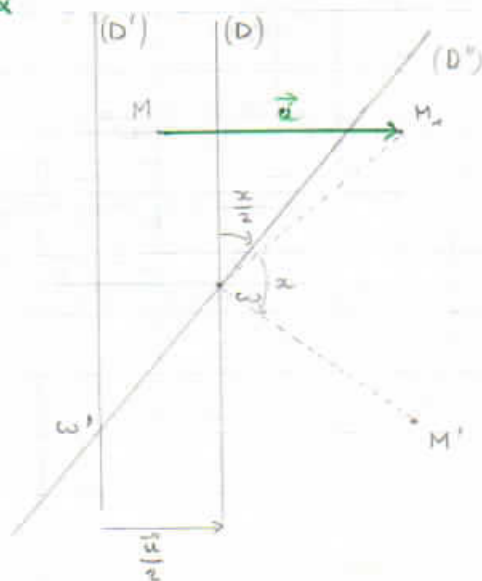


$$D = (\omega, \vec{u}^\perp)$$

$$\text{mes } \alpha \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

$$\text{mes } \angle(\omega'H, \omega'H') \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

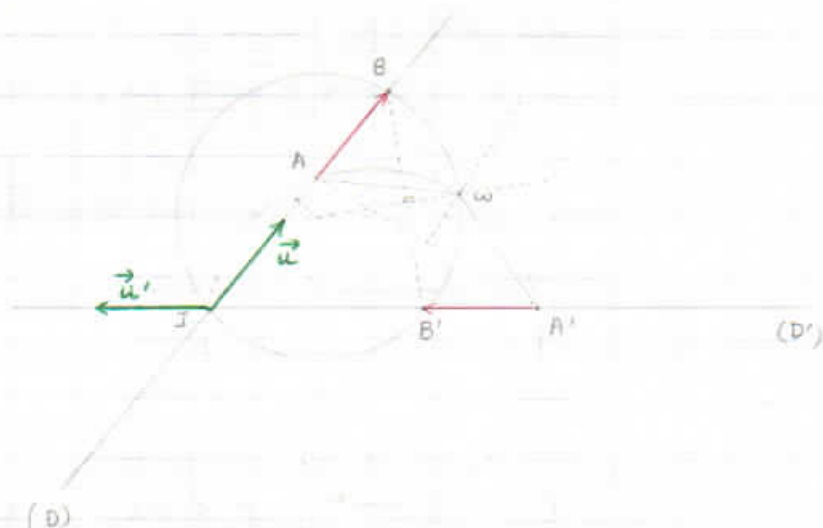
$$r \circ t = r_{(\omega', \alpha)}$$



Construction pratique du centre d'une rotation déterminée par 2 points et leurs images.

$$A ; A' = r(A)$$

$$B ; B' = r(B) \text{ sont donnés.}$$



ω est à l'intersection des cercles (IAA') et (IBB')

des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$

ω cherché est tel que $\text{mes}(\vec{\omega A}, \vec{\omega A'}) \equiv \alpha [2\pi]$

$$\text{mes}(\vec{\omega B}, \vec{\omega B'}) \equiv \alpha [2\pi]$$

$$\vec{u} = \vec{AB}$$

$$\vec{u}' = \vec{A'B'}$$

$$\text{mes}(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv \alpha [2\pi]$$

Le dessin montre que $(\vec{IA}, \vec{IA'})$ n'est pas l'angle de la rotation : $\text{mes}(\vec{IA}, \vec{IA'}) \equiv \alpha + \pi [2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{mes}(\angle A, \angle A') &\equiv \text{mes}(\angle AB, \angle A'B') \quad [\pi] \\ &\equiv \text{mes}(\angle \vec{AB}, \angle \vec{A'B'}) \quad [\pi] \end{aligned}$$

Les 4 points (A, A', I, ω) = quadruplet de points cocycliques.
 Dans ce cas l'angle de la rotation n'est pas nul, mais il peut être mesuré par π . Dans ce dernier cas, le cercle ci-dessus n'existe pas, (c'est la symétrie centrale facile !)

Le 2-cercle (I, B, B') passerait dans le cas général par ω d'où 4 lignes passant par ω

10.5

Isométries de E_3 = Déplacements de E_3

1° φ associé à f est $f \cdot \text{Id}_{E_3}$, alors f est une translation de E_3 .

$$2^\circ \varphi \neq \text{Id}_{E_3} ; \varphi \in G_+(E_3)$$

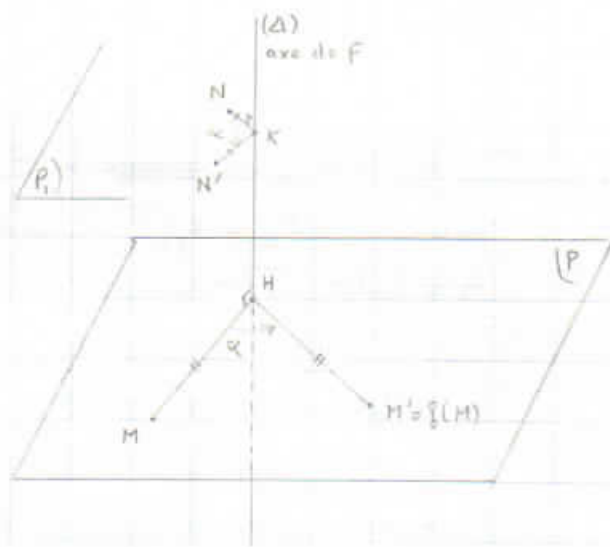
φ = rotation vectorielle d'axe Δ

a) Si $\exists$ 1 pt invariant par f , alors

$\exists$ infinité : vrai ss espace affine associé au ss. esp. vect. des φ inv. par φ .

$\exists \Delta$, droite des points invariants.

f = rotation de E_3 , d'axe Δ , et d'angle α , celui (def)

de $\mathcal{P}$.

Rappel

Pour pouvoir parler d'angle α , il faut avoir orienté l'un des plans P ci-dessus, c'est-à-dire avoir orienté $\vec{P} = \vec{\Delta}^\perp$

B) Si f pt inv. par g , alors on dit que g est un vissage ou déplacement hélicoïdal de E_3 .

Propriété fondamentale d'un vissage

$$\textcircled{1} \quad t_{\vec{u}} \circ r_{(\vec{c}, \alpha)}^*, \text{ avec } \vec{u} \in \vec{\Delta}, \alpha \neq 0, \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Alors on montre que $t_{\vec{u}} \circ r_{(\vec{c}, \alpha)}^* = \text{vissage}$

En effet, l'endomorphisme associé est la rotation vectorielle d'angle α .

$$f \text{ pt invariant: } M \xrightarrow{r} M_1 \xrightarrow{t} M$$

car on aurait $\vec{MM}_1 \perp \vec{u}$ et $\vec{M_1M} = \vec{u}$, contradiction.

② Soit g un vissage de E_3 . Est-il possible d'écrire $g = t_{\vec{u}} \circ r_{(\Delta, \alpha)}$? avec $\vec{u} \in \vec{\Delta}$

$$A' = g(A) \quad (g = \text{vissage})$$

$$t_{\vec{A'A}} \circ g(A) = t_{\vec{A'A}}(A') = A$$

$$A = 1 \text{ pt invariant par } t_{\vec{A'A}} \circ g = r_{(\Delta, \alpha)}$$

$$\underline{\Delta_1 = (A, \vec{\Delta})}$$

$$\begin{cases} \vec{A'A} \text{ n'est pas colinéaire à } \vec{u}. \\ \vec{A'A} \notin \vec{\Delta} \end{cases}$$

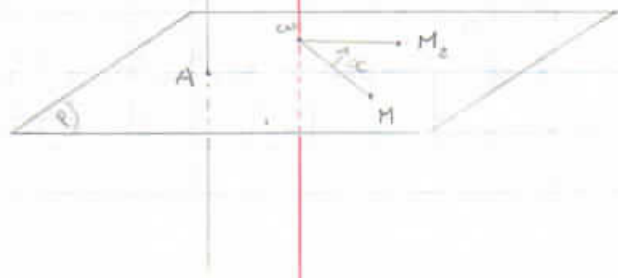
$$\vec{A'A} = -\vec{v} - \vec{u} \quad (\text{puisque } \vec{AA'} = \vec{v} + \vec{u})$$

$$\text{et } \vec{u} \in \vec{\Delta} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{\Delta}$$

$$t_{\vec{A'A}} = t_{-\vec{v}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{-\vec{v}}$$

$$t_{\vec{A'A}} \circ g = t_{-\vec{v}} \circ \underbrace{t_{-\vec{u}} \circ g}_{(\Delta_1)} = r_{(\Delta_1, \alpha)}$$

$$t_{-\vec{u}} \circ g = \underbrace{t_{\vec{v}} \circ r_{(\Delta_1, \alpha)}}_{(\Delta)} ?$$



La restriction de $r_{(O, \alpha)}$ à $P = (A, \vec{\Delta}^\perp)$, est la rotation autour de A , d'angle α .

$t_{\vec{u}}$ peut être considérée comme une translation de $\vec{P}$

$$t_{\vec{u}} \circ r_{(A, \alpha)} = r_{(\omega, \alpha)} \quad (\text{on déplace } P)$$

ω invariant par $r_{(\omega, \alpha)}$ est invariant par $r_{(O, \alpha)}$;

$$\Delta = (\omega, \vec{\Delta})$$

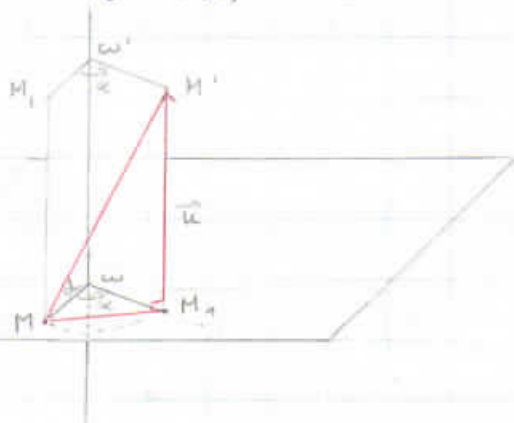
(la raison en est que $\vec{v} \in \vec{P}$)

$$t_{-\vec{u}} \circ f = r_{(O, \alpha)}$$

$$f = t_{\vec{u}} \circ r_{(O, \alpha)}, \quad \vec{u} \in \vec{\Delta}$$

Remarque

$$t_{\vec{u}} \circ r_{(O, \alpha)} = r_{(O, \alpha)} \circ t_{\vec{u}}$$



$$MM'^2 = M_1M'^2 + \|\vec{u}\|^2 \quad d(M, M') \text{ minimale} = \|\vec{u}\|$$

Similitudes

Définition

$$s: E \longrightarrow E$$

$$M \longmapsto M' = s(M)$$

$$P \longmapsto P'$$

$$d(M', P') = k \cdot d(M, P) \quad k \neq 0 \quad (k > 0)$$

Ex: homothétie $h: E_3 \longrightarrow E_3$

$$M \longmapsto M'$$

Soit $h_{(-3)} = \overrightarrow{M'P'} = -3 \overrightarrow{MP}$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ d(M', P') = 3 \cdot d(M, P) \quad \text{car } 3 = |-3| \end{array}$$

Dans la suite, on étudiera les similitudes de P

Décomposition, ~~pour~~ $h \circ f = s$

s donnée, de rapport $k > 0$

h hom. donnée de même rapport k .

$$\exists f / s = h \circ f \quad f \in \mathcal{O}$$

en effet $\exists h^{-1} \in \mathcal{O} / h^{-1} \circ h = Id$

$$h^{-1} \circ s = f$$

h^{-1} a même centre o (quelconque ci-dessus) et pour rapport $\frac{1}{k}$.

$$d[o(M), o(P)] = k \cdot d(M, P)$$

$$d[h^{-1} \circ o(M), h^{-1} \circ o(P)] = \frac{1}{k} k \cdot d(M, P) = d(M, P)$$

$$\forall (M, P) \in P^2$$

$h^{-1} \circ s$ = isométrie g de P .

g = déplacement de P $\longmapsto s$ = similitude directe

g = antidéplacement de P $\longmapsto s$ = sim. indirecte

(ou "inverse")

s est une bijection affine.

$$s = h \circ g$$

biject.

aff.

b.a.

$(S, \circ)$ groupe isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

C'est un isomorphisme de groupe (voir livre).

Points invariants

$k \neq 1$, alors s possède un pt invariant et un seul

Soit $s = (A, A', k \cdot \gamma)$, γ = transformation orthogonale.

Poseons $\Psi = R \circ \varphi$

$$\Psi(\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{A'M'}, \quad \forall M \in P, \quad H' = o(M)$$

$$M \text{ invariant} \iff \Psi(\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AH} \quad \text{Id} = \text{Id}_P$$
$$(\Psi - \text{Id})(\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{A'A}$$

$$\text{Noyau } (\Psi - \text{Id}) = \{ \vec{0} \} ?$$

$$(\Psi - \text{Id})(\vec{u}) = \vec{0} \quad \text{d'où que } \vec{u} \in N(\Psi - \text{Id})$$

$$\Psi(\vec{u}) = \text{Id}(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$R \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}$$

$$R \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$$

$$(R - 1)\|\vec{u}\| = 0$$

$$R \neq 1 \implies \|\vec{u}\| = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$$

$\Psi - \text{Id}$ = bijection

$$\overrightarrow{A'A} \text{ donné, } \exists! \overrightarrow{AH} / (\Psi - \text{Id})(\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{A'A}$$

$$\exists! M \in P$$

Pratique

$$M'(x', y') = o(M)$$

$$M(x, y) \quad (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ orthonormé}$$

$$M(\varphi, \vec{i}, \vec{j}) = R \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad R \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\vec{O'H'}(x', y')$$

$$\vec{OM}(x, y)$$

$$\vec{O'M'} = \Psi(OM) \quad O' = \phi(O)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = kax - kby + x_0 \\ y' = kbx + kay + y_0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \begin{cases} x' = kax + kby + x_0 \\ y' = kbx - kay + y_0 \end{cases}$$

$$\text{et } a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{et } a'^2 + b'^2 = 1$$

$$ka = a'$$

$$kb = b'$$

$$a'^2 + b'^2 = k^2$$

$$M = \begin{bmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{bmatrix}$$

ou

avec

$$k = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

$$M = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{bmatrix}$$

16.5

Décomposition remarquable utilisant le pt ω invariant (si $k \neq 1$)

Soit $h_{(\omega, k)}$.

On sait que $s = h \circ f$ avec f isométrie.

① s directe $\mapsto f$ déplacement

($f \neq$ translation, voir points invariants)

$f =$ rotation

Soit r la rotation de centre ω , et d'angle connu (celui de s ?, celui de f).

Faisons $h \circ r$, et montrons que $h \circ r = s$.

* endomorphismes associés égaux = $h \circ f$

$$* \omega \xrightarrow{s} s(\omega) = \omega \xrightarrow{f}$$

$$\omega \xrightarrow{h \circ r} h \circ r(\omega) = h(\omega) = \omega$$

$$\text{oui: } s = h \circ r$$

$$s = h_{(\omega, k)} \circ r_{(\omega, \alpha)}$$

angle de $r / r = k$

Remarque:

$$s = r_{(\omega, \alpha)} \circ h_{(\omega, k)}$$

oui (même démonstration)

Il y a commutativité.

Le point ω , centre commun de h et α précédemment introduites, est dit centre de la similitude.

On écrit :

$$s_{(\omega, k, \alpha)}$$

② s indirecte $\longmapsto s = h \circ \varphi$ avec φ anti-déplacement.

$$h_{(\omega, k)}$$

On introduit la symétrie orth. affine par rapport à la droite D passant par ω et de direction connue (ensemble des vecteurs invariants par φ , soit $\vec{D}$)

On fait $h \circ s_D$, et on va montrer que $h \circ s_D = s$

* endomorphismes associés = $h \circ \varphi$ (φ = symétrie vect. de $\vec{P}$)

$$* \quad \omega \xrightarrow{s} s(\omega) = \omega \quad \longleftarrow$$

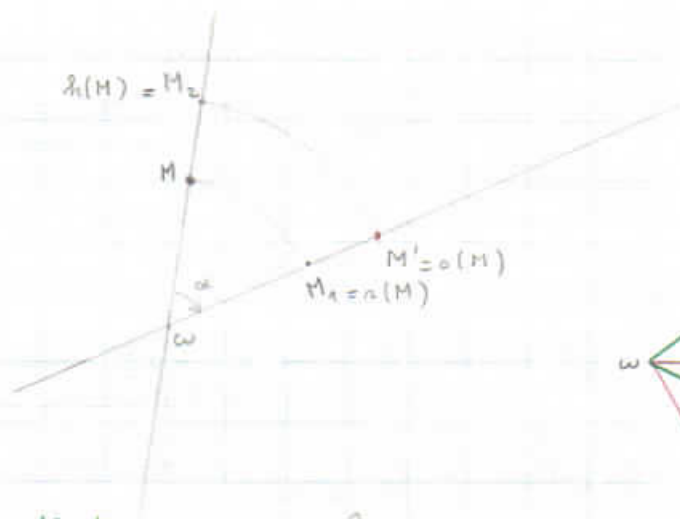
$$\omega \xrightarrow{h \circ s_D} h \circ s_D(\omega) = h(\omega) = \omega \quad \text{car } \omega \in (D)$$

$$\text{on a : } s = h \circ s_D = s_D \circ h$$

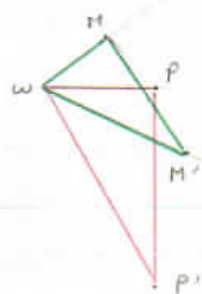
$$s = h_{(\omega, k)} \circ s_D$$

et commutativité

$$\omega \in (D)$$

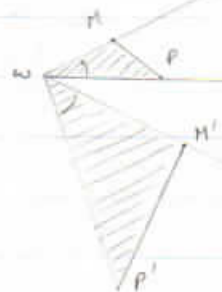
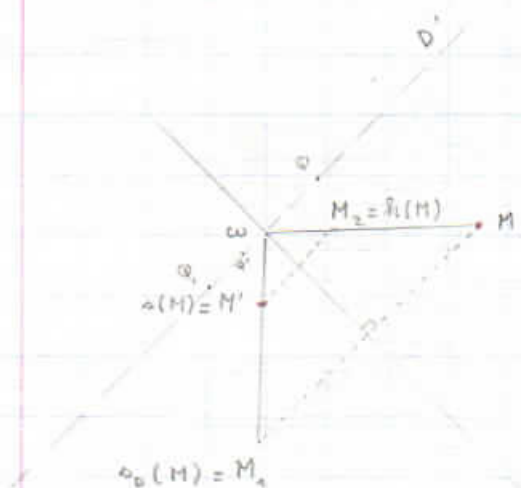


$$\omega \begin{matrix} H & H' \\ P & P' \end{matrix} \}$$



similitude directe

$$s = h_{(\omega, \alpha)} \circ r_{(\omega, \alpha)}$$



similitude indirecte $s = h_{(\omega, \alpha)} \circ r_D$; $\omega \in (D)$

(D)

Remarque

(D) et (P') sont globalement invariantes par la similitude indirecte. On dit que (D) est la première.

$$s = h_{(\omega, k)} \circ s_D = s_D \circ h_{(\omega, k)}$$

$$s = h'_{(\omega, -k)} \circ s_{D'} = s_{D'} \circ h'_{(\omega, -k)}$$

17.5

Interprétation d'une similitude à l'aide des nombres complexes.

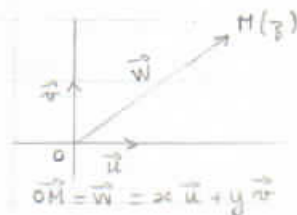
④ Similitudes directes

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

$$z = x + yi$$

$$z' = x' + y'i$$

M d'affixe z et M' d'affixe z'



$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & z' \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ M & \xrightarrow{F} & M' \end{array}$$

$$z' = f(z) ?$$

$$z' = x' + y'i$$

$$= (a + bi)x + (-b + ai)y + (c + c'i)$$

$$= (a + bi)x + i(a + bi)y + (c + c'i)$$

$$z' = (a+bi)(x+yi) + c + c'i$$

$$z' = A \bar{z} + B$$

$$z' = A \bar{z} + B ; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \quad (A \neq 0)$$

② Similitude indirecte

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x' + y'i &= z' = (a+bi)x + (b-ai)y + c + c'i \\ &= (a+bi)x + i\left(\frac{b}{i} - a\right)y + c + c'i \\ &= (a+bi)x + i(-bi - a)y + c + c'i \\ &= (a+bi)(x - yi) + c + c'i \\ z' &= A \bar{z} + B \end{aligned}$$

$$z' = A \bar{z} + B ; (A, B) \in \mathbb{C}^2 \quad (A \neq 0)$$

Inversement, soit la relation $z' = A \bar{z} + B$
 $(A, B) \in \mathbb{C}$

$$x' + y'i = (a+bi)(x+yi) + c + c'i$$

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \mapsto \text{similitude directe ssi } A \neq 0$$

$$\text{Soit } z' = A \bar{z} + B$$

$$x' + y'i = (a + bi)(x - yi) + c + c'i$$

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \mapsto \text{sim. indirecte ssi } A \neq 0$$

Résumé

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = az + b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \mapsto \{ F = \text{sim. dir. de } P \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = a\bar{z} + b \\ a \neq 0 \end{array} \right\} \mapsto \{ F = \text{sim. indir. de } P \}$$

Traduction des propriétés de F relativement à A et B

$$\underline{z' = A \bar{z} + B}$$

$$1^\circ \text{ Si } |A| = 1 \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$\mapsto |A| = 1 \quad \text{car } A = a + bi$$

$F \neq \emptyset$ = déplacement.

$$* A = 1 \text{ et } B = 0, z' = z, F = \text{Id}_P$$

$$* A = 1, \forall B \in \mathbb{C}^*, z' - z = B$$



$z' - z =$ affixe de $\overrightarrow{MM'}$

$B =$ affixe de $\vec{u}$ fixe

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \text{---} \quad T = t \vec{u}$$

* Si $A \neq 1$, ($|A|=1$)

$F =$ rotation

centre ω : $z' = z$ donc $z = Az + B$

$$z(1-A) = B$$

$$z' = z = \frac{B}{1-A} = z_\omega$$

angle? $a = \cos \alpha = \cos \theta$

$$b = \sin \alpha = \sin \theta$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\forall e^i: A = a + bi = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\arg A \equiv \theta \quad [2\pi]$$

α est mesuré par $\arg A$, une des déterminations de $\text{Arg } A$.

2°/ Si $k \neq 1$.

$$a^2 + b^2 \neq 1$$

$$|A| \neq 1$$

$F \neq$ déplacement

$$F = h_{(\omega, k)} \circ r_{(\omega, \alpha)}$$

$$\omega: z = Az + B$$

$$z_\omega = \frac{B}{1-A} \quad (A \neq 1 \text{ car } |A| \neq 1)$$

$$k: k = |A|$$

$$\alpha: z' = Az + B$$

$$z_\omega = Az_\omega + B$$

$$(z' - z_\omega) = A(z - z_\omega)$$

Soit $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$ le nouveau repère

$M(z); (Z)$

$M(z'); (Z')$

$Z =$ affixe de $\vec{\omega M} = z - z_\omega$

$Z' =$ " de $\vec{\omega M'} = z' - z_\omega$

$$Z' = AZ$$

$$|Z'| = |A| \cdot |Z|$$

$$\|\vec{\omega M'}\| = |A| \cdot \|\vec{\omega M}\|$$

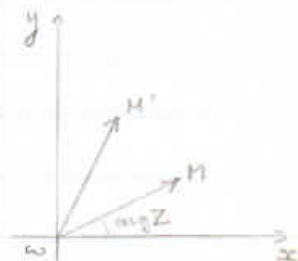
$$\arg Z' \equiv \arg A + \arg Z \quad [2\pi]$$

$$\arg Z' - \arg Z \equiv \arg A$$

$$\text{mes}(\vec{\omega x}, \vec{\omega M'}) - \text{mes}(\vec{\omega x}, \vec{\omega M}) \equiv \arg A$$

$$\text{mes}(\vec{\omega M}, \vec{\omega M'}) \equiv \arg A$$

$$\text{mes } \alpha \equiv \arg A \quad [2\pi] \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$



$F =$ similitude directe

ω invariant

$$k = |A|$$

$$\text{mes } \alpha \equiv \arg A \quad [2\pi]$$

$$\underline{z' = A \bar{z} + B}$$

$$1^o / \underline{k = 1}, \quad |A| = 1$$

$F =$ antitéléméto

Points invariants ?

$$z = A \bar{z} + B \quad (1)$$

$$\bar{z} = \overline{A \bar{z} + B} = \bar{A} \cdot z + \bar{B} \quad (2)$$

$$z = A (\bar{A} \cdot z + \bar{B}) + B$$

$$z = \overline{A \bar{A}} z + (A \bar{B} + B)$$

$$(1 - A \bar{A}) z = A \bar{B} + B$$

$$\text{Gr } A \bar{A} = 1 \quad (= |A|^2) \quad \text{donc } 0 z = A \bar{B} + B$$

* Si $A \bar{B} + B \neq 0$, 1 pt invariant

$$F = s_D \circ t_{\bar{w}}, \quad \bar{w} \in D$$

* Si $A \bar{B} + B = 0$, on sait que $F = s_D$ ($D = \text{ens.}$)

des points invariants).

$$\text{et } \underline{k} \neq 1, \quad |A| \neq 1$$

$$F = \Delta_D \circ h_{(\omega, k)} = h \circ \Delta_0$$

$$\omega : z_{\omega} = A \bar{z}_{\omega} + B$$

$$\underbrace{(1 - A\bar{A})}_{\neq 0} z_{\omega} = A\bar{B} + B$$

$$\exists! \omega$$

$$\underline{k} : k = |A|$$

$$\underline{D} : M \in D \mapsto M' \in D$$

$$\vec{\omega M} \text{ et } \vec{\omega M'} \in \vec{D}$$

$$\vec{\omega M'} = |A| \vec{\omega M} \quad \text{car } |A| = k$$

$$Z' = |A| Z \quad (1)$$

$$\text{et } Z' = z' - z_{\omega}$$

$$Z = z - z_{\omega}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{et } z' &= A \bar{z} + B \\ z'_{\omega} &= A \bar{z}_{\omega} + B \end{aligned} \right\}$$

$$(z' - z'_{\omega}) = A(\bar{z} - \bar{z}_{\omega}) \mapsto Z' = A \bar{Z} \quad (2)$$

D'où le système

$$\begin{cases} Z' = A \bar{Z} \\ Z' = |A| Z \end{cases}$$

(1)

(2)

pour $(M, M') \in D^2$

$$A \bar{Z} = |A| Z \quad |A| \neq 0$$

$$\frac{A}{|A|} \bar{Z} = Z$$

$$\arg \frac{A}{|A|} + \arg \bar{Z} \equiv \arg Z \quad [2\pi]$$

$$\arg A - \arg Z \equiv \arg Z$$

$$2 \arg Z \equiv \arg A \quad [2\pi]$$

$$\arg \underbrace{Z}_{\downarrow} \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$$

Z relatifs à ω aux $M \in D(\omega, \vec{D})$

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la droite D .

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{u}) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$$

$$\text{mes}(x'x, D) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$$

F = similitude indirecte

ω invariant

$$k = |A|$$

$$\omega \in D \text{ et } \text{mes}(x'x, D) \equiv \frac{1}{2} \arg A \quad [\pi]$$

Exemples

1. $z' = iz$

$A = i, B = 0$

$|A| = 1; i \neq 1$

$F = \text{rotation } (\omega, \alpha)$

$\omega : z = iz$

$(1-i)z = 0 \rightarrow z = 0$

$\omega = 0$

$\alpha ? \quad \text{mes } \alpha \equiv \arg A \quad [2\pi]$

$A = 0 + 1i$

$= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$\arg A \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

2. $z' = iz + 2 - i$

rotation d'angle mesuré par $+\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

$\omega ? \quad (1-i)z_\omega = 2-i$

$z_\omega = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i^2)} = \frac{1}{2}(3+i)$

$z_\omega = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \omega \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$

3. $z' = -iz + 3i$

$z_\omega, -\frac{\pi}{2}$

$z_\omega = \frac{3i}{1+i} = \frac{3i - 3i^2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

$$\omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$4. \quad z' = z + 2$$

$$z' - z = 2$$

translation de vecteur $\vec{w}(2, 0)$

21.5

15

Coniques

Ce sont les courbes d'équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonale:

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

$$M(x, y)$$

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On se placera dans le cas où $|a| + |b| \neq 0 \Rightarrow (a, b) \neq (0, 0)$

Supposons $ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Par exemple $a \neq 0$

$$by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

$$1) c \neq 0 \quad x = \frac{-by^2 - 2dy - e}{2c}$$

$$x = -\frac{b}{2c}y^2 - \frac{d}{c}y - \frac{e}{2c}$$

$$x = \underbrace{\alpha}_{\neq 0} y^2 + \beta y + \gamma$$

$$x = \alpha \left(y^2 + \frac{\beta}{\alpha}y + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

$$x = \alpha \left(\left(y + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

$$x = \alpha \left(y + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{\Delta}{4\alpha}\right)}_X = \alpha \underbrace{\left(y + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}_Y$$

nouveau repère $\left\{ \omega \left(-\frac{\Delta}{4\alpha}, -\frac{\beta}{2\alpha} \right), \vec{i}, \vec{j} \right\}$

$$X = \alpha Y^2$$

$\omega \in (P)$, parabole représentative

$(\omega, \vec{i})$ = axe de symétrie de (P)

ω = sommet

Concavité tournée vers la droite ssi $\alpha > 0$.

$$2) z = 0$$

$$by^2 + 2dy + e = 0, b \neq 0.$$

$$b \left(y^2 + \frac{2d}{b}y + \frac{e}{b} \right) = 0$$

$$y^2 + 2\alpha'y + \beta' = 0$$

$$(y + \alpha')^2 - \alpha'^2 + \beta' = 0$$

$$(y + \alpha')^2 - \underbrace{(\alpha'^2 - \beta')}_u = 0$$

$$* u < 0, (y + \alpha')^2 = u < 0$$

Impossible

$$\exists y. \quad (\mathcal{C}) = \emptyset$$

$$* u = 0, \text{ donc } y = -\alpha' \text{ (double)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(car $c = 0 \Rightarrow 2cx = 0$)

$$(\mathcal{C}) = \text{droite ("double")}$$

$$* u > 0, \text{ alors } u = m^2, \quad (y + \alpha')^2 = m^2$$

$$y + \alpha' = \pm m$$

$$y = \pm m - \alpha'$$

$$(\mathcal{C}) = D_1 \cup D_2, \quad D_1 // D_2$$

$$D_1: y = +m - \alpha'$$

$$D_2: y = -m - \alpha'$$

D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta):$
 $y = -\alpha'$.

On traiterait pareillement le cas $\mathcal{B} = 0, (a \neq 0)$.

supposons $a \neq 0$

$$\underline{ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0} \quad (ab \neq 0)$$

$$ax^2 + 2cx + by^2 + 2dy + e = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{2c}{a}x \right) + b \left(y^2 + \frac{2d}{b}y \right) + e = 0$$

$$a \left[\left(x + \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{c^2}{a^2} \right] + b \left[\left(y + \frac{d}{b} \right)^2 - \frac{d^2}{b^2} \right] + e = 0$$

$$a \left(x + \frac{c}{a}\right)^2 + b \left(y + \frac{d}{b}\right)^2 - \frac{c^2}{a} - \frac{d^2}{b} + e = 0$$

$\left\{ \omega \left(-\frac{c}{a}, -\frac{d}{b}\right) ; \vec{i}; \vec{j} \right\}$ repère nouveau

$$a X^2 + b Y^2 + k = 0$$

Il est clair que:

1° ω est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

2° $(\omega, \vec{i})$ et $(\omega, \vec{j})$ sont 2 axes de symétrie.

Revenons à: $a X^2 + b Y^2 + k = 0$

■ ① $a, b > 0$, par exemple $a > 0$ et $b > 0$

* $k = 0$, $a X^2 + b Y^2 = 0$

$$(\mathcal{C}) = \{\omega\}$$

* $k > 0$ $\underbrace{a X^2 + b Y^2}_{\geq 0} = \underbrace{-k}_{< 0}$

$$(\mathcal{C}) = \emptyset$$

* $k < 0$

$$k = -m^2, m \neq 0$$

$$a X^2 + b Y^2 - m^2 = 0$$

$$\frac{a}{m^2} X^2 + \frac{b}{m^2} Y^2 - 1 = 0$$

$$\underbrace{\frac{X^2}{\frac{m^2}{a}}}_{>0} + \underbrace{\frac{Y^2}{\frac{m^2}{b}}}_{>0} - 1 = 0$$

$$\frac{m^2}{a} = A^2 \quad \frac{m^2}{b} = B^2$$

$$\boxed{\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1}$$

($\mathcal{E}$) = ellipse

A = longueur d'un demi-axe (grand ou petit)

B = longueur de l'autre demi-axe (petit ou grand)

Si $A=B$, ($\mathcal{E}$) = cercle (C).

■ ② $ab < 0$.

$a > 0$ et $b < 0$ par exemple.

$$m^2 X^2 - p^2 Y^2 + k = 0$$

$$\times \quad k = 0$$

$$m^2 X^2 - p^2 Y^2 = 0$$

$$(mX + pY)(mX - pY) = 0$$

$$mX + pY = 0 \quad (D_1)$$

$$mX - pY = 0 \quad (D_2)$$

$$(\mathcal{E}) = (D_1) \cup (D_2) \quad \{\omega\} = (D_1) \cap (D_2)$$

D_1 et D_2 symétriques par rapport à $(\omega, \vec{e})$ ou $(\omega, \vec{d})$

* $k \neq 0$

$$\frac{m^2}{k} X^2 - \frac{p^2}{k} Y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{\frac{k}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{k}{p^2}} + 1 = 0$$

Si $k > 0$, $\frac{k}{m^2} = A^2$ $\frac{k}{p^2} = B^2$

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} + 1 = 0$$

Si $k < 0$, $k = -k'$

$$\frac{X^2}{\frac{-k'}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{-k'}{p^2}} + 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{\frac{k'}{m^2}} - \frac{Y^2}{\frac{k'}{p^2}} - 1 = 0$$

$$\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} - 1 = 0$$

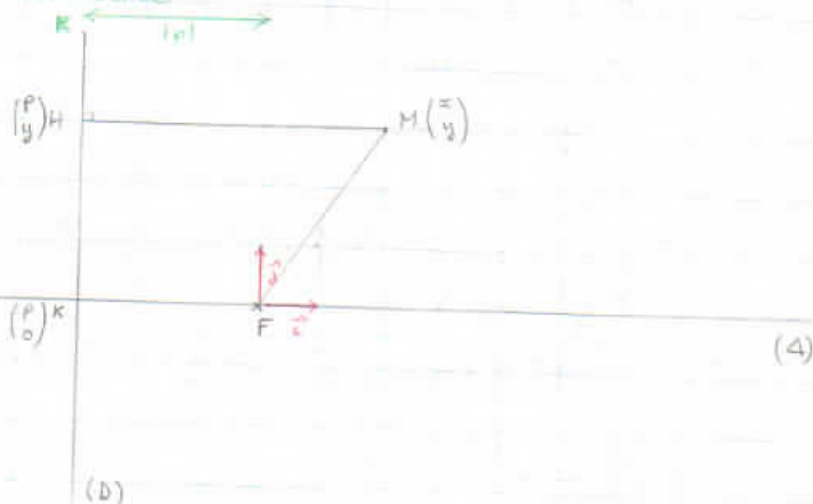
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = \pm 1$$

(*) = hyperbole

23.5

Foyers et directrices.

Problème



On prend le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\vec{i} \perp (D)$. $F \notin (D)$

Ensemble des points $M \in (P) / \frac{MF}{MH} = e$, $e \in \mathbb{R}_+$,
(e donné). (1)

$$MF = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MH = |MH| = |p - x|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e |p - x|$$

$$x^2 + y^2 = e^2 (p-x)^2 \quad (2)$$

$$x^2(1-e^2) + y^2 + 2pe^2x - e^2p^2 = 0$$

On écarte le cas où $e=0$, $(E)=\{F\}$

De même, $p=0$, alors $F=K = e \leq 1$, & M

$e=1$, droite

$e>1$, D_1, D_2 droites concourantes

Cas des écartés :

$$\textcircled{1} 1-e^2=0 \Leftrightarrow e=1$$

$$y^2 + 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 + 2p\left(x - \frac{p^2}{2p}\right) = 0 \quad p \neq 0$$

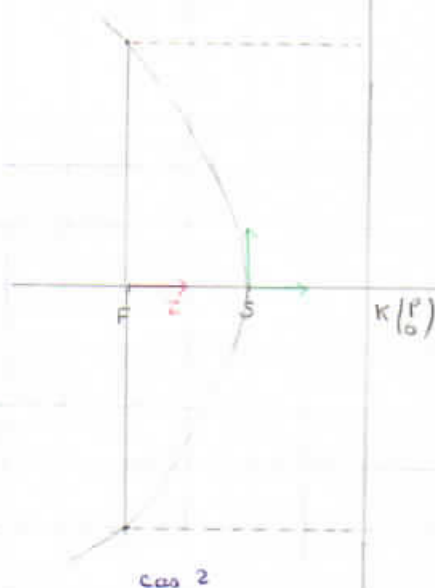
$$y^2 + 2pX = 0$$

$$\text{Soit } \begin{cases} X = x - \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}$$

$$S\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad S = \text{milieu de FK}$$

$$S = \text{nouvelle origine : } Y^2 = -2pX$$

$$\begin{cases} \text{Si } p < 0 ; X \geq 0 \\ \text{Si } p > 0 ; X \leq 0 \end{cases}$$



$$y^2 = -2px$$

$$2yy' = -2p$$

$$\text{si } y=0, \exists y' \text{ mais } y \rightarrow 0 \rightarrow y' \rightarrow \pm \infty$$

tgte verticale

$$\text{ou encore } \frac{y}{x} = \frac{+\sqrt{-2px}}{x}, \text{ par ex (cas 1)}$$

$$= \sqrt{\frac{-2p}{x}} \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y}{x} = +\infty, \text{ tgte verticale}$$

$$\textcircled{2} \quad e \neq 1 \rightarrow 1 - e^2 \neq 0$$

L'équation générale de est :

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2px - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left[x^2 + \frac{2e^2p}{1-e^2}x\right] + y^2 - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left[x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right]^2 - (1-e^2)\left(\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 - e^2p^2 = 0$$

$$(1-e^2)\left(x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - e^2p^2 - \frac{e^4p^2}{1-e^2} = 0$$

$$(1-e^2)\underbrace{\left(x + \frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2}_X + \underbrace{y^2}_Y + \frac{-e^2p^2}{1-e^2} = 0$$

$$\begin{cases} X = x + \frac{e^2p}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases} \quad \omega\left(\frac{e^2p}{e^2-1}, 0\right) \text{ dans } \mathcal{R} = (F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

La nouvelle équation est donc :

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2} = 0 \quad (E)$$

$$\alpha) \underline{1-e^2 > 0 \Leftrightarrow e < 1}$$

$$(E): \quad \underbrace{\frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}}}_{>0} + \frac{Y^2}{\underbrace{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}_{>0}} = 1$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 = \frac{e^2 p^2}{1-e^2} \end{cases}$$

$$(E): \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ellipse de centre ω , d'axes de symétrie (ωX) et (ωY) .

$$\beta) \underline{1 - e^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1}$$

$$(E): \frac{\frac{X^2}{\frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2}}}{>0} - \frac{\frac{Y^2}{\frac{e^2 p^2}{e^2-1}}}{>0} = 1$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

hyperbole de centre ω , d'axes de symétrie (ωX) et (ωY)
Le pt F, foyer de l'hyperbole appartient à l'axe transverse, ici (ωX) . La directrice (D) est parallèle à l'axe non transverse.

problème inverse

① On se donne une parabole. Trouver son foyer et sa directrice

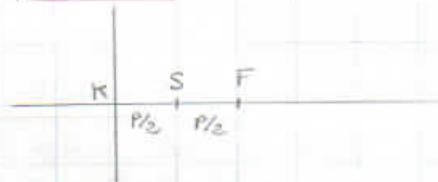
(P) : $y^2 + 2px = 0$ (sommet = origine du repère)

$y^2 = -2px \leftarrow$ terme sans carré

terme au carré $\uparrow$
 $|p| =$ paramètre de la parabole

$|p| = FK$

$\frac{|p|}{2} = FS = SK$



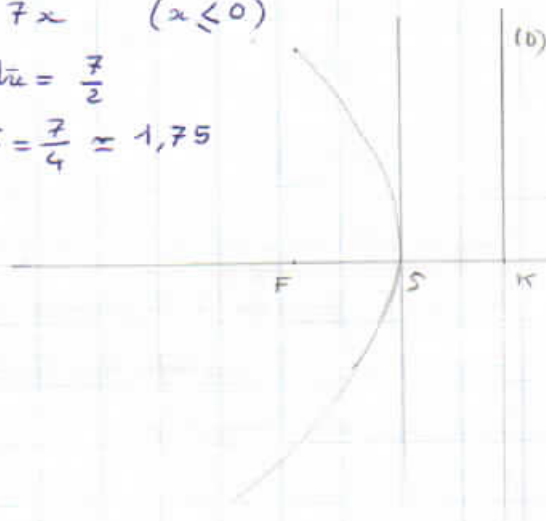
exemple

$y^2 + 7x = 0$

$y^2 = -7x \quad (x \leq 0)$

paramètre = $\frac{7}{2}$

$SF = SK = \frac{7}{4} \approx 1,75$



2.

$$y = 2x^2 - x + 5$$

$$y = 2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + 5 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 5 - \frac{2}{16}$$

$$y = 2X^2 + \frac{39}{8}$$

$$2X^2 = \underbrace{y - \frac{39}{8}}_Y$$

$$X^2 = \frac{1}{2} Y$$

$$\text{paramètre} = \frac{1}{4}$$

$$SF = SK = \frac{1}{8}$$

② On se donne une ellipse. Trouver son foyer et sa directrice.

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Il faut, si F et (D) existent, que :

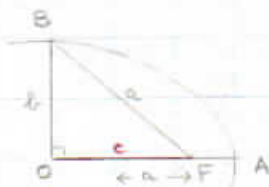
$$a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{e^2 p^2}{1-e^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1-e^2) \quad \rightarrow \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

connus

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Le calcul ne peut se poursuivre que si $a^2 > b^2$. On pose traditionnellement $a^2 - b^2 = c^2$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Z

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

donc p. 337

$e =$ excentricité de (E)

Alors

$$\frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = b^2$$

$$p^2 = b^2 \frac{(1 - e^2)}{e^2}$$

$$p^2 = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{c^2} \right)$$

$$p^2 = b^2 \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^4}{c^2}$$

$$p = \pm \frac{b^2}{c}$$

or, ω , centre de l'ellipse, doit avoir pour abscisse

dans $(F, \vec{z}, \vec{j})$ $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{e^2 p}{1-e^2} \end{array} \right.$ (voir position ci-dessus)

donc F aura dans $(\omega, \vec{z}, \vec{j})$ pour abscisse $\frac{e^2 p}{1-e^2}$

$$\frac{e^2 p}{1-e^2} \left(\pm \frac{b^2}{c} \right) = \pm c$$

Z

$$\exists F \text{ et } F' / \overline{\omega F} = +c \text{ et } \overline{\omega F'} = -c$$

$$\text{alors } \overline{FK} = p_1 = \frac{b^2}{c}$$

$$\overrightarrow{F'K'} = p_2 = -\frac{b^2}{c}$$

$$\overline{\omega K} = \overline{\omega F} + \overline{FK} = c + \frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{\omega K'} = \overline{\omega F'} + \overline{F'K'} = -c - \frac{b^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$$

Z

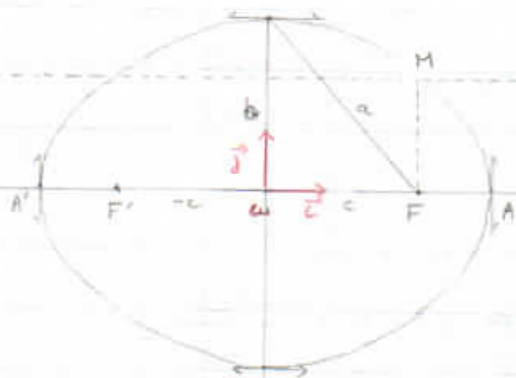
et $d(\omega,$

$$d(\omega, K) = \frac{a^2}{c}$$

(D')

H'

K'



(D)

H

K

$$a = 3$$

$$c = 2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5} = 2,3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

$$MF = \frac{c}{a} MH$$

Z

ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$p = \pm \frac{b^2}{c}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

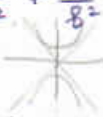
(D.) d'abscisse $\pm \frac{a^2}{c}$

$$\overline{OF} = \pm c$$

③ On se donne une hyperbole.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ par exemple}$$

(on pourrait avoir $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

Dans la 2^e éventualité , $\exists F \in (\omega X)$, mais $\nexists F$ sur ωY axe transverse.

Revenons à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Il faut que $a^2 = \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2}$

$$b^2 = \frac{e^2 p^2}{e^2 - 1}$$

on tire $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$

on line $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

puis $p = \pm \frac{b^2}{c}$

$$(D) \quad \overline{WF} = c$$

$$\overline{WK} = \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{WF'} = -c$$

$$\overline{WK'} = -\frac{a^2}{c}$$

Z

Hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

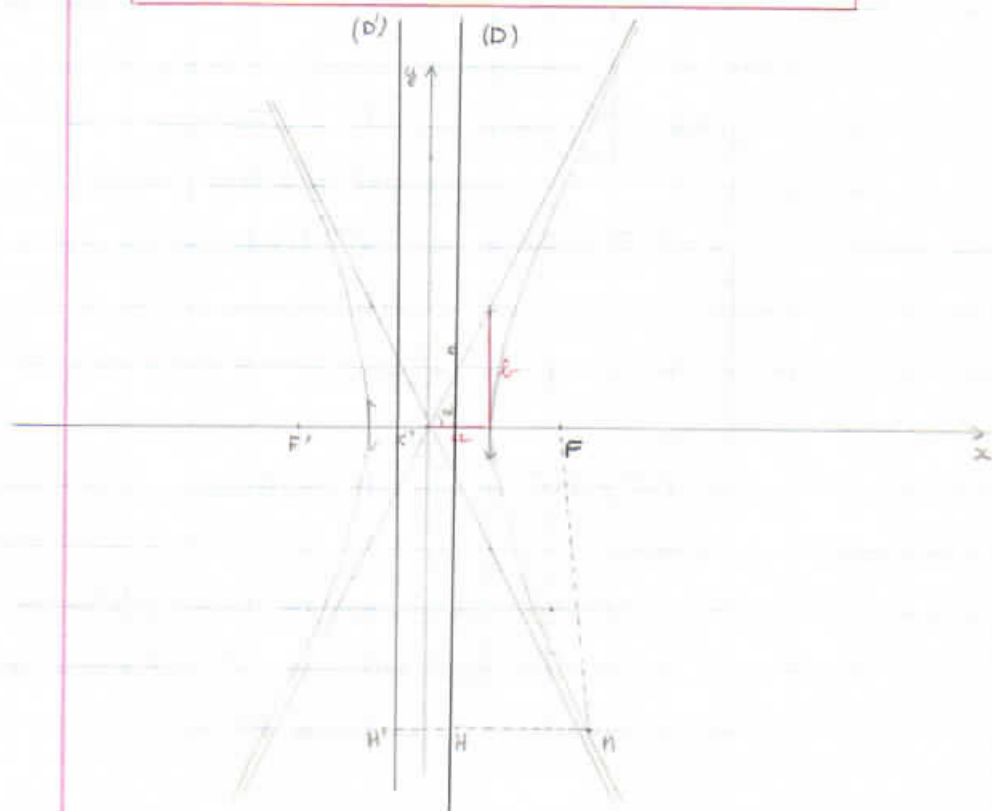
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$p = \pm \frac{b^2}{c}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$(D_i) \text{ d'abscisse } \pm \frac{a^2}{c}$$

$$\overline{WF} = \pm c$$



Définition. Locusale des coniques à centres (E) ou (H).

$$(E): \frac{MF}{MH} = e \quad MF = e MH$$

$$MF' = e MH'$$

$$MF + MF' = e (MH + MH')$$

$$2 \frac{a^2}{c}$$

$$MF + MF' = 2 \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c}$$

Z

$$MF + MF' = 2a \quad (\text{segments additifs})$$

La réciproque est admise.

$$(H): \frac{MF}{MH} = e \quad MF = e MH$$

$$MF' = e MH'$$

$$* MF' - MF = e (MH' - MH)$$

$$= e HH'$$

$$= e \frac{a^2}{c}$$

(voir 2 cas de figure)

$$* MF - MF' = e (MH - MH')$$

idem.

Les 2 calculs ci-dessus ont lieu, l'un si M appartient à la branche qui entoure F, l'autre si M appartient à la branche qui entoure F'.

Z

$$MF' - MF = 2a$$

$$MF - MF' = 2a$$

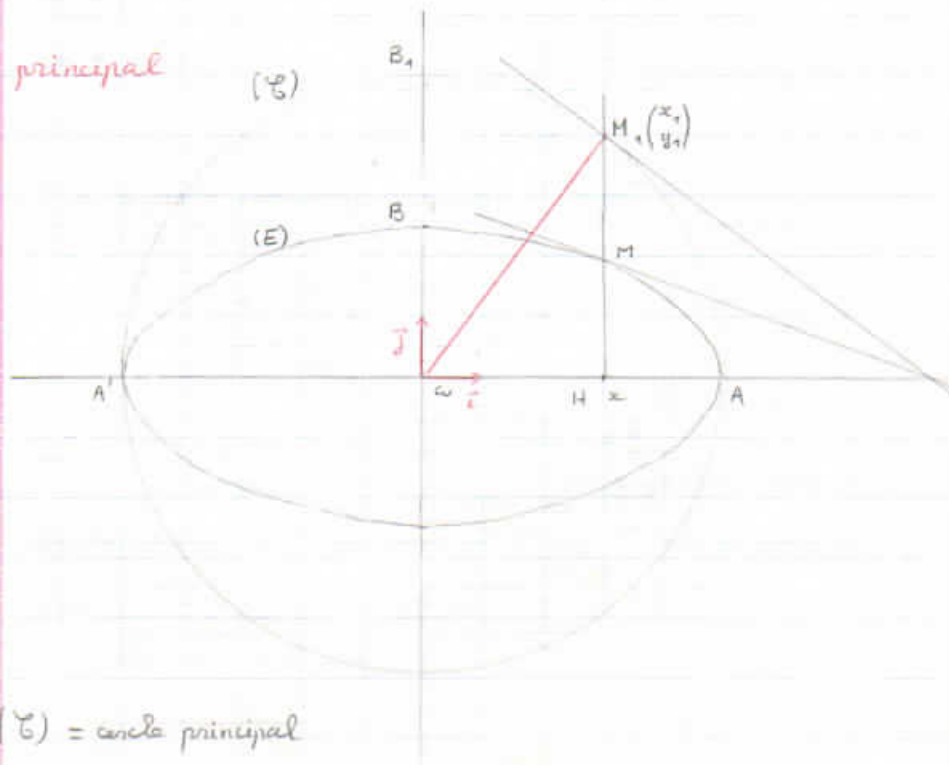
$$|MF' - MF| = 2a$$

Réciproque vraie et admise.

Remarque

Revoir sérieusement cette définition du point de vue vectoriel (voir tangentes)

Ellipse et cercle principal



$(C) = \text{cercle principal}$

$$(C): x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = a \cos \varphi \\ y_1 = a \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

$$f: M_1 \mapsto M$$

$$f \begin{cases} x = x_1 \\ y = \frac{b}{a} y_1 \end{cases}$$

f affine

Soit φ l'endomorphisme associé à f .

$$M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

f est dite affinité orthogonale d'axe AA' , de direction BB' de rapport $\frac{b}{a}$

Les tangentes en M_1 et M au cercle et à l'ellipse rencontrent l'axe (O, F) au même point T .

Un vecteur directeur de MT , tgte en M à (E) est :

$$\begin{cases} x'(\varphi) = -a \sin \varphi \\ y'(\varphi) = b \cos \varphi \end{cases}$$

$$M \neq A, A', B, B'$$

$$(MT) : \frac{x - a \cos \varphi}{-a \sin \varphi} = \frac{y - b \sin \varphi}{b \cos \varphi}$$

On fait $y=0$ dans l'équation (MT) et l'on trouve x_T .

On fait un calcul analogue, plus simple, avec la

$$\text{tgte en } M_1 : \frac{x - a \cos \varphi}{-a \sin \varphi} = \frac{y - a \sin \varphi}{a \cos \varphi}$$

$$y=0 \rightarrow x_{T_1} \text{ connu.}$$

$$\text{On constate que } x_{T_1} = x_T \rightarrow T = T_1$$

18.8

Construction d'une tangente à une conique

Théorème

Soit (Γ) une conique de foyer F et de directrice associée (D) .

La tangente à Γ en tout pt M de Γ qui n'appartient pas à l'axe focal coupe (D) en un pt T tel que :

$$\vec{FM} \cdot \vec{FT} = 0.$$

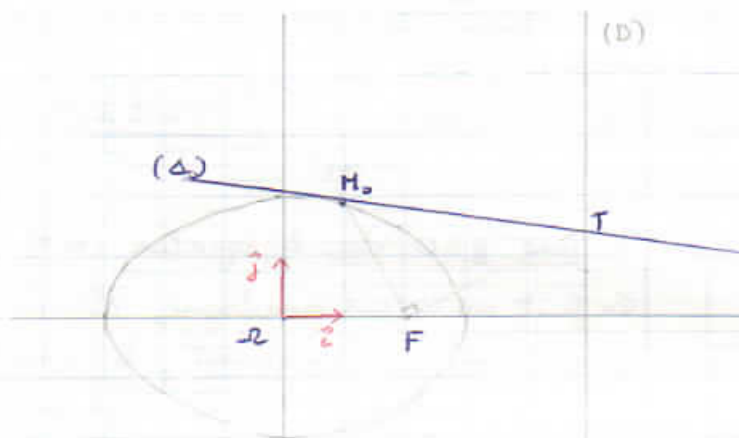
Démonstration.

Soit (Γ) = ellipse de centre Ω .

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: (Γ) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $a > b > 0$

$F(c, 0)$

et $x = \frac{a^2}{c}$: équation de (D) dans ce repère.



(Δ_0) = tangente à (Γ) en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation :

$$\cancel{x - x_0} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(\Delta_0): \frac{y - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2}}{x - x_0} = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

$$y - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{b}{a \sqrt{a^2 - x_0^2}} x - \frac{b}{a} \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

donc $2yy' = -\frac{2b^2}{a^2} x$

$$y'_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2$$

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1}$$

$$1 \text{ car } M_0 \in (H).$$

$$\text{donc } (\Delta_0): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\exists T = (D) \cap (D_0) \text{ car } (\Delta_0) \not\subset (D).$$

$$T(x, y) / \begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 & \vdash y = \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \\ x = \frac{a^2}{c} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FT} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right) \end{pmatrix}$$

Calculons $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT}$.

On a :

$$\begin{aligned}\vec{FM} \cdot \vec{FT} &= (x_0 - c) \left(\frac{a^2}{c} - c \right) + b^2 \left(1 - \frac{x_0}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} (x_0 - c)(a^2 - c^2) + \frac{b^2}{c} (c - x_0)\end{aligned}$$

et $a^2 - c^2 = b^2$

Donc $\vec{FM} \cdot \vec{FT} = 0$

Application

Pour construire la tgte (Δ_0) à M en M_0 ,

* on trace la droite FM_0

* on trace la droite orthogonale à FM_0 passant par F . Elle coupe (D) en T .

* (M_0T) est la tangente cherchée.