

Chapitre 13

Calcul des probabilités

Du niveau de base au niveau concours

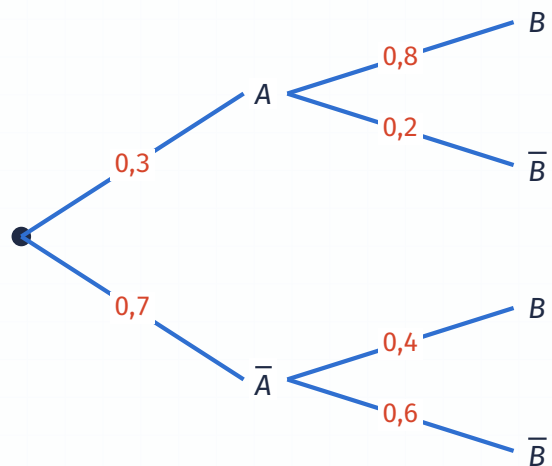
À connaître par cœur

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$X \sim B(n, p) : E(X) = np, V(X) = np(1 - p)$$

Défi de concours

30 élèves : probabilité que deux d'entre eux aient le même anniversaire $\approx$?



$$P(B) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,4 = 0,52$$

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Formulaire

Sommaire

1	Principes de dénombrement	5
2	Arrangements et permutations	6
3	Combinaisons et binôme	8
4	Les tirages	10
5	Vocabulaire des probabilités	11
6	Probabilité sur un univers fini	12
7	Probabilités conditionnelles	13
8	Probabilités totales et Bayes	15
9	Indépendance, épreuves répétées	16
10	Variables aléatoires	17
11	La loi binomiale	19
12	Les pièges classiques	20
13	Les astuces des concours	21
14	L'essentiel du chapitre en une page	23
15	Niveau 1 · Bases	24
16	Niveau 2 · Bac	25
17	Niveau 3 · Approfondissement	27
18	Niveau 4 · Concours	28
19	Dénombrement	30
20	Probabilités et équiprobabilité	32
21	Probabilités conditionnelles	34
22	Indépendance et épreuves répétées	36
23	Variables aléatoires	38

24 Défis de concours	40
25 Corrigés du niveau 1	43
26 Corrigés du niveau 2	45
27 Corrigés du niveau 3	48
28 Corrigés du niveau 4	51
29 Corrigés : dénombrement	54
30 Corrigés : équiprobabilité	58
31 Corrigés : conditionnement	62
32 Corrigés : indépendance	65
33 Corrigés : variables aléatoires	68
34 Corrigés : défis de concours	71

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau de l'examen national.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

■ **Définition** : à savoir par cœur.

■ **Propriété / Théorème** : les outils.

■ **Méthode** : la démarche pas à pas.

■ **Exemple** : un calcul entièrement rédigé.

■ **Piège** : l'erreur classique à éviter.

■ **Astuce de concours** ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Dénombrement, Probabilités et équiprobabilité, Probabilités conditionnelles, Indépendance et épreuves répétées, Variables aléatoires, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé.

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|--|---|
| ☐ utiliser les principes additif et multiplicatif ; | ☐ calculer une probabilité (contraire, crible) ; |
| ☐ dénombrer listes, arrangements, permutations ; | ☐ calculer une probabilité conditionnelle ; |
| ☐ compter des anagrammes ; | ☐ construire et exploiter un arbre pondéré ; |
| ☐ calculer avec les C_n^p (Pascal, symétrie) ; | ☐ appliquer les probabilités totales et Bayes ; |
| ☐ développer avec la formule du binôme ; | ☐ justifier une indépendance ; |
| ☐ modéliser les trois types de tirages ; | ☐ donner une loi, sa fonction de répartition, E , V , σ ; |
| ☐ décrire un univers et des événements ; | ☐ reconnaître et exploiter une loi binomiale. |

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Principes de dénombrement

Définition

Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $n \geq 1$ et une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur E ; l'entier n est le **cardinal** de E , noté $\text{card}(E)$, et $\text{card}(\emptyset) = 0$. **Dénombrer** E , c'est calculer $\text{card}(E)$.

Principe de bijection : s'il existe une bijection de E sur F , alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Pour compter les éléments de E , on peut donc compter ceux d'un ensemble F plus simple, « en bijection » avec E .

Théorème (principe additif)

Soit A, B, C des parties d'un ensemble fini E , et $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$ le **complémentaire** de A dans E .

1. Si $A_1, \dots, A_k$ sont **deux à deux disjointes**, alors $\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_k)$.
2. $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ et $\boxed{\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)}$.
3. **Formule du crible** : $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

Démonstration. 1. Pour deux parties disjointes, on numérote les éléments de A_1 , puis ceux de A_2 à la suite ; on conclut par récurrence sur k . 2. E est la réunion disjointe de A et $\bar{A}$. Puis $A \cup B$ est la réunion disjointe de A et de $B \cap \bar{A}$, et B celle de $B \cap \bar{A}$ et de $A \cap B$: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \cap \bar{A}) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. 3. On applique 2 à $A \cup B$ et C , avec $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, puis encore 2 à $A \cap C$ et $B \cap C$, dont l'intersection est $A \cap B \cap C$. $\square$

Théorème (principe multiplicatif)

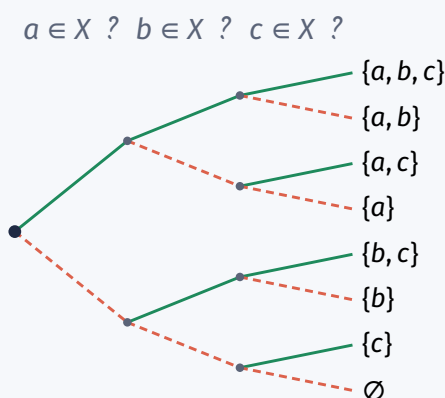
Si E et F sont finis, $\boxed{\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)}$, et plus généralement $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \dots \times \text{card}(E_p)$.

En pratique : si un choix se fait en p étapes successives, avec n_1 possibilités à la 1^{re} étape, puis n_2 à la 2^e **quel que soit** le choix précédent, ..., puis n_p à la dernière, il y a $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ choix en tout. « **Et puis** » : on multiplie ; « **ou** » (cas disjointes) : on additionne.

Démonstration. $E \times F$ est la réunion des parties $\{x\} \times F$ ($x \in E$), deux à deux disjointes, qui ont chacune $\text{card}(F)$ éléments : le principe additif donne $\text{card}(E) \times \text{card}(F)$. On conclut par récurrence sur p . $\square$

Exemple : l'arbre de choix : les parties de $\{a, b, c\}$

Pour former une partie X de $E = \{a, b, c\}$, on décide si $a \in X$ (branche **verte**) ou non (branche **rouge**), **et puis** si $b \in X$, **et puis** si $c \in X$: il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ suites de décisions. Chaque chemin de l'arbre, de la racine à une feuille, donne une partie et une seule, et chaque partie est obtenue : c'est une **bi-jection**. Ainsi $\{a, b, c\}$ a $2^3 = 8$ parties (section 2 : 2^n parties). L'arbre sert à **vérifier** un dénombrement sur un petit cas, ou à en **deviner** la formule.

**Méthode : dénombrer sans se tromper**

- Découper le choix en **étapes** et commencer par l'étape la **plus contrainte** ; si le nombre de choix d'une étape dépend des choix précédents, **séparer en cas disjoints** et additionner.
- Pour « au moins un », « au moins deux »..., compter souvent le **complémentaire** ; pour plusieurs conditions « au moins », utiliser le **crible**.

Exemple : le complémentaire et le crible

- **Codes de 4 chiffres (de 0000 à 9999) contenant au moins un 0 et au moins un 1.** Il y a 10^4 codes (principe multiplicatif). Soit A l'ensemble des codes sans 0 et B celui des codes sans 1 : $\text{card}(A) = \text{card}(B) = 9^4$ et $\text{card}(A \cap B) = 8^4$. Les codes cherchés forment $\overline{A \cap B}$:

$$10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 10\,000 - 13\,122 + 4\,096 = \boxed{974}.$$

- **Mots de 5 lettres écrits avec a, b, c et utilisant les trois lettres.** Il y a $3^5 = 243$ mots. Soit A, B, C les ensembles de mots sans a , sans b , sans c : chacun a $2^5 = 32$ éléments, l'intersection de deux d'entre eux a un seul élément (par exemple $A \cap B = \{ccccc\}$), et $A \cap B \cap C = \emptyset$. Par le crible, $\text{card}(A \cup B \cup C) = 3 \times 32 - 3 \times 1 + 0 = 93$, donc il y a $243 - 93 = \boxed{150}$ mots.

2**Arrangements et permutations**

Dans cette section, E est un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et $p \in \mathbb{N}^*$.

Théorème (p -listes)

Une p -liste d'éléments de E est une suite **ordonnée** $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E **non nécessairement distincts**. Il y en a $\boxed{n^p}$ (c'est $\text{card}(E^p)$).

Conséquences : il y a n^p **applications** d'un ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$ dans E (l'application f s'identifie à la liste $(f(a_1), \dots, f(a_p))$) ; un ensemble à n éléments possède $\boxed{2^n}$ parties.

Démonstration. Principe multiplicatif : n choix pour chacune des p places. Si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, l'application qui, à une partie X de E , associe la liste $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_i = 1$ si $e_i \in X$ et $\varepsilon_i = 0$ sinon,

est une bijection sur $\{0, 1\}^n$ (on retrouve $X = \{e_i, \varepsilon_i = 1\}$) : il y a autant de parties que de n -listes de $\{0, 1\}$, soit 2^n . $\square$

Théorème (arrangements, permutations)

Pour $1 \leq p \leq n$, un **arrangement** de p éléments de E est une p -liste d'éléments **deux à deux distincts**. Leur nombre est

$$A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (p \text{ facteurs décroissants à partir de } n).$$

C'est aussi le nombre d'applications **injectives** d'un ensemble à p éléments dans E (il n'y en a aucune si $p > n$). Une **permutation** de E est un arrangement de ses n éléments, c'est-à-dire une bijection de E sur E : il y en a $n!$. La convention $0! = 1$ prolonge la formule $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ au cas $p = n$.

Démonstration. On choisit x_1 : n possibilités ; puis $x_2 \neq x_1$: $n-1$ possibilités, quel que soit x_1 ; ... ; puis x_p , distinct des $p-1$ éléments déjà choisis : $n-p+1$ possibilités. Le principe multiplicatif donne le produit, et $n! = n(n-1) \cdots (n-p+1) \times (n-p)!$. $\square$

Exemple : des chiffres, une table ronde

- **Nombres de 5 chiffres distincts écrits avec 1, 2, ..., 7 :** $A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$.
Les pairs : on commence par l'étape la plus contrainte, le chiffre des unités (2, 4 ou 6) ; les 4 autres chiffres forment ensuite un arrangement de 4 des 6 chiffres restants : $3 \times A_6^4 = 3 \times 360 = 1080$.
- **Une table ronde.** 6 personnes s'assoient autour d'une table ronde ; deux dispositions qui se déduisent l'une de l'autre par une rotation sont identiques. On place la personne A n'importe où (cela fixe la rotation), puis on range les 5 autres dans les places lues à partir de A : $5! = 120$ dispositions. Avec A et B voisins : B à droite ou à gauche de A, puis les 4 autres : $2 \times 4! = 48$.

Théorème (permutations avec répétition : les anagrammes)

Le nombre de façons d'aligner n objets, dont n_1 sont identiques d'un premier type, n_2 identiques d'un deuxième type, ..., n_k identiques d'un k^{e} type ($n_1 + \cdots + n_k = n$), est $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

Démonstration. Rendons les objets distincts en numérotant ceux de chaque type : on obtient $n!$ alignements. L'application « effacer les numéros » envoie ces alignements sur les mots cherchés, et chaque mot est l'image d'exactly $n_1! n_2! \cdots n_k!$ alignements (on permute les numéros à l'intérieur de chaque type : principe multiplicatif). Si N est le nombre de mots, $N \times n_1! \cdots n_k! = n!$. C'est le « **lemme des bergers** » : pour compter les moutons, on compte les pattes et on divise par 4. $\square$

Exemple : les anagrammes de ESSAOUIRA

Le mot a 9 lettres, dont deux S et deux A, les autres étant distinctes : $\frac{9!}{2! 2!} = \frac{362\,880}{4} = 90\,720$ anagrammes.

- **Les deux S côte à côte :** on colle les deux S en un bloc « SS », puis on aligne 8 objets dont

deux A identiques : $\frac{8!}{2!} = 20\,160$.

- **Les mots commençant par E et finissant par A** : on aligne les 7 lettres restantes S, S, A, O, U, I, R : $\frac{7!}{2!} = 2520$.

3

Combinaisons et binôme

Théorème (combinaisons)

Soit $0 \leq p \leq n$. Une **combinaison** de p éléments de E (où $\text{card}(E) = n$) est une **partie** de E à p éléments : il n'y a ni ordre, ni répétition. Leur nombre est

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}.$$

Démonstration. Pour $p \geq 1$, l'application qui, à un arrangement $(x_1, \dots, x_p)$, associe la partie $\{x_1, \dots, x_p\}$ envoie les A_n^p arrangements sur les combinaisons, et chaque combinaison est l'image des $p!$ façons d'ordonner ses éléments : $A_n^p = p! \times C_n^p$. Pour $p = 0$, seule $\emptyset$ convient : $C_n^0 = 1 = \frac{n!}{0!n!}$. $\square$

Remarque. On rencontre aussi la notation $\binom{n}{p}$ (« p parmi n ») : dans ce livret, on écrit C_n^p , et l'on pose $C_n^p = 0$ si $p > n$. Comme C_n^p compte des parties, **c'est un entier** : le produit de p entiers consécutifs est toujours divisible par $p!$. Calcul à la main : $C_{12}^4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$.

Propriétés des C_n^p

Pour $0 \leq p \leq n$: $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, et

1. **symétrie** : $C_n^{n-p} = C_n^p$;

2. **formule de Pascal** : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ pour $1 \leq p \leq n-1$;

3. **formule « du capitaine »** : $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n$.

Démonstration (en comptant ; on peut aussi calculer). 1. $X \mapsto \bar{X}$ est une bijection des parties à p éléments sur les parties à $n-p$ éléments. 2. Fixons $a \in E$. Les parties à p éléments qui **contiennent** a s'obtiennent en complétant $\{a\}$ par $p-1$ des $n-1$ autres éléments : il y en a C_{n-1}^{p-1} ; celles qui **ne contiennent pas** a sont les parties à p éléments de $E \setminus \{a\}$: il y en a C_{n-1}^p . Par le calcul : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \times \frac{n}{p(n-p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. 3. Formons une équipe de p joueurs parmi n , avec un capitaine : on choisit l'équipe puis son capitaine ($C_n^p \times p$ façons), ou bien le capitaine puis ses $p-1$ coéquipiers ($n \times C_{n-1}^{p-1}$ façons). $\square$

: on obtient $6 \times 2 = \boxed{12} = \frac{4!}{2!1!1!}$, le nombre d'anagrammes de $xyyz$ (on choisit dans quels facteurs on prend x , y et z).

4

Les tirages

Une urne contient n boules **indiscernables au toucher** (on les imagine numérotées : elles sont distinctes) ; on en tire p . Le modèle mathématique d'un tirage dépend de la façon de tirer : c'est le tableau clé du chapitre.

On tire p boules parmi n ...	ordre ?	répétition ?	un tirage est...	nombre de tirages
simultanément (une poignée)	non	non	une partie à p éléments	C_n^p
successivement sans remise	oui	non	un arrangement	A_n^p ($p \leq n$)
successivement avec remise	oui	oui	une p -liste	n^p

Exemple : l'urne « fil rouge » U : 4 blanches, 3 rouges, 2 noires

On tire 3 boules de U (9 boules). On compte les tirages formés d'une boule de **chaque couleur**, puis ceux de **trois boules de même couleur**.

	tous les tirages	une boule de chaque couleur	trois boules de même couleur
simultané	$C_9^3 = 84$	$4 \times 3 \times 2 = 24 \quad \left(\frac{24}{84} = \frac{2}{7}\right)$	$C_4^3 + C_3^3 = 5 \quad \left(\frac{5}{84}\right)$
sans remise	$A_9^3 = 504$	$3! \times 4 \times 3 \times 2 = 144 \quad \left(\frac{2}{7}\right)$	$A_4^3 + A_3^3 = 30 \quad \left(\frac{5}{84}\right)$
avec remise	$9^3 = 729$	$3! \times 4 \times 3 \times 2 = 144 \quad \left(\frac{16}{81}\right)$	$4^3 + 3^3 + 2^3 = 99 \quad \left(\frac{11}{81}\right)$

Le facteur $3!$ compte les **ordres** possibles des trois couleurs (BRN, BNR, ...) : dans un tirage successif, il faut choisir les **places**. Les proportions (entre parenthèses) sont les mêmes pour le tirage simultané et le tirage sans remise : chaque tirage simultané correspond à exactement $3!$ tirages ordonnés, **favorables ou non ensemble** ; le tirage avec remise, lui, donne d'autres proportions.

Méthode : « exactement k », « au moins k »

- **Simultané** : on multiplie les combinaisons de chaque catégorie. Exactement 2 blanches : $C_4^2 \times C_5^1 = 30$.
- **Successif** : on choisit d'abord les **places** des blanches (C_3^2 façons), puis on remplit les places. Sans remise : $C_3^2 \times A_4^2 \times A_5^1 = 3 \times 12 \times 5 = 180$; avec remise : $C_3^2 \times 4^2 \times 5 = 240$.
- **Au moins** : par cas disjoints, ou par le complémentaire. Au moins une blanche (simultané) : $C_9^3 - C_3^3 = 84 - 10 = 74$, ou $C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1 + C_4^3 = 40 + 30 + 4 = 74$.

5

Vocabulaire des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît les résultats possibles, appelés **issues** (ou éventualités), sans pouvoir prévoir lequel se produira. L'ensemble des issues est l'**univers**, noté Ω ; dans ce chapitre, Ω est **fini**. Un **événement** est une partie de Ω ; il est **réalisé** si l'issue obtenue lui appartient.

Exemple fil rouge : on lance trois fois une pièce ; $\Omega = \{P, F\}^3 = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ (8 issues), A : « au moins deux Pile » = $\{PPP, PPF, PFP, FPP\}$, B : « le 1^{er} lancer donne Face » = $\{FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

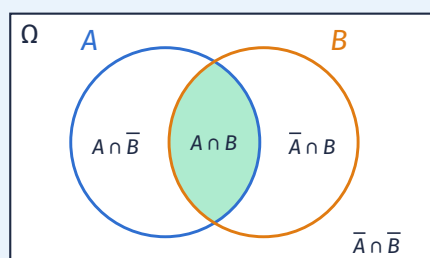
Langage probabiliste	Notation	Sur l'exemple
événement élémentaire	$\{\omega\}$	$\{FFF\}$: « trois Face »
événement certain / impossible	Ω / $\emptyset$	« au plus trois Pile » / « quatre Pile »
A et B (les deux sont réalisés)	$A \cap B$	$\{FPP\}$
A ou B (au moins l'un des deux)	$A \cup B$	toutes les issues sauf PFF
événement contraire de A	$\bar{A}$	« au plus un Pile » = $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$
T implique A	$T \subset A$	T : « trois Pile » = $\{PPP\}$
A et Z incompatibles	$A \cap Z = \emptyset$	Z : « trois Face » = $\{FFF\}$

Règles de calcul sur les événements

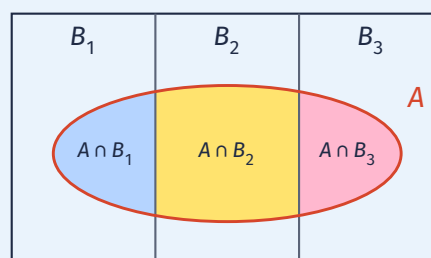
Lois de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (« ni A ni B ») et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. **Distributivité** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Définition : système complet d'événements

Des événements $B_1, \dots, B_n$ forment un **système complet** (une partition de Ω) s'ils sont non vides, **deux à deux incompatibles**, et si leur réunion est Ω : à chaque expérience, **un et un seul** d'entre eux est réalisé. Exemples : $\{A, \bar{A}\}$ (si $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$) ; sur l'exemple, les événements N_k : « exactement k Pile », $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.



deux événements : quatre zones



un système complet découpe A

6

Probabilité sur un univers fini

Définition

Une **probabilité** sur l'univers fini Ω est une application P qui, à tout événement A , associe un réel $P(A) \in [0, 1]$, de sorte que

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset \quad (\text{additivité}).$$

Théorème (une probabilité est définie par les issues)

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Si P est une probabilité sur Ω et $p_i = P(\{\omega_i\})$, alors $p_i \geq 0$, $p_1 + \dots + p_n = 1$

et, pour tout événement A , $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Réciproquement, des réels $p_1, \dots, p_n$ positifs, de somme 1, définissent ainsi une unique probabilité sur Ω .

Démonstration. A est la réunion disjointe des singletons $\{\omega_i\}$, $\omega_i \in A$: l'additivité, étendue à plusieurs événements par récurrence, donne $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$; avec $A = \Omega$, la somme des p_i vaut 1. Réciproquement, la formule définit $P(A) \in [0, 1]$, avec $P(\Omega) = 1$, et si $A \cap B = \emptyset$, la somme sur $A \cup B$ se coupe en une somme sur A et une somme sur B . $\square$

Théorème (règles de calcul)

Pour tous événements A, B, C :

1. $P(\emptyset) = 0$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
2. si $A \subset B$, alors $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A)$, donc $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Démonstration. 1. Ω est la réunion disjointe de A et $\bar{A}$: $1 = P(A) + P(\bar{A})$; avec $A = \Omega$, on obtient $P(\emptyset) = 0$. 2. B est la réunion disjointe de A et de $B \cap \bar{A}$, et $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$. 3 et 4 : on reprend mot pour mot les découpages de la section 1, en remplaçant card par P . $\square$

Théorème (équiprobabilité)

Si toutes les issues ont la même probabilité, chacune a la probabilité $\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$ et, pour tout événement A ,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Démonstration. Si $p_i = p$ pour tout i , alors $np = 1$, donc $p = \frac{1}{n}$, puis $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n}$. $\square$

Remarque. Les mots « au hasard », « équilibré », « indiscernables au toucher » signalent l'équiprobabilité **dans un univers bien choisi** : on décrit précisément une issue (partie, arrangement, liste...), puis on compte. Pour un événement qui ne dépend pas de l'ordre, tirages ordonnés ou non donnent la même probabilité (section 4).

Exemple : quatre calculs

- **L'urne U** (section 4), tirage simultané de 3 boules : 84 tirages équiprobables, $P(\text{« une boule de chaque couleur »}) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$, $P(\text{« au moins une blanche »}) = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$.
- **Une anagramme de ESSAOUIRA écrite au hasard** : $P(\text{« les deux S sont côte à côte »}) = \frac{20\,160}{90\,720} = \frac{2}{9}$. **Avec un univers plus simple** : seules comptent les places des deux S, soit une partie à 2 éléments de $\{1, \dots, 9\}$ ($C_9^2 = 36$ cas équiprobables), dont 8 sont formées de deux places voisines : $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
- **Un comité de 4 personnes** est tiré au sort parmi 6 femmes et 5 hommes ($C_{11}^4 = 330$ comités équiprobables). Il est mixte, sauf s'il est formé de 4 femmes ou de 4 hommes : $P(\text{« mixte »}) = 1 - \frac{C_6^4 + C_5^4}{330} = 1 - \frac{20}{330} = \frac{31}{33}$.
- **Sans équiprobabilité**. Un dé est truqué de sorte que $P(\{k\}) = c \times 2^k$ pour $k \in \{1, \dots, 6\}$. Comme $c(2 + 4 + \dots + 64) = 126c = 1$, $c = \frac{1}{126}$, et $P(\text{« pair »}) = \frac{4 + 16 + 64}{126} = \frac{2}{3}$ (et non $\frac{1}{2}$).

7

Probabilités conditionnelles**Définition**

Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. La **probabilité de A sachant B** est

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(on la note aussi $P(A/B)$).

En situation d'équiprobabilité, $P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$: savoir que B est réalisé revient à prendre B comme nouvel univers.

Théorème

Si $P(B) \neq 0$, l'application $P_B : A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur Ω . Elle vérifie donc toutes les règles de la section 6, par exemple $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.

Démonstration. $A \cap B \subset B$, donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ et $P_B(A) \in [0, 1]$; $P_B(\Omega) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$; si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, les événements $A_1 \cap B$ et $A_2 \cap B$ sont disjoints, de réunion $(A_1 \cup A_2) \cap B$, donc $P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$. $\square$

Exemple : avec les trois lancers de la section 5, $P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{1}{4}$, alors que $P(A) = \frac{1}{2}$: savoir que le premier lancer a donné Face diminue la probabilité d'obtenir au moins deux Pile.

Théorème (probabilités composées)

Si $P(A) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_B(B)$. Plus généralement, si $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Démonstration. La première égalité est la définition. Les événements $A_1 \cap \dots \cap A_k$ ($k < n$) contiennent $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$, donc sont de probabilité non nulle, et le produit est **télescopique** :

$$P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \dots \times \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \quad \square$$

Exemple : le trousseau de clés

Un gardien a 5 clés, dont une seule ouvre la porte. Il les essaie au hasard, l'une après l'autre, en mettant de côté chaque clé qui ne convient pas. Soit E_i : « le i -ième essai échoue » et $k \in \{2, \dots, 5\}$. La porte s'ouvre au k -ième essai si les $k-1$ premiers échouent, puis si le k -ième réussit ; avant le i -ième essai, il reste $6-i$ clés, dont la bonne :

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{6-k}{7-k} \times \frac{1}{6-k} = \frac{1}{5} \quad (\text{produit télescopique}),$$

et cette probabilité vaut aussi $\frac{1}{5}$ pour $k = 1$. Tous les rangs sont **également probables** : c'était prévisible, car l'ordre des essais est une permutation au hasard des 5 clés, et la bonne clé a autant de chances d'occuper chacune des 5 places.

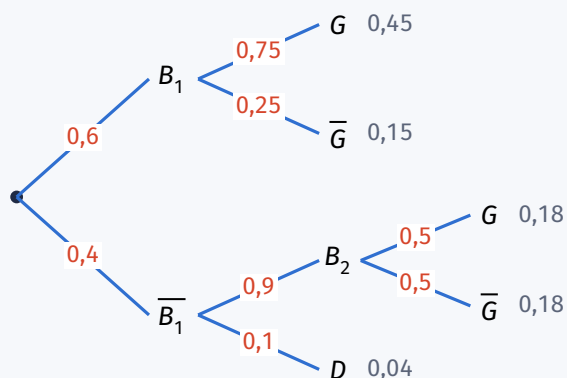
Les règles de l'arbre pondéré

Chaque branche porte la probabilité de l'événement auquel elle mène, **sachant** le chemin déjà parcouru : au premier niveau $P(A)$, au second $P_A(B)$, etc.

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 (car P_A est une probabilité).
2. La probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités de ses branches (probabilités composées).
3. La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent (ces chemins sont deux à deux incompatibles).

Exemple : le service au tennis : un arbre de profondeur inégale

Un joueur réussit sa 1^{re} balle de service (B_1) avec la probabilité 0,6 ; il gagne alors le point (G) avec la probabilité 0,75. S'il la manque, il réussit sa 2^e balle (B_2) avec la probabilité 0,9 et gagne alors le point avec la probabilité 0,5 ; s'il la manque aussi (double faute D), il perd le point.



En gris, les probabilités des chemins ; contrôle : $0,45 + 0,15 + 0,18 + 0,18 + 0,04 = 1$ ✓.

Le point est gagné par deux chemins :

$$P(G) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,9 \times 0,5 = 0,63.$$

Sachant que le point est gagné, la 1^{re} balle était bonne avec la probabilité

$$P_{G}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{0,45}{0,63} = \frac{5}{7}.$$

C'est la formule de Bayes de la section 8.

8

Probabilités totales et Bayes

Théorème (formule des probabilités totales)

Soit $(B_1, \dots, B_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A) ; \quad \text{en particulier} \quad P(A) = P(B) P_B(A) + P(\bar{B}) P_{\bar{B}}(A).$$

Démonstration. $A = A \cap \Omega = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ (distributivité), et les $A \cap B_i$ sont deux à deux disjoints, car contenus dans les B_i (figure de la section 5) : on applique l'additivité, puis les probabilités composées. Sur un arbre, on additionne les chemins qui mènent à A . $\square$

Théorème (formule de Bayes)

Avec les mêmes hypothèses, si $P(A) \neq 0$, alors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)}.$$

Démonstration. $P_A(B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$: on écrit le numérateur avec les probabilités composées et le dénominateur avec la formule des probabilités totales. $\square$

La formule de Bayes « remonte » l'arbre : elle donne la probabilité d'une **cause** B_k sachant l'**effet** observé A .

Exemple : un test de dépistage

Une maladie touche 1 % d'une population. Un test est positif chez 99 % des malades, mais aussi chez 2 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard ; M : « elle est malade », T : « son test est positif ». Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(T) = 0,99$ et $P_{\bar{M}}(T) = 0,02$.

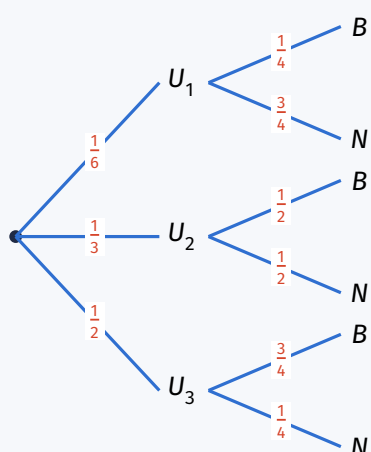
$$P(T) = 0,01 \times 0,99 + 0,99 \times 0,02 = 0,0297 \quad \text{puis (Bayes)} \quad P_T(M) = \frac{0,01 \times 0,99}{0,0297} = \frac{1}{3}.$$

Un test « fiable à 99 % » ne donne donc qu'une **chance sur trois** d'être malade ! Le tableau des effectifs attendus sur 10 000 personnes l'explique : les faux positifs (198) sont deux fois plus nombreux que les vrais positifs (99), car la maladie est rare.

	T	$\bar{T}$	total
M	99	1	100
$\bar{M}$	198	9702	9900
total	297	9703	10 000

Un second test, indépendant du premier sachant l'état de santé, est lui aussi positif : on remplace 0,99 par $0,99^2$ et 0,02 par $0,02^2$:

$$P = \frac{0,01 \times 0,99^2}{0,01 \times 0,99^2 + 0,99 \times 0,02^2} = \frac{0,0099}{0,0099 + 0,0004} = \frac{99}{103} \approx 0,961.$$

Exemple : trois urnes et un dé

On lance un dé équilibré. Sur 1, on tire une boule dans l'urne U_1 (1 blanche, 3 noires) ; sur 2 ou 3, dans U_2 (2 blanches, 2 noires) ; sinon, dans U_3 (3 blanches, 1 noire). (U_1, U_2, U_3) est un système complet :

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1+4+9}{24} = \frac{7}{12}.$$

La boule tirée est blanche : d'où vient-elle ?

$$P_B(U_3) = \frac{P(U_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{9/24}{14/24} = \frac{9}{14} ;$$

de même $P_B(U_2) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ et $P_B(U_1) = \frac{1}{14}$ (somme : 1).

9

Indépendance, épreuves répétées**Définition**

Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Si $P(B) \neq 0$, cela équivaut à $P_B(A) = P(A)$: savoir que B est réalisé ne modifie pas la probabilité de A .

Plus généralement, $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si, pour **toute** sous-famille $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ ($2 \leq k \leq n$, indices distincts), $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$. Pour trois événements : les trois égalités « deux à deux » et $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Théorème

Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi. $\emptyset$ et Ω sont indépendants de tout événement.

Démonstration. A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$. En échangeant les rôles de A et B , puis en appliquant ce résultat au couple indépendant $(\bar{A}, B)$, on obtient les deux autres. Enfin $P(A \cap \emptyset) = 0 = P(A)P(\emptyset)$ et $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)$. $\square$

Exemple : deux à deux ne suffit pas ; une indépendance arithmétique

- On lance deux pièces équilibrées : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$, équiprobable. Soit A : « la 1^{re} donne Pile », B : « la 2^e donne Pile », C : « les deux pièces donnent la même face ». Chacun a la probabilité $\frac{1}{2}$ et $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{PP\}$, de probabilité $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$: ils sont **deux à deux** indépendants. Mais $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: ils ne sont **pas mutuellement** indépendants (si A et B sont réalisés, C l'est forcément).
- On choisit au hasard un entier N entre 1 et 60 ; Q : « $4 \mid N$ », T : « $3 \mid N$ », K : « $5 \mid N$ » ont pour probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$. Comme 4, 3, 5 sont premiers entre eux deux à deux, $Q \cap T$ est « $12 \mid N$ », de probabilité $\frac{5}{60} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; de même $P(Q \cap K) = \frac{3}{60}$, $P(T \cap K) = \frac{4}{60}$ et $P(Q \cap T \cap K) = \frac{1}{60} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$: ils sont mutuellement indépendants. Entre 1 et 50, en

$$\text{revanche, } P(Q \cap T) = \frac{4}{50} \neq \frac{12}{50} \times \frac{16}{50}.$$

Théorème (épreuves répétées indépendantes)

On répète n fois la même épreuve, dans les mêmes conditions et de façon **indépendante** : un résultat est une n -liste d'issues, dont la probabilité est le **produit** des probabilités des issues. Si, à chaque épreuve, un événement S (le « succès ») a la probabilité p , la probabilité d'obtenir **exactement** k succès ($0 \leq k \leq n$) est

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration. Un résultat donné comportant k succès et $n - k$ échecs (par exemple $\bar{S}\bar{S}S\bar{S}\dots$) a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (produit). Ces résultats sont deux à deux incompatibles, et il y en a autant que de façons de choisir les k rangs des succès parmi les n rangs, soit C_n^k : on additionne.

□

Exemple : des lancers francs

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,8, indépendamment des autres ; il en tente 5.

- Exactement 4 réussites : $C_5^4 \times 0,8^4 \times 0,2 = 5 \times 0,4096 \times 0,2 = 0,4096$.
- Au moins un échec : le contraire est « 5 réussites », d'où $1 - 0,8^5 = 1 - 0,32768 = 0,67232$.
- En n lancers, $P(\text{« au moins un échec »}) = 1 - 0,8^n \geq 0,99 \iff 0,8^n \leq 0,01 \iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ (on a divisé par $\ln 0,8 < 0$) : il faut au moins 21 lancers.

10

Variables aléatoires

Définition

Une **variable aléatoire** (réelle) sur l'univers fini Ω est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; elle prend un nombre fini de valeurs $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$, avec $x_1 < \dots < x_r$. On note $(X = x_i)$ l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}$, et de même $(X \leq x)$, $(a < X \leq b)$...

La **loi de probabilité** de X est la donnée des $p_i = P(X = x_i)$. Les événements $(X = x_1), \dots, (X = x_r)$ forment un système complet, donc $p_1 + \dots + p_r = 1$.

La **fonction de répartition** de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés de la fonction de répartition

$F(x) = 0$ si $x < x_1$; $F(x) = p_1 + \dots + p_i$ si $x_i \leq x < x_{i+1}$; $F(x) = 1$ si $x \geq x_r$. Ainsi F est **croissante et en escalier** ; en chaque x_i , elle fait un saut de hauteur p_i . Pour $a < b$: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ et $P(X > a) = 1 - F(a)$.

Démonstration. $(X \leq x)$ est la réunion disjointe des $(X = x_i)$ pour $x_i \leq x$; si $x \leq y$, alors $(X \leq x) \subset (X \leq y)$; enfin $(X \leq b)$ est la réunion disjointe de $(X \leq a)$ et de $(a < X \leq b)$. □

Définition : espérance, variance, écart-type

$$E(X) = \sum_{i=1}^r x_i p_i \quad V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - E(X))^2 \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

$E(X)$ est la **moyenne** des valeurs pondérées par leurs probabilités ; $V(X) \geq 0$ et $\sigma(X)$ mesurent la **dispersion** des valeurs autour de $E(X)$. Si X est le gain algébrique d'un jeu, le jeu est **équitable** lorsque $E(X) = 0$.

Théorème

Pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

La deuxième égalité est la formule de **König-Huygens** ; la troisième donne $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

Démonstration. Si $a \neq 0$, $aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les probabilités p_i (si $a = 0$, c'est immédiat), donc $E(aX + b) = a \sum x_i p_i + b \sum p_i = aE(X) + b$. De même $E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (si deux valeurs x_i^2 coïncident, on regroupe leurs probabilités). Avec $m = E(X)$: $V(X) = \sum p_i (x_i^2 - 2mx_i + m^2) = E(X^2) - 2m \times m + m^2 \times 1 = E(X^2) - m^2$. Enfin $V(aX + b) = \sum p_i (ax_i + b - (am + b))^2 = a^2 \sum p_i (x_i - m)^2 = a^2 V(X)$. $\square$

Exemple : l'urne U : le nombre de boules blanches

On tire simultanément 3 boules de U (4 blanches, 5 autres) ; X est le nombre de boules blanches obtenues : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $P(X = k) = \frac{C_4^k \times C_5^{3-k}}{C_9^3}$.

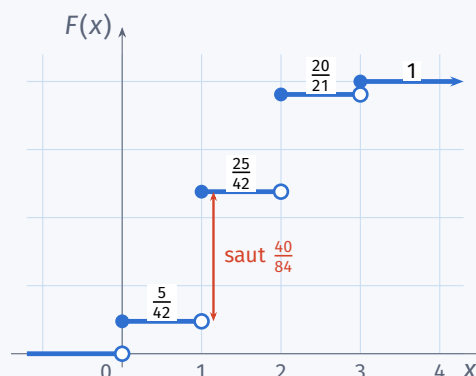
k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

contrôle : $\frac{10 + 40 + 30 + 4}{84} = 1 \checkmark$

$$E(X) = \frac{40 + 60 + 12}{84} = \frac{4}{3}, \quad E(X^2) = \frac{40 + 120 + 36}{84} = \frac{7}{3}, \quad V(X) = \frac{7}{3} - \frac{16}{9} = \frac{5}{9}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75.$$

Fonction de répartition (ci-contre) : $F(x) = 0$ si $x < 0$, $\frac{5}{42}$ sur $[0, 1[$, $\frac{25}{42}$ sur $[1, 2[$, $\frac{20}{21}$ sur $[2, 3[$, 1 si $x \geq 3$. Par exemple, $P(X \geq 2) = 1 - F(1) = \frac{17}{42}$.

Un jeu : on paie 12 DH et l'on reçoit 10 DH par boule blanche. Le gain est $G = 10X - 12$: $E(G) = 10 \times \frac{4}{3} - 12 = \frac{4}{3}$ DH (jeu favorable au joueur), $V(G) = 100 \times \frac{5}{9} = \frac{500}{9}$. Le jeu serait équitable pour une mise de $\frac{40}{3} \approx 13,33$ DH.



11 La loi binomiale

Définition : schéma de Bernoulli, loi binomiale

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ a deux issues : le succès S , de probabilité p , et l'échec, de probabilité $q = 1 - p$. Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et **indépendantes**. Le **nombre X de succès** suit alors la **loi binomiale** $B(n, p)$:

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n) \quad (\text{section 9}).$$

Contrôle : $\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$ (binôme).

Théorème

Si X suit la loi $B(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration. Avec la formule du capitaine $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ ($k \geq 1$), puis le binôme :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np (p + q)^{n-1} = np.$$

En appliquant deux fois la formule du capitaine, $k(k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}$ pour $k \geq 2$; donc, si $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) P(X = k) = n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1) p^2.$$

Ainsi $E(X^2) = \sum k(k-1) P(X = k) + \sum k P(X = k) = n(n-1) p^2 + np$, et $V(X) = n(n-1) p^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1 - p)$; pour $n = 1$, on vérifie directement : $E(X^2) = p$ et $V(X) = p - p^2$. $\square$

Méthode : reconnaître une loi binomiale

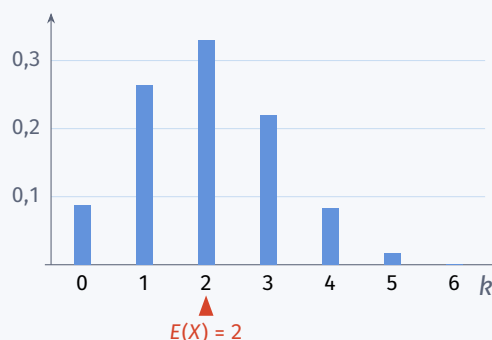
Rédaction type : on répète n fois, de manière **indépendante**, une même épreuve à **deux issues** dont le succès (à préciser) a la probabilité p ; X **compte** les succès ; donc X suit la loi $B(n, p)$. Indices : lancers successifs, tirages **avec remise**, réponses au hasard.

Exemple : six tirages avec remise dans U

On tire successivement, avec remise, 6 boules de U (4 blanches, 3 rouges, 2 noires) ; X est le nombre de boules rouges. Chaque tirage donne une rouge avec la probabilité $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, et les tirages sont indépendants : X suit la loi $B(6, \frac{1}{3})$, $P(X = k) = C_6^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} = \frac{C_6^k 2^{6-k}}{729}$.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{64}{729}$	$\frac{192}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{160}{729}$	$\frac{60}{729}$	$\frac{12}{729}$	$\frac{1}{729}$

- $E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$, $V(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $\sigma(X) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$;
- la valeur la plus probable est $k = 2$ (le plus haut bâton), qui est ici égale à $E(X)$;
- au moins deux rouges : $P(X \geq 2) = 1 - \frac{64+192}{729} = \frac{473}{729} \approx 0,649$.



Attention, piège !

Des tirages **sans remise** ne sont pas indépendants : le nombre Y de boules rouges parmi 6 boules tirées **simultanément** (ou successivement sans remise) dans U ne suit pas une loi binomiale. Par exemple, $P(Y = 3) = \frac{C_3^3 \times C_6^3}{C_9^6} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$, alors que $P(X = 3) = \frac{160}{729}$.

12

Les pièges classiques

× Faux	✓ Vrai
« 3 boules tirées simultanément : $\text{card}(\Omega) = A_9^3$ »	pas d'ordre : $C_9^3 = 84$; $A_9^3 = 504$ compte les tirages successifs sans remise
« au moins une blanche : $C_4^1 \times C_8^2 = 112$ tirages »	des tirages sont comptés plusieurs fois ($112 > 84$!) : $C_9^3 - C_5^3 = 74$
« ESSAQUIRA a 9! anagrammes »	deux S et deux A : $\frac{9!}{2!2!} = 90\,720$
« 6 personnes autour d'une table ronde : 6! dispositions »	à une rotation près : $5! = 120$
« $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ »	c'est A_n^p ; $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
« $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ »	seulement si les événements sont deux à deux incompatibles ; sinon, formule du crible
« $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ »	De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (« ni A ni B »)
« $P_M(T) = 0,99$, donc $P_T(M) = 0,99$ »	on inverse le conditionnement par Bayes : $P_T(M) = \frac{1}{3}$
« $P_B(A) + P_{\overline{B}}(A) = 1$ »	$P_B(A) + P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 1$ (même condition) ; $P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)$
« deux à deux indépendants $\Rightarrow$ mutuellement indépendants »	deux pièces : A, B, C de la section 9
« incompatibles $\Rightarrow$ indépendants »	si $A \cap B = \emptyset$ et $P(A)P(B) \neq 0$: $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$
« n tirages sans remise : le nombre de rouges suit $B(n, p)$ »	les tirages ne sont pas indépendants : la loi binomiale exige la remise

« $P(\text{au moins un succès en } n \text{ épreuves}) = np$ »	$1 - (1 - p)^n$ (np peut dépasser 1 : $5 \times 0,8 = 4$!)
« $V(aX + b) = aV(X) + b$ »	$V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = a \sigma(X)$
« $P(X < b) = F(b)$ »	$F(b) = P(X \leq b)$, donc $P(X < b) = F(b) - P(X = b)$

13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : « au moins deux » : le contraire, et le paradoxe des anniversaires

Dans un groupe de n personnes ($n \leq 365$; on ignore le 29 février et on suppose les 365 dates équiprobables et indépendantes), les anniversaires forment une n -liste de dates : 365^n cas équiprobables. Le contraire de « au moins deux personnes ont le même anniversaire » est « les n dates sont distinctes » (A_{365}^n cas favorables). Comme $0 \leq 1 - x \leq e^{-x}$ pour $x \in [0, 1]$ (la tangente en 0 à la courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est sous la courbe) :

$$p_n = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \geq 1 - \prod_{k=0}^{n-1} e^{-k/365} = 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}.$$

Pour $n = 23$: $\frac{23 \times 22}{730} = \frac{506}{730} \approx 0,6932 > \ln 2 \approx 0,6931$, donc $p_{23} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$! Et pour une classe de 30 élèves : $p_{30} \approx 0,706$.

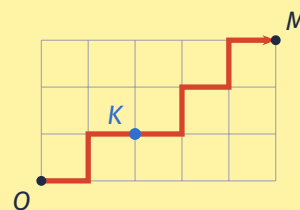
★ Astuce de concours : penser à la symétrie

A lance $n + 1$ pièces équilibrées et B en lance n , toutes indépendantes. Quelle est la probabilité que A obtienne plus de Pile que B ? Soit a et b les nombres de Pile de A et de B ; A a $n + 1 - a$ Face et B en a $n - b$. Or $n + 1 - a > n - b \iff a < b + 1 \iff a \leq b$: **exactement un** des événements « A a plus de Pile que B » et « A a plus de Face que B » est réalisé. En échangeant les rôles de Pile et Face, qui ont la même probabilité, ces deux événements ont la même probabilité : chacun a la probabilité $\boxed{\frac{1}{2}}$, sans aucun calcul !

★ Astuce de concours : les chemins sur un quadrillage

Un chemin de $O(0, 0)$ à $M(5, 3)$, par pas unitaires vers la droite (D) ou vers le haut (H), est un mot de 8 lettres formé de 5 lettres D et 3 lettres H ; il est déterminé par les **places** des 3 lettres H : $C_8^3 = 56$ chemins. De $(0, 0)$ à (m, n) : C_{m+n}^n chemins. **Passer par un point** : principe multiplicatif. Par $K(2, 1)$: $C_3^1 \times C_5^2 = 3 \times 10 = 30$ chemins, donc $56 - 30 = 26$ chemins évitent K.

Dans l'espace, de $(0, 0, 0)$ à $(2, 2, 2)$ par pas unitaires suivant les axes : ce sont les anagrammes de $xxxyzz$, soit $\frac{6!}{2! 2! 2!} = 90$ chemins.



★ *Astuce de concours : la formule de Vandermonde*

Pour $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq a + b$ (avec $C_m^j = 0$ si $j > m$) :

$$\sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n.$$

En comptant : une urne contient a boules blanches et b noires ; on classe les C_{a+b}^n tirages simultanés de n boules selon le nombre k de blanches. **Par les polynômes :** on identifie le coefficient de x^n dans $(1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$.

Conséquences : la loi du nombre de boules blanches (section 10) a bien une somme égale à 1 ; avec $a = b = n$ et la symétrie, $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$, par exemple $1+25+100+100+25+1 = 252 = C_{10}^5$.

★ *Astuce de concours : dériver ou intégrer le binôme*

Pour tout réel x , $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)^n$. En dérivant, puis en intégrant sur $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}, \text{ d'où } \sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}; \quad \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Interprétation : une partie choisie au hasard parmi les 2^n parties d'un ensemble à n éléments a , en moyenne, $\frac{n 2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$ éléments (son cardinal suit la loi $B(n, \frac{1}{2})$).

★ *Astuce de concours : le binôme et les nombres complexes*

$(1+i)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k$, et $i^{2m} = (-1)^m$: la partie réelle ne contient que les indices pairs. Comme $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$:

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = \operatorname{Re}((1+i)^n) = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}; \quad \text{pour } n = 8 : 1 - 28 + 70 - 28 + 1 = 16 = 2^4 \cos(2\pi).$$

$$\text{De même, } C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

★ *Astuce de concours : une suite de probabilités*

Un jour est ensoleillé ou pluvieux. Après un jour ensoleillé, le lendemain est ensoleillé avec la probabilité 0,8 ; après un jour pluvieux, avec la probabilité 0,4. Soit p_n la probabilité que le jour n soit ensoleillé (S_n). La formule des probabilités totales, avec le système complet $(S_n, \overline{S_n})$, donne

$$p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,4 (1 - p_n) = 0,4 p_n + 0,4.$$

Le point fixe vérifie $\ell = 0,4 \ell + 0,4$, soit $\ell = \frac{2}{3}$, et $p_{n+1} - \frac{2}{3} = 0,4 (p_n - \frac{2}{3})$: la suite $(p_n - \frac{2}{3})$ est géométrique, donc $p_n = \frac{2}{3} + (p_0 - \frac{2}{3}) 0,4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$, quel que soit le temps du jour 0.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Principes de dénombrement

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
 $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$; crible pour 3 parties
 $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$
 « et puis » : $\times$; « ou » (cas disjoints) : $+$

Listes, arrangements, permutations

p -listes : n^p ; nombre de parties : 2^n
 $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
 $n!$ permutations ; $0! = 1$; table ronde : $(n-1)!$
 anagrammes : $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

Combinaisons et binôme

$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^{n-p} = C_n^p$
 Pascal : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$
 capitaine : $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$
 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$
 $\sum_k C_n^k = 2^n$; $\sum_k (-1)^k C_n^k = 0$; $\sum_k k C_n^k = n 2^{n-1}$

Tirer p boules parmi n

simultané : C_n^p ; sans remise : A_n^p ; avec : n^p
 successif : choisir d'abord les **places** (C_p^k)
 « au moins un » : passer au **contraire**

Probabilité sur un univers fini

$P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
 équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Astuces

anniversaires : $p_n = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}$, $p_{23} > \frac{1}{2}$
 chemins de $(0,0)$ à (m,n) : C_{m+n}^n
 Vandermonde : $\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$

Probabilités conditionnelles ($P(B) \neq 0$)

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$
 $P(A \cap B) = P(A) \times P_{A|B}(B)$
 $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1|A_2} (A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}} (A_n)$
 arbre : chemin $\rightarrow \times$; plusieurs chemins $\rightarrow +$

Totales et Bayes ((B_i) système complet)

$P(A) = \sum_i P(B_i) P_{B_i}(A)$
 $P(A) = P(B) P_B(A) + P(\bar{B}) P_{\bar{B}}(A)$
 $P_A(B_k) = \frac{P(B_k) P_{B_k}(A)}{\sum_i P(B_i) P_{B_i}(A)}$

Indépendance

A, B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 alors $\bar{A}$ et B , A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ aussi
 mutuelle : toutes les sous-familles
 k succès en n épreuves : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
 au moins un succès : $1 - (1-p)^n$

Variables aléatoires

$\sum_i p_i = 1$; $F(x) = P(X \leq x)$ (escalier, sauts p_i)
 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
 $E(X) = \sum_i x_i p_i$; $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma = \sqrt{V}$
 $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$
 jeu équitale : $E(G) = 0$

Loi binomiale $B(n, p)$ (schéma de Bernoulli)

$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$
 $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$
 tirages **avec** remise (indépendants) seulement

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations du cours : A_n^p , C_n^p ($C_n^p = 0$ si $p > n$), $P_B(A)$, $B(n, p)$; dés et pièces équilibrés, boules indiscernables.

15

Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Listes et arrangements ★

corrigé p. 43

1. Nombre de tiercés (3 premiers parmi 10 chevaux, sans ex æquo) dans l'ordre ? dans le désordre ?
2. Combien d'entiers de 10 000 à 99 999 ont exactement deux chiffres 7 ? de 1 à 999 999 ont au moins un 7 ?
3. Placements de 8 tours sur un échiquier 8×8 , jamais deux sur une même ligne ou colonne ? toutes sur des cases blanches (case (i, j) blanche $\iff i + j$ impair) ?

Exercice 2 Combinaisons et triangle de Pascal ★

corrigé p. 43

1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ ($n \geq 2$) : a) $C_{n+1}^3 = 4 C_n^2$; b) $A_n^2 + C_n^2 = 84$.
2. Prouver que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{k-p}$ ($p \leq k \leq n$) par le calcul, puis en comptant les choix d'un comité de k personnes parmi n et d'un bureau de p membres du comité ; cas $n = 12$, $k = 5$, $p = 2$.
3. Montrer que $C_n^p + 2 C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$ ($0 \leq p \leq n - 2$) ; vérifier avec $n = 6$, $p = 2$.

Exercice 3 Formule du binôme ★

corrigé p. 43

1. Coefficient de x^3 dans le développement de $(1 + 2x + x^2)^4$?
2. Avec le coefficient de x^n dans $(1 + x)^n(1 - x)^n = (1 - x^2)^n$, montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2$ vaut 0 si n est impair, $(-1)^m C_{2m}^m$ si $n = 2m$.
3. Montrer que 25 divise $6^n - 5n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Quel est le plus grand coefficient du développement de $(1 + 2x)^{10}$? (Comparer deux coefficients consécutifs.)

Exercice 4 Calculer avec une probabilité ★

corrigé p. 44

1. A, B, C sont des événements. Si $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, montrer que $\frac{5}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$ (bornes atteintes ?).
2. Montrer que $P(\text{« un seul de } A, B \text{ »}) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ et $P(\text{« un seul de } A, B, C \text{ »}) = \sum P(A) - 2 \sum P(A \cap B) + 3P(A \cap B \cap C)$.
3. 50 % des habitants lisent le journal A , 40 % B , 30 % C ; 20 % A et B , 15 % A et C , 10 % B et C , 5 % les trois. Probabilité de lire exactement un journal ? au moins un ?

Exercice 5 Mains de poker ★

corrigé p. 44

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 52 (13 hauteurs : 2, ..., 10, valet, dame, roi, as ; 4 couleurs). Nombre de mains ? Probabilité d'avoir : a) un carré (4 cartes de même hauteur) ; b) un full (3 cartes d'une hauteur, 2 d'une autre) ; c) deux paires (et une carte d'une 3^e hauteur) ; d) 5 hauteurs distinctes ; e) au moins un as.

Exercice 6 Un dé, puis des pièces ★

corrigé p. 44

On lance un dé ; s'il indique k , on lance k pièces. D_k : « le dé indique k » ; Z , U : « aucun Pile », « un seul Pile ».

1. Calculer $P_{D_k}(Z)$ et $P_{D_k}(U)$ ($1 \leq k \leq 6$), puis $P(Z)$ et $P(U)$.
2. Calculer $P_Z(D_1)$ et $P_U(D_k)$. Sachant U , quelles sont les valeurs de k les plus probables ?

Exercice 7 Indépendance de plusieurs événements ★

corrigé p. 45

1. On lance un dé à 8 faces ; $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 5, 6, 8\}$. Montrer que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mais que A , B , C ne sont même pas deux à deux indépendants.
2. Montrer que « A est indépendant de lui-même » $\iff P(A) \in \{0, 1\}$. Et si $A \subset B$ avec A , B indépendants ?
3. Trois tireurs réussissent leur tir, indépendamment, avec les probabilités 0,6 ; 0,7 ; 0,8. Loi et espérance du nombre X de tirs réussis ?

Exercice 8 Jusqu'à deux boules de même couleur ★

corrigé p. 45

Une urne contient 2 boules rouges, 2 vertes, 2 bleues. On tire sans remise jusqu'à obtenir une boule de la couleur d'une boule déjà tirée ; X est le nombre de boules tirées.

1. Montrer que $P(X = 2) = \frac{1}{5}$; loi de X , $E(X)$, $V(X)$? Représenter la fonction de répartition de X .
2. On paie 7 DH pour jouer et on reçoit 2 DH par boule tirée. Espérance et variance du gain G ?

16

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Type examen national (1) : urne et variable aléatoire ★★**

corrigé p. 45

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1, 2, 2 et quatre vertes numérotées 0, 1, 1, 2. On tire simultanément deux boules ; A : « même couleur », B : « somme des numéros égale à 2 ».

1. Montrer que $P(A) = \frac{3}{7}$; calculer $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P_A(B)$. A et B sont-ils indépendants ?
2. X est la somme des numéros : loi de X ; montrer que $E(X) = \frac{18}{7}$; $V(X)$, $E(7X - 15)$, $V(7X - 15)$?
3. On répète trois fois l'épreuve (boules remises) ; Y : nombre de réalisations de A . Loi, $P(Y = 1)$, $E(Y)$, $V(Y)$?

Exercice 10 Type examen national (2) : une enquête discrète ★★

corrigé p. 46

Pour estimer la proportion t des élèves qui ont déjà copié en contrôle, chaque élève interrogé lance un dé en cachette : s'il obtient 1 ou 2, il répond « oui » ; sinon il répond sincèrement. On interroge un élève au hasard ; C : « il a déjà copié », O : « il répond oui ».

1. Avec un arbre pondéré, montrer que $P(O) = \frac{1+2t}{3}$. On a obtenu 45 % de « oui » : calculer t si $P(O) = 0,45$.
2. Montrer que $P_O(C) = \frac{3t}{1+2t}$ et la calculer. Et si l'élève a répondu « non » ?
3. Étudier $t \mapsto \frac{3t}{1+2t}$ sur $[0, 1]$. Quand a-t-on $P_O(C) \geq \frac{1}{2}$? Pourquoi un « oui » n'est-il pas un aveu ?

Exercice 11 Type examen national (3) : loi binomiale ★★

corrigé p. 46

On lance deux dés ; on gagne si la somme est un multiple de 4.

1. Montrer que l'on gagne avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On joue 4 parties indépendantes ; X est le nombre de parties gagnées. Loi de X (tableau), $E(X)$, $V(X)$, $P(X \geq 2)$?
2. Une partie coûte 2 DH, une partie gagnée rapporte 6 DH. Exprimer le gain G en fonction de X ; $E(G)$, $V(G)$? Que devrait rapporter une partie gagnée pour que le jeu soit équitable ?
3. Nombre minimal de parties pour gagner au moins une fois avec une probabilité $\geq 0,95$?

Exercice 12 Rouge ou plein ? ★★

corrigé p. 46

Une roulette a 37 cases équiprobables (0 à 36), dont 18 rouges. Pour 1 DH misé, on récupère sa mise et on gagne 1 DH si une case rouge sort (mise sur « rouge »), ou 35 DH si le numéro choisi sort (mise en « plein ») ; sinon on perd sa mise.

1. Loi, espérance et variance du gain G_1 (« rouge ») et du gain G_2 (« plein »). Comparer.
2. On joue 10 parties en « plein », dont N gagnées. Montrer que le gain total est $T = 36N - 10$; $E(T)$, $V(T)$, $P(T > 0)$?
3. Mêmes questions pour 10 parties sur « rouge » (gain T' , probabilité à 10^{-3} près). Commenter.

Exercice 13 Le duel aux dés ★★

corrigé p. 47

À chaque tour, Ali lance un dé : s'il obtient 6, il gagne ; sinon Badr lance deux dés et gagne s'il obtient au moins un 6. Après trois tours sans vainqueur, la partie est nulle. A , B : « Ali gagne », « Badr gagne ».

1. Montrer qu'un tour est sans vainqueur avec la probabilité $r = \frac{125}{216}$, et que $P(A) = \frac{1}{6}(1 + r + r^2)$. Calculer $P(B)$ et la probabilité d'une partie nulle.
2. S'il y a un vainqueur, probabilité que ce soit Ali ? Dépend-elle du nombre maximal de tours ?
3. Si Badr lance k dés ($k \geq 1$), pour quelles valeurs de k Ali a-t-il l'avantage ?

Exercice 14 Le problème de Pepys ★★

corrigé p. 47

En 1693, Pepys demanda à Newton quel est le plus probable : E_1 « au moins un 6 avec 6 dés », E_2 « au moins deux 6 avec 12 dés » ou E_3 « au moins trois 6 avec 18 dés ».

1. On lance n dés ; X_n est le nombre de 6. Loi, espérance, variance de X_n ? $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$ à 10^{-3} près ?
2. Soit $q_n = P(X_n = 1)$. Calculer $\frac{q_{n+1}}{q_n}$; pour quels n la probabilité q_n est-elle maximale ? Valeur ?

Exercice 15 Anagrammes et rangements ★★

corrigé p. 47

1. Nombre d'anagrammes de CASABLANCA ? Pour une anagramme prise au hasard, probabilité : a) qu'elle commence et finisse par A ; b) que les quatre A soient côte à côte ; c) que deux A ne soient jamais voisins.
2. On aligne 4 boules rouges, 3 vertes et 2 bleues (identiques par couleur). Nombre d'alignements ? Probabilité que les bleues soient aux deux bouts ? que chaque couleur soit groupée ?

Exercice 16 Le jeu « couronne et ancre » ★★

corrigé p. 48

On mise 1 DH sur un numéro de 1 à 6 et on lance trois dés. S'il sort sur $k \geq 1$ dés, on récupère la mise et on gagne k DH ; sinon on perd la mise. N : nombre de dés montrant le numéro ; G : gain.

1. Lois de N et de G . Montrer que $E(G) = -\frac{17}{216}$; $\sigma(G)$ à 10^{-2} près ? Retrouver $E(G)$ à partir de $E(N)$.

2. « Trois chances sur six de sortir : une chance sur deux de gagner ! » Calculer $P(G > 0)$; où est l'erreur ?

17

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 Boules et boîtes ★★★

corrigé p. 48

On place au hasard n boules numérotées dans n boîtes numérotées ($n \geq 2$; n^n cas équiprobables).

1. Probabilité qu'aucune boîte ne soit vide ? qu'une seule boîte soit vide (montrer qu'elle vaut $C_n^2 n! / n^n$) ?
2. Cas $n = 4$: V est le nombre de boîtes vides. Montrer que $P(V = 2) = \frac{21}{64}$; loi de V et $E(V)$? Comparer $E(V)$ avec 4 fois la probabilité qu'une boîte donnée soit vide.

Exercice 18 La loi hypergéométrique ★★★

corrigé p. 49

Une urne contient $N \geq 2$ boules dont a blanches ($1 \leq a < N$) ; on en tire simultanément n ; X : nombre de blanches tirées.

1. Justifier que $P(X = k) = \frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n}$, puis que $k C_a^k = a C_{a-1}^{k-1}$ et (Vandermonde) $E(X) = \frac{na}{N}$.
2. Calculer de même $E(X(X-1))$; montrer que $V(X) = n \frac{a}{N} \left(1 - \frac{a}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$.
3. Comparer avec n tirages successifs avec remise. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$ pour l'urne U du cours.

Exercice 19 La grenouille et l'escalier ★★★

corrigé p. 49

Une grenouille, au pied d'un escalier (marche 0), monte par sauts indépendants d'1 ou 2 marches, de probabilité $\frac{1}{2}$ chacun ; p_n : probabilité qu'elle se pose sur la marche n ($p_0 = 1$).

1. Calculer p_1, p_2, p_3 . Montrer que $p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n$ (considérer le dernier saut).
2. Montrer que $(p_{n+1} - p_n)$ est géométrique ; en déduire $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et p_{10} .
3. T est le nombre de sauts pour atteindre ou dépasser la marche 4. Loi de T et $E(T)$?

Exercice 20 Les urnes d'Ehrenfest ★★★

corrigé p. 49

$N \geq 2$ boules numérotées sont réparties dans deux urnes ; à chaque étape, une boule tirée au hasard change d'urne. X_n est le nombre de boules de la première urne après n étapes ; $X_0 = N$.

1. Cas $N = 4$: lois et espérances de X_1, X_2, X_3 .
2. Justifier que $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k-1) = \frac{k}{N}$ et $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = 1 - \frac{k}{N}$, puis que $E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_n) + 1$.
3. En déduire $E(X_n)$ et sa limite quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter.

Exercice 21 Saint-Pétersbourg, version finie ★★★

corrigé p. 50

On lance une pièce au plus n fois, en s'arrêtant au premier Pile. S'il sort au k -ième lancer, la banque verse 2^k DH ; sinon elle ne verse rien. X_n est la somme versée.

1. Loi de X_n ; montrer que $E(X_n) = n$ et $V(X_n) = 2^{n+1} - 2 - n^2$.
2. Le jeu coûte n DH. Pour $n = 20$, probabilité de recevoir plus que sa mise ? Commenter.
3. La banque, limitée à 2^{10} DH ($n = 20$), verse $2^{\min(k,10)}$ DH : montrer que l'espérance vaut $11 - 2^{-10}$.

Exercice 22 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ ★★★

corrigé p. 50

Un pion part de 0 ; à chaque étape, il avance de 1 (probabilité $p \in]0, 1[$) ou recule de 1 (probabilité $q = 1 - p$), indépendamment. S_n est sa position après n étapes et Y_n le nombre de pas en avant.

1. Exprimer S_n en fonction de Y_n ; en déduire $E(S_n)$, $V(S_n)$ et $P(S_n = k)$.
2. Montrer que $P(S_{2m} = 0) \leq u_m = \frac{C_{2m}^m}{4^m}$, avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
3. Si $p = \frac{1}{2}$ et $0 \leq j \leq \frac{m}{2}$, montrer que $P(S_{2m} = 2j) = u_m \prod_{i=1}^j \frac{m-i+1}{m+i} \geq u_m \left(1 - \frac{2j^2}{m}\right)$. En sommant sur les $j \in \mathbb{Z}$ tels que $4j^2 \leq m$, en déduire que $u_m \leq \frac{2}{\sqrt{m-1}}$ ($m \geq 2$), puis $\lim u_m$.

Exercice 23 Répartir les boules au mieux ★★★

corrigé p. 50

On répartit n blanches et n noires ($n \geq 2$) dans deux urnes non vides U_1 (s boules) et U_2 , puis on tire une boule dans une urne prise au hasard ; x, y : proportions de blanches dans U_1, U_2 .

1. Calculer $\pi = P(\text{« blanche »})$ si : a) chaque urne a n boules ; b) U_1 n'a qu'une boule, blanche.
2. Montrer que $\pi = \frac{x+y}{2}$ et $s x + (2n - s) y = n$. Si $s < n$, montrer que $x + y \leq 1 + \frac{n-s}{2n-s}$, puis que $\pi \leq \frac{3n-2}{2(2n-1)}$. Quelle répartition rend π maximale ? Cas $n = 50$.

18

Niveau 4 · Concours**Exercice 24** Chemins et nombres de Catalan ★★★★★

corrigé p. 51

Un chemin est formé de pas $(1, 0)$ ou $(0, 1)$; de O à (m, n) , il y en a C_{m+n}^n . Un chemin de O à (n, n) est *bon* si tous ses points vérifient $y \leq x$.

1. Montrer qu'un chemin de O à (n, n) est mauvais si et seulement s'il a un point sur $\Delta : y = x + 1$.
2. **Réflexion.** Dans un mauvais chemin, on symétrise par rapport à Δ la partie qui précède son premier point sur Δ : montrer que c'est une bijection sur les chemins de $(-1, 1)$ à (n, n) ; en déduire qu'il y a $c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$ bons chemins. Calculer $c_1, \dots, c_5$.
3. **Le guichet.** Un ticket coûte 5 DH ; n clients ayant une pièce de 5 DH et n un billet de 10 DH font la queue au hasard, caisse vide. Montrer que le caissier peut toujours rendre la monnaie avec la probabilité $\frac{1}{n+1}$; avec $m \geq n$ pièces, $\frac{m-n+1}{m+1}$ ($m = 6, n = 4$).

Exercice 25 Le problème du scrutin ★★★★★

corrigé p. 51

A a a voix, B en a b ($a > b \geq 1$) ; les C_{a+b}^b ordres de dépouillement sont équiprobables. T : « A est strictement en tête tout au long du dépouillement ».

1. Écrire les dépouillements possibles pour $a = 3, b = 1$, et calculer $P(T)$.
2. Au dépouillement on associe le chemin de pas $(1, 0)$ pour A , $(0, 1)$ pour B . Montrer que T a lieu si et seulement si le chemin commence par $(1, 0)$ et ne touche plus $y = x$ après O .
3. Dans un chemin commençant par $(1, 0)$ et retouchant $y = x$, on symétrise par rapport à $y = x$ la partie avant ce retour : montrer que c'est une bijection sur les chemins commençant par $(0, 1)$. En déduire $P(T) = \frac{a-b}{a+b}$.
4. Cas $a = 6, b = 4$: probabilité d'au moins une égalité pendant le dépouillement ?

Exercice 26 Le problème des rencontres ★★★★★

corrigé p. 52

n personnes ($n \geq 1$) récupèrent au hasard les n chapeaux déposés au vestiaire ($n!$ cas équiprobables). d_n est le nombre de cas où personne n'a son chapeau ($d_0 = 1$), et $p_n = \frac{d_n}{n!}$.

1. Calculer d_1, d_2, d_3 . Pour $n \geq 2$, la personne 1 reçoit le chapeau d'une personne $j \neq 1$: en distinguant selon que j reçoit ou non le chapeau de 1, montrer que $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.
2. Montrer que $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$, puis que $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. Calculer $d_4, \dots, d_8$.
3. Montrer que (p_{2m}) et (p_{2m+1}) sont adjacentes ; on admet que leur limite est $\frac{1}{e}$. Montrer que $\left| p_n - \frac{1}{e} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$; dès quel rang cet écart est-il $\leq 10^{-6}$?

Exercice 27 Anniversaires : le seuil ★★★★★

corrigé p. 52

Les anniversaires de n personnes ($2 \leq n \leq N$) sont indépendants et équiprobables parmi N jours ; $q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)$ est la probabilité qu'ils soient distincts, $p_n = 1 - q_n$, et $q_n \leq e^{-n(n-1)/(2N)}$ (cours).

1. E_{ij} : « i et j ont le même anniversaire » ($i < j$). Calculer $P(E_{ij})$; montrer que $p_n \leq \frac{n(n-1)}{2N}$ ($< \frac{1}{2}$ si $N = 365, n \leq 19$).
2. Montrer que $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; en déduire $q_n \geq \exp\left(-\frac{n^2}{2N} - \frac{n^3}{3N^2}\right)$ si $n \leq \frac{N}{2}$.
3. s_N : plus petit n tel que $p_n \geq \frac{1}{2}$ ($s_{365} = 23$). Montrer que $s_N \leq 2 + \sqrt{2N \ln 2}$ et $\frac{s_N}{\sqrt{N}} \rightarrow \sqrt{2 \ln 2}$ si $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 28 La fourmi sur le cube ★★★★★

corrigé p. 53

Partie d'un sommet O d'un cube, une fourmi suit chaque seconde, au hasard, l'une des trois arêtes issues de sa position ; D_n : sa distance (en arêtes) à O à l'instant n ; S : sommet opposé à O .

1. Calculer $P_{(D_n=d)}(D_{n+1} = d \pm 1)$ ($0 \leq d \leq 3$). Justifier que D_n a la parité de n .
2. $a_k = P(D_{2k} = 0)$: montrer que $a_{k+1} = \frac{1}{9}a_k + \frac{2}{9}$, puis $a_k = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 9^k}$; en déduire $P(D_{2k+1} = 3)$. Limites ?
3. b_k (resp. c_k) : probabilité d'être à l'instant $2k$ à la distance 0 (resp. 2) de O sans être passée par S ($k \geq 1$). Montrer que $b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k + \frac{2}{9}c_k$, $c_{k+1} = \frac{2}{3}b_k + \frac{4}{9}c_k$, puis $c_k = 2b_k$, $b_k + c_k = \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$.
4. Probabilité d'atteindre S pour la 1^{re} fois à l'instant $2k+1$? au plus tard à cet instant ? Limite ?

Exercice 29 Le retour à l'origine ★★★★★

corrigé p. 53

On reprend la marche de l'exercice 22 avec $p = \frac{1}{2}$. On cherche la probabilité ρ_n de ne jamais revenir en 0 pendant $2n$ pas : $S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0$.

1. Calculer ρ_1 et ρ_2 en écrivant les suites de pas.
2. Avec l'exercice 25, montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, il y a $\frac{k}{n} C_{2n}^{n+k}$ suites de $2n$ pas telles que $S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0$ et $S_{2n} = 2k$.
3. Vérifier que $\frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} = C_{2n-1}^{n+k-1} - C_{2n-1}^{n+k}$; en déduire $\rho_n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} = P(S_{2n} = 0)$, puis $\rho_n \rightarrow 0$. Interpréter.

Exercice 30 La méthode probabiliste ★★★★★

corrigé p. 54

On représente n personnes par des points, joints en rouge si elles se connaissent, en bleu sinon.

1. Montrer que, parmi 6 personnes, 3 se connaissent deux à deux ou 3 ne se connaissent pas deux à deux (regarder les 5 segments issus d'un point) ; et que c'est faux pour 5 personnes.
2. On colorie les segments au hasard ($2^{C_n^2}$ coloriage équiprobables). Montrer que les C_k^2 segments joignant $k \geq 2$ points donnés sont de même couleur avec la probabilité $2^{1-C_k^2}$, puis que, si $C_n^k 2^{1-C_k^2} < 1$, il existe un coloriage sans k points joints par des segments tous de même couleur.
3. Si $k \geq 3$ et $n \leq 2^{k/2}$, montrer que $C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$ puis $C_n^k 2^{1-C_k^2} < 1$. Cas de 1024 personnes ?

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Dénombrement

Trois outils : le principe multiplicatif (construire les objets étape par étape), le principe additif (séparer des cas disjoints) et les **bijections** avec un ensemble que l'on sait compter. Compter **de deux façons** un même ensemble fournit des identités.

Exercice 31 Morse, braille et dominos ★

corrigé p. 54

1. *Morse*. Un signal est une suite de 1 à n symboles, chacun étant un point ou un trait. Montrer qu'il y a $2^{n+1} - 2$ signaux. Quelle valeur minimale de n permet de coder les 26 lettres et les 10 chiffres ?
2. *Braille*. Un caractère braille est formé de 6 points (3 lignes, 2 colonnes), chacun en relief ou non, avec au moins un point en relief. Combien y a-t-il de caractères ? Combien ont exactement 3 points en relief ? au moins 2 ?
3. *Dominos*. Un domino porte deux nombres de 0 à 6, égaux ou non, sans ordre ; le jeu contient une fois chaque domino possible. a) Montrer que le jeu compte 28 dominos, puis retrouver $28 = C_8^2$ en associant au domino $\{i, j\}$ ($i \leq j$) la partie $\{i, j+1\}$ de $\{0, \dots, 7\}$. b) Calculer le total des points du jeu. c) On tire simultanément deux dominos au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils aient un nombre en commun ?

Exercice 32 Groupes de TP et binômes ★

corrigé p. 55

1. Les 12 élèves d'une classe, dont Ali et Omar, sont répartis en trois groupes de 4. a) Les groupes vont dans trois salles numérotées : montrer qu'il y a $C_{12}^4 \times C_8^4 = \frac{12!}{(4!)^3}$ répartitions et calculer ce nombre. b) Combien y en a-t-il si les groupes ne sont pas numérotés ? c) On choisit au hasard une répartition du a) : quelle est la probabilité qu'Ali et Omar soient ensemble ?
2. On note a_n le nombre de façons de répartir $2n$ élèves en n binômes ($n \geq 1$). a) Donner a_1 et a_2 . b) En considérant le partenaire d'un élève donné, montrer que $a_{n+1} = (2n+1)a_n$. En déduire que $a_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, puis calculer a_3 et a_5 .
3. Une classe de 5 filles et 5 garçons, dont Ali et Omar, est répartie au hasard en 5 binômes (les a_5 répartitions sont équiprobables). Quelle est la probabilité que tous les binômes soient mixtes ? qu'Ali et Omar travaillent ensemble ?

Exercice 33 Un tournoi au hasard ★★

corrigé p. 55

n équipes ($n \geq 3$) de même force disputent un tournoi : chaque équipe rencontre une fois chacune des autres, et chaque match a un vainqueur. Les listes des vainqueurs de tous les matchs (les résultats) sont équiprobables. Le score d'une équipe est son nombre de victoires.

- Combien de matchs sont joués ? Combien y a-t-il de résultats ? Que vaut la somme des scores ?
- Une équipe est *invaincue* si elle gagne tous ses matchs. a) Pourquoi y a-t-il au plus une équipe invaincue ? b) Montrer que la probabilité qu'il y ait une équipe invaincue est $\frac{n}{2^{n-1}}$. c) Calculer la probabilité qu'il y ait à la fois une équipe invaincue et une équipe sans victoire.
- a) On suppose les scores deux à deux distincts. Montrer que ce sont les entiers $0, 1, \dots, n-1$, puis, par récurrence sur n , que l'équipe de score k bat exactement les k équipes de score inférieur. b) En déduire la probabilité que les scores soient deux à deux distincts. Application : $n = 4, n = 5$.

Exercice 34 Couples de parties ★★

corrigé p. 56

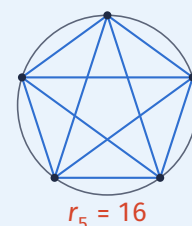
Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) ; il y a 4^n couples (A, B) de parties de E . On note $\bar{B}$ le complémentaire de B dans E .

- a) En classant les couples selon le cardinal k de B , montrer que le nombre de couples tels que $A \subset B$ est $\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$, puis le calculer. b) Retrouver ce résultat en observant que, si $A \subset B$, chaque élément de E est dans l'une de trois situations.
- À l'aide de bijections comme $(A, B) \mapsto (A, \bar{B})$, dénombrer les couples tels que $A \cap B = \emptyset$, puis ceux tels que $A \cup B = E$, puis ceux qui vérifient les deux conditions.
- En comptant de deux façons les triplets (x, A, B) tels que $x \in A \cap B$, montrer que $\sum \text{card}(A \cap B) = n 4^{n-1}$, la somme portant sur les 4^n couples. Calculer de même $\sum \text{card}(A \cup B)$.
- On choisit un couple (A, B) au hasard. Calculer $P(A \subset B)$, puis le plus petit n pour lequel $P(A \subset B) < 0,01$.

Exercice 35 Le cercle de Moser ★★★

corrigé p. 56

On place n points distincts ($n \geq 1$) sur un cercle et l'on trace toutes les cordes qui les joignent. On suppose que trois cordes ne sont jamais concourantes en un point intérieur au disque, et l'on note r_n le nombre de régions ainsi délimitées dans le disque (figure : $n = 5$).



- Vérifier que $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4, r_4 = 8, r_5 = 16$. Quelle conjecture est tentante ?
- Montrer que deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ sans extrémité commune se coupent à l'intérieur du disque si et seulement si B et D sont sur les deux arcs différents d'extrémités A et C . En déduire que les cordes ont C_n^4 points d'intersection intérieurs au disque.
- On trace les cordes une à une. Montrer que, lorsqu'on trace une corde coupée en m points par les cordes déjà tracées, le nombre de régions augmente de $m + 1$. En déduire que $r_n = 1 + C_n^2 + C_n^4$ (avec $C_m^p = 0$ si $p > m$).
- Calculer r_6 et r_{10} , et conclure. Déterminer le plus petit n tel que $r_n \geq 1000$.
- À l'aide de la relation de Pascal, montrer que $r_n = \sum_{k=0}^4 C_{n-1}^k$ pour $n \geq 2$, et expliquer pourquoi

$$r_n = 2^{n-1} \text{ pour } n \leq 5.$$

Exercice 36 Colorier un camembert ★★★

corrigé p. 57

On dispose de k couleurs ($k \geq 2$). Un coloriage est *correct* si deux zones voisines ont toujours des couleurs différentes.

- Montrer qu'une bande de n cases alignées ($n \geq 1$) admet $k(k-1)^{n-1}$ coloriages corrects.
- Un camembert est un disque partagé en n secteurs ($n \geq 3$) numérotés de 1 à n dans le sens direct : le secteur i est voisin des secteurs $i-1$ et $i+1$, et le secteur n du secteur 1. On note c_n le nombre de ses coloriages corrects. a) Calculer c_3 . b) Soit $n \geq 4$. En classant les coloriages corrects d'une bande de n cases selon que ses cases extrêmes ont ou non la même couleur, montrer que $c_n + c_{n-1} = k(k-1)^{n-1}$. c) En déduire que $c_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ pour tout $n \geq 3$.
- a) On colorie chacun des 6 secteurs d'un camembert au hasard avec l'une de 4 couleurs (les 4^6 coloriages sont équiprobables). Quelle est la probabilité que le coloriage soit correct ?
b) Combien faut-il de couleurs, au minimum, pour colorier correctement un camembert à n secteurs ?

20 Probabilités et équiprobabilité

Si les issues sont équiprobables, $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$: tout repose sur un univers dont les issues sont **réellement** équiprobables (dés et tirages discernables), puis sur un dénombrement soigné de A (par le contraire, une symétrie ou des cas disjoints).

Exercice 37 Un diviseur au hasard ★

corrigé p. 58

On choisit au hasard un diviseur positif d de $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$, tous les diviseurs étant équiprobables.

- Justifier que les diviseurs positifs de 600 sont les $2^a 3^b 5^c$ ($0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 2$), chacun s'écrivant ainsi de façon unique. Combien y en a-t-il ?
- Calculer la probabilité des événements A : « d est pair », B : « d est multiple de 15 », $A \cap B$, $A \cup B$, et C : « d est un carré ».
- a) Montrer que $d \mapsto \frac{600}{d}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs positifs de 600 sur lui-même. En déduire, sans les énumérer, la probabilité que $d \leq 24$. b) Quelle est la probabilité que d et $\frac{600}{d}$ soient premiers entre eux ?
- On choisit successivement et avec remise deux diviseurs positifs d_1 et d_2 de 600. Quelle est la probabilité que d_1 divise d_2 ?

Exercice 38 Paires de chaussures ★

corrigé p. 58

Un placard contient n paires de chaussures ($n \geq 2$), toutes différentes.

- On prend simultanément 2 chaussures au hasard. Montrer que la probabilité d'obtenir une paire est $\frac{1}{2n-1}$. À partir de combien de paires est-elle inférieure ou égale à 0,1 ?
- Ici $n = 5$ et l'on prend simultanément 4 chaussures au hasard. Calculer la probabilité : a) de n'obtenir aucune paire ; b) d'obtenir deux paires ; c) d'obtenir exactement une paire (de deux façons) ; d) d'obtenir au moins un pied gauche et au moins un pied droit.

Exercice 39 Un trinôme aléatoire ★★

corrigé p. 59

Trois dés équilibrés, rouge, vert et bleu, donnent a, b, c (les 216 triplets sont équiprobables), et l'on considère l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. a) Pour chaque valeur de b , dénombrer les couples (a, c) tels que $4ac \leq b^2$, puis ceux tels que $4ac = b^2$. b) En déduire la probabilité que (E) ait deux solutions réelles distinctes, une solution double, deux solutions non réelles.
2. Montrer que, lorsqu'elles sont réelles, les solutions de (E) sont strictement négatives.
3. a) Lorsqu'elles ne sont pas réelles, montrer que les solutions sont conjuguées, de module $\sqrt{\frac{c}{a}}$. b) Montrer que toutes les solutions de (E) sont de module 1 si et seulement si $a = c$ et $b \leq 2a$, et calculer la probabilité de cet événement. c) Quelle est la probabilité que les solutions soient j et j^2 ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$) ?

Exercice 40 Trois sommets d'un dodécagone ★★

corrigé p. 60

$A_0, A_1, \dots, A_{11}$ sont les sommets d'un dodécagone régulier inscrit dans un cercle C de centre O . On choisit simultanément au hasard trois de ces sommets.

1. Combien y a-t-il de triangles possibles ?
2. Calculer la probabilité que le triangle soit : a) équilatéral ; b) isocèle (compter, pour chaque sommet S , les triangles isocèles de sommet principal S) ; c) rectangle (un triangle inscrit dans C est rectangle si et seulement si l'un de ses côtés est un diamètre).
3. Les trois sommets partagent C en trois arcs contenant s_1, s_2, s_3 côtés du dodécagone. a) Montrer que les angles du triangle mesurent $15s_1, 15s_2$ et $15s_3$ degrés. b) En dénombrant les triangles obtus selon leur sommet obtus, calculer la probabilité que le triangle soit obtus, puis qu'il ait ses trois angles aigus (on admet que c'est la probabilité que O soit intérieur au triangle).

Exercice 41 Des côtés tirés au hasard ★★★

corrigé p. 60

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On en tire successivement trois avec remise : a, b, c . Soit T : « il existe un triangle non aplati de côtés a, b, c » ; on admet que T est réalisé si et seulement si chacun des trois nombres est strictement inférieur à la somme des deux autres.

1. Montrer qu'au plus une des inégalités $a \geq b + c$, $b \geq a + c$, $c \geq a + b$ peut être vraie.
2. Soit N le nombre de triplets $(a, b, c) \in \{1, \dots, n\}^3$ tels que $c \geq a + b$. a) Montrer que $(a, b, c) \mapsto \{a, a + b, c + 1\}$ est une bijection de l'ensemble de ces triplets sur l'ensemble des parties à 3 éléments de $\{1, \dots, n + 1\}$. En déduire N . b) Montrer que $P(T) = \frac{n^2 + 1}{2n^2}$.
3. Cas $n = 6$ (trois dés). a) Calculer $P(T)$ et la probabilité que le triangle soit aplati (un nombre est la somme des deux autres). b) Calculer la probabilité d'obtenir un triangle équilatéral, un triangle rectangle, un triangle isocèle (au moins deux côtés égaux). c) Sachant T , quelle est la probabilité que le triangle soit isocèle ?

Exercice 42 Deux pièces sur un échiquier ★★★

corrigé p. 61

On choisit simultanément au hasard deux cases distinctes d'un échiquier 8×8 , et l'on y pose deux pièces identiques. Elles sont « en prise » si l'une peut atteindre l'autre en un déplacement.

1. Combien y a-t-il de choix ?

2. *Tours* (même ligne ou même colonne) : calculer la probabilité qu'elles soient en prise. Montrer que, sur un échiquier $n \times n$, elle vaut $\frac{2}{n+1}$.
3. *Rois* (cases voisines par un côté ou un coin) : calculer la probabilité qu'ils soient en prise.
4. *Fous* (même diagonale). a) Les diagonales parallèles à une diagonale donnée de l'échiquier contiennent 1, 2, ..., 7, 8, 7, ..., 2, 1 cases. Combien de paires de cases sont sur une même diagonale ? b) En déduire la probabilité que deux fous soient en prise, puis deux dames (une dame se déplace comme une tour ou comme un fou).
5. *Cavaliers* (déplacement de 1 case dans une direction et de 2 dans l'autre) : probabilité qu'ils soient en prise ?

21

Probabilités conditionnelles

Outils : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ (lecture d'un arbre), formule des probabilités totales sur un système complet, et formule de Bayes pour « remonter » l'arbre. Les « paradoxes » viennent presque toujours d'une confusion entre $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 43 Cartes bicolores et urnes en cascade ★

corrigé p. 62

1. Trois cartes : l'une a deux faces rouges, une autre deux faces blanches, la troisième une face de chaque couleur. On tire une carte au hasard et on la pose sur la table, une face au hasard étant visible. La face visible est rouge : quelle est la probabilité que l'autre face soit rouge ? Pourquoi n'est-ce pas $\frac{1}{2}$?
2. L'urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 blanches, l'urne U_2 contient 2 rouges et 4 blanches. On place dans U_2 , sans la regarder, une boule tirée de U_1 , puis on tire une boule de U_2 . Soit R_1 : « la boule transférée est rouge » et R_2 : « la boule tirée de U_2 est rouge ». a) Calculer $P_{R_1}(R_2)$, $P_{\overline{R_1}}(R_2)$, puis $P(R_2)$. b) Calculer $P_{R_2}(R_1)$.

Exercice 44 Le taxi et le témoin ★

corrigé p. 62

Une nuit, un taxi provoque un accident et s'enfuit. Dans la ville, 85 % des taxis sont verts et 15 % sont bleus. Un témoin affirme que le taxi était bleu ; or, de nuit, il reconnaît correctement la couleur d'un taxi dans 80 % des cas, qu'il soit vert ou bleu. Soit B : « le taxi est bleu » et T : « le témoin dit bleu ».

1. Construire un arbre pondéré et calculer $P(T)$, puis $P_T(B)$. Le taxi bleu est-il devenu plus probable que le vert ?
2. On note $x \in]0, 1[$ la fiabilité du témoin (au lieu de 0,8). Montrer que $P_T(B) = \frac{3x}{17-14x}$. Quelle fiabilité faut-il pour que $P_T(B) \geq \frac{1}{2}$? pour que $P_T(B) \geq 0,9$?

Exercice 45 Le paradoxe des deux enfants ★★

corrigé p. 62

Dans une famille de deux enfants, chaque enfant est un garçon ou une fille avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et né un jour donné de la semaine avec la probabilité $\frac{1}{7}$, indépendamment du sexe et de l'autre enfant.

1. Les issues (aîné, cadet) GG, GF, FG, FF sont équiprobables. Calculer la probabilité d'avoir deux garçons : a) sachant qu'il y a au moins un garçon ; b) sachant que l'aîné est un garçon.

- Un père déclare : « J'ai deux enfants, dont au moins un garçon né un mardi. » Chaque enfant est décrit par son sexe et son jour de naissance (14 cas équiprobables). a) Combien des 196 familles réalisent M : « au moins un garçon né un mardi » ? b) Calculer la probabilité d'avoir deux garçons sachant M .
- Plus généralement, chaque garçon a une certaine caractéristique avec la probabilité $p \in]0, 1]$, indépendamment de tout le reste. Montrer que la probabilité d'avoir deux garçons, sachant qu'au moins un garçon a la caractéristique, vaut $\frac{2-p}{4-p}$. Retrouver 1.a) et 2.b), puis étudier les variations en fonction de p et interpréter.

Exercice 46 Le paradoxe de Simpson ★★

corrigé p. 63

On compare deux traitements sur 800 patients atteints d'une forme légère ou grave d'une maladie (tableau : guéris sur traités). On choisit un patient au hasard ; A : « il a reçu le traitement A » ($\bar{A}$: le traitement B), L : « sa forme est légère », G : « il est guéri ».

	Traitement A	Traitement B
Forme légère	90 sur 100	255 sur 300
Forme grave	150 sur 300	40 sur 100

- Calculer $P_{A \cap L}(G)$, $P_{\bar{A} \cap L}(G)$, $P_{A \cap \bar{L}}(G)$, $P_{\bar{A} \cap \bar{L}}(G)$, puis $P_A(G)$ et $P_{\bar{A}}(G)$. Quel paradoxe observe-t-on ?
- a) Montrer que $P_A(G) = P_A(L)P_{A \cap L}(G) + P_A(\bar{L})P_{A \cap \bar{L}}(G)$. b) Calculer $P_A(L)$ et $P_{\bar{A}}(L)$; expliquer le paradoxe.
- Montrer que, si $P_A(L) = P_{\bar{A}}(L)$ et si A est meilleur que B pour chaque forme, alors $P_A(G) > P_{\bar{A}}(G)$.
- On choisit au hasard un patient guéri. Quelle est la probabilité qu'il ait reçu le traitement A ?

Exercice 47 Un code correcteur à répétition ★★★

corrigé p. 63

Une source émet un bit : 0 avec la probabilité $\pi \in]0, 1[$, 1 sinon. On l'envoie trois fois (mot 000 ou 111) ; le canal transmet chaque bit indépendamment, en l'inversant avec la probabilité $\varepsilon = 0,1$.

- Décodage majoritaire** : on décide le bit majoritaire du mot reçu. Montrer que la probabilité d'erreur vaut $3\varepsilon^2(1 - \varepsilon) + \varepsilon^3 = 0,028$, quel que soit π . Comparer avec l'envoi d'un seul bit.
- Ici $\pi = 0,6$. Calculer la probabilité de recevoir 001 sachant que 000 a été émis, puis sachant que 111 a été émis. En déduire la probabilité que 0 ait été émis sachant que 001 est reçu.
- Décodage le plus probable** : on décide le bit le plus probable sachant le mot reçu, qui contient w chiffres 1. a) Montrer qu'on décide 0 si et seulement si $\pi \varepsilon^w(1 - \varepsilon)^{3-w} > (1 - \pi)(1 - \varepsilon)^w \varepsilon^{3-w}$. b) Montrer que, pour $\pi = 0,6$, c'est le décodage majoritaire. c) Montrer que 011 est décodé 0 si et seulement si $\pi > 0,9$.
- Pour $\pi = 0,95$, décrire le décodage le plus probable et calculer sa probabilité d'erreur.

Exercice 48 La loi de Hardy-Weinberg ★★★

corrigé p. 64

Un gène a deux allèles A et a ; chaque individu en porte deux : génotypes AA, Aa, aa, de proportions u , v , w dans la génération 0. Pour obtenir un enfant de la génération 1, on choisit au hasard et indépendamment son père et sa mère dans la génération 0 ; chacun transmet l'un de ses deux allèles, choisi avec la probabilité $\frac{1}{2}$, les transmissions étant indépendantes.

- Montrer que le père transmet l'allèle A avec la probabilité $p = u + \frac{v}{2}$. On pose $q = 1 - p$.
- En déduire que l'enfant a le génotype AA, Aa, aa avec les probabilités p^2 , $2pq$, q^2 .

- On admet que la génération 1 a les proportions $p^2, 2pq, q^2$. Montrer que la génération 2 a les mêmes : la répartition est stable dès la génération 1.
- Application : $u = 0,5, v = 0,2, w = 0,3$. a) Proportions de la génération 1 ? b) Un enfant de la génération 1 est aa : quelle est la probabilité que son père soit Aa ? aa ?
- L'albinisme correspond au génotype aa . Dans une population à l'équilibre, une personne sur 10 000 est albinos. Quelle est la proportion de porteurs sains (Aa) ?

22

Indépendance et épreuves répétées

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$: une égalité à vérifier par le calcul.

Exercice 49 Indépendant ou pas ? ★

corrigé p. 65

- On lance deux dés équilibrés, un rouge et un vert ; A : « le dé rouge donne un numéro pair », S_7 : « la somme vaut 7 », S_8 : « la somme vaut 8 ».
 - Calculer $P(A), P(S_7), P(S_8), P(A \cap S_7)$ et $P(A \cap S_8)$. A est-il indépendant de S_7 ? de S_8 ?
 - Soit I une partie non vide de $\{1, \dots, 6\}$ et R_I : « le numéro du dé rouge appartient à I ». Montrer que R_I et S_7 sont indépendants. S_8 est-il indépendant de $R_{\{1\}}$?
- A et B sont deux événements indépendants tels que $P(A \cap B) = 0,12, P(A \cup B) = 0,58$ et $P(A) < P(B)$. Déterminer $P(A)$ et $P(B)$, puis $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$.

Exercice 50 Bimoteur ou quadrimoteur ? ★

corrigé p. 65

Pendant un vol, chaque moteur d'un avion tombe en panne avec la probabilité $q \in]0, 1[$, indépendamment des autres ; l'avion arrive si au moins la moitié de ses moteurs fonctionnent : avec la probabilité p_2 pour un bimoteur, p_4 pour un quadrimoteur.

- On prend $q = 0,1$; X est le nombre de moteurs en panne d'un quadrimoteur. Justifier que X suit une loi binomiale, donner sa loi, puis calculer p_4 et p_2 .
- Dans le cas général, montrer que $p_2 = 1 - q^2, p_4 = 1 - 4q^3 + 3q^4$ et $p_4 - p_2 = q^2(3q - 1)(q - 1)$. Pour quelles valeurs de q le quadrimoteur est-il plus sûr ? Comparer p_2 et p_4 pour $q = 0,4$.

Exercice 51 Les dés non transitifs ★★

corrigé p. 66

Quatre dés équilibrés portent sur leurs faces : $A : 0, 0, 4, 4, 4, 4$; $B : 3, 3, 3, 3, 3, 3$; $C : 2, 2, 2, 2, 6, 6$; $D : 1, 1, 1, 5, 5, 5$. Deux joueurs choisissent chacun un dé différent et le lancent (lancers indépendants) ; le plus grand nombre gagne.

- Calculer $P(A > B), P(B > C), P(C > D)$ et $P(D > A)$. Que remarque-t-on ?
- Calculer $P(A > C), P(B > D)$ et la moyenne des nombres de chaque dé. Commenter.
- Le premier joueur choisit son dé, puis le second le sien. Montrer que le second peut toujours gagner avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- Ali (dé D) et Badr (dé A) jouent trois manches ; celui qui en gagne le plus gagne la partie. Probabilité qu'Ali gagne ? et en cinq manches ?

Exercice 52 Familles de n enfants ★★

corrigé p. 66

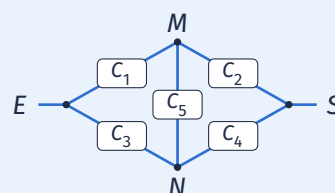
Dans une famille de n enfants ($n \geq 2$), chaque enfant est un garçon ou une fille avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres. On note A : « la famille a des enfants des deux sexes » et B : « la famille a au plus une fille ».

1. Pour $n = 2$, puis $n = 3$, calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ?
2. Montrer que $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$, $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$, puis que A et B sont indépendants si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$, c'est-à-dire $n = 3$ (étudier $u_n = 2^{n-1} - n - 1$).

Exercice 53 Le pont de Wheatstone ★★★

corrigé p. 67

Dans le réseau ci-contre, le composant C_5 forme un « pont » entre M et N . Chaque composant fonctionne avec la probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres ; le système fonctionne s'il existe un chemin de E à S formé de composants qui fonctionnent. On note $R(p)$ cette probabilité ; on pose $a(p) = 1 - (1 - p)^2$ et $b(p) = 1 - (1 - p^2)^2$.



1. Montrer que le système fonctionne avec la probabilité $a(p)^2$ sachant que C_5 fonctionne, et $b(p)$ sachant que C_5 est en panne. En déduire que $R(p) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.
2. Montrer que le pont augmente la fiabilité de $2p^3(1 - p)^2$ (comparer au réseau sans C_5).
3. Vérifier que $a(1 - p) = 1 - p^2$ et $b(1 - p) = 1 - a(p)^2$. En déduire que $R(1 - p) = 1 - R(p)$, puis $R(\frac{1}{2})$. Calculer $R(0,9)$.
4. Si $p = \frac{1}{2}$, quelle est la probabilité que le pont fonctionne, sachant que le système fonctionne ?

Exercice 54 Indépendance et arithmétique ★★★

corrigé p. 67

Soit Ω un univers à n éléments ($n \geq 2$), muni de l'équiprobabilité. Un événement est *trivial* s'il est égal à $\emptyset$ ou à Ω .

1. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n \text{ card}(A \cap B) = \text{card}(A) \text{ card}(B)$. En déduire que, si n est premier, deux événements non triviaux ne sont jamais indépendants.
2. On lance un dé équilibré : $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.
 - a) Soit A et B non triviaux indépendants, $a = \text{card}(A)$, $b = \text{card}(B)$, $c = \text{card}(A \cap B)$. Montrer que (a, b, c) est l'un des triplets $(2, 3, 1)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 4, 2)$, $(4, 3, 2)$, et donner un exemple.
 - b) Combien y a-t-il de couples (A, B) indépendants tels que $\text{card}(A) = 2$ et $\text{card}(B) = 3$?
 - c) Montrer qu'il n'existe pas trois événements non triviaux deux à deux indépendants.
3. Si $A_1, \dots, A_k$ sont non triviaux et mutuellement indépendants, montrer que $n \geq 2^k$ (étudier les $B_1 \cap \dots \cap B_k$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, en admettant que $B_1, \dots, B_k$ sont mutuellement indépendants).

23

Variables aléatoires

Une variable aléatoire se décrit par sa **loi** ou par sa **fonction de répartition** $F(x) = P(X \leq x)$, en escalier. Outils : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$; si $X \sim B(n, p)$, $E(X) = np$.

Exercice 55 L'urne triangulaire ★

corrigé p. 68

Soit $n \geq 2$. Une urne contient une boule portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., n boules portant le numéro n . On tire une boule au hasard et on note X son numéro.

1. Cas $n = 4$. Déterminer la loi de X , puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. Déterminer et représenter la fonction de répartition F de X ; en déduire $P(X \geq 3)$.
2. Cas général. a) Montrer que $P(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ et $F(k) = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$.
b) Montrer que $E(X) = \frac{2n+1}{3}$ et $V(X) = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$ (on rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$).
c) Pour $n = 20$, déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 56 Le permis de conduire ★

corrigé p. 68

Un candidat peut passer l'examen du permis de conduire au plus trois fois et s'arrête dès qu'il réussit. Il réussit le premier passage avec la probabilité 0,5 ; s'il échoue, il réussit le deuxième avec la probabilité 0,7 ; s'il échoue encore, le troisième avec la probabilité 0,9. On note X le nombre de passages effectués.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de X et la probabilité que le candidat obtienne le permis. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
2. La formation coûte 3000 DH et chaque passage 600 DH. Exprimer le coût total C en fonction de X , puis calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.
3. Le candidat a obtenu le permis : probabilité qu'il l'ait obtenu dès le premier passage ?

Exercice 57 La martingale ★★

corrigé p. 69

Un joueur gagne chaque partie (qui rapporte ou fait perdre la mise) avec la probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres ; $q = 1 - p$. Il mise 1 DH à la première partie, **double sa mise** après chaque partie perdue, et s'arrête dès qu'il gagne, au plus tard après n parties. On note G son gain total (positif ou négatif) et N le nombre de parties jouées.

1. Montrer que, s'il gagne pour la première fois à la k -ième partie ($k \leq n$), son gain total est 1 DH. Et s'il perd les n parties ?
2. Déterminer la loi de G et montrer que $E(G) = 1 - (2q)^n$. Déterminer la loi de N .
3. Jeu équilibré ($p = \frac{1}{2}$) : calculer $E(G)$ et montrer que $V(G) = 2^n - 1$. Pour $n = 10$, calculer $P(G = 1)$ et $\sigma(G)$; de quel capital le joueur doit-il disposer ?
4. À la roulette, « rouge » sort avec la probabilité $\frac{18}{37}$. Montrer que $E(G) < 0$ et que $E(G)$ décroît quand n augmente. Calculer $E(G)$ pour $n = 10$.

Exercice 58 Garder les six ★★

corrigé p. 69

On lance cinq dés équilibrés ; on met de côté ceux qui donnent 6 et on relance les autres ; on relance une troisième et dernière fois les dés qui n'ont pas encore donné 6. On note X le nombre de dés qui montrent 6 à la fin.

1. Montrer qu'un dé donné montre 6 à la fin avec la probabilité $p = \frac{91}{216}$. On admet que les cinq dés évoluent indépendamment : en déduire la loi de X .
2. Calculer $P(X = 5)$, $P(X \geq 4)$, $E(X)$ et $V(X)$ (à 10^{-3} près), et représenter la loi de X par un diagramme en bâtons.
3. On s'autorise k lancers ($k \geq 1$). Déterminer le plus petit k pour lequel la probabilité d'obtenir cinq 6 dépasse $\frac{1}{2}$.

Exercice 59 L'espérance par la queue ★★★

corrigé p. 70

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.
2. On lance trois dés ; M et m sont le plus grand et le plus petit des trois numéros. Calculer $P(M \geq k)$ pour $1 \leq k \leq 6$, puis $E(M)$. À l'aide de la transformation $x \mapsto 7 - x$, en déduire $E(m)$.
3. a) Montrer que $\sum_{j=p}^N C_j^p = C_{N+1}^{p+1}$ pour tous entiers $0 \leq p \leq N$ (relation de Pascal).
 b) On tire simultanément p numéros parmi $1, \dots, n$ ($1 \leq p \leq n$) ; m et M sont le plus petit et le plus grand numéros tirés. Montrer que $P(m \geq k) = C_{n-k+1}^p / C_n^p$ pour $1 \leq k \leq n - p + 1$, puis que $E(m) = \frac{n+1}{p+1}$. En déduire $E(M)$.
 c) Loto : on tire 6 numéros parmi 49. Calculer les valeurs moyennes du plus petit et du plus grand numéro.

Exercice 60 Moyenne, médiane et écart-type ★★★

corrigé p. 70

X prend les valeurs $x_1 < \dots < x_r$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_r$; F est sa fonction de répartition. Une médiane de X est une valeur x_j telle que $P(X < x_j) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_j)$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f(a) = E((X - a)^2) = \sum p_i (x_i - a)^2$ et $g(a) = E(|X - a|) = \sum p_i |x_i - a|$.

1. Montrer que $f(a) = V(X) + (E(X) - a)^2$. Où f atteint-elle son minimum ?
2. a) Montrer que g est affine sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, de coefficient directeur $2F(x_k) - 1$. Que vaut g sur $]-\infty, x_1]$ et sur $[x_r, +\infty[$? b) En déduire que g atteint son minimum en toute médiane.
3. Soit $\mu = E(X)$ et m une médiane. Montrer que $|\mu - m| \leq g(m) \leq g(\mu)$, puis, à l'aide de la variance de $|X - \mu|$, que $g(\mu) \leq \sigma(X)$. Conclure.
4. Application. Cinq villages, aux bornes kilométriques 0, 2, 3, 7 et 12 d'une route rectiligne, abritent 10 %, 30 %, 20 %, 25 % et 15 % de la population. On construit un dispensaire à la borne a ; X est la borne du village d'un habitant choisi au hasard. a) Où placer le dispensaire pour minimiser la distance moyenne d'un habitant au dispensaire ? Que vaut-elle ? b) Où le placer pour minimiser la moyenne des carrés des distances ? Que vaut alors la distance moyenne ? c) Calculer $\sigma(X)$ et vérifier l'inégalité du 3.

Défis de concours

Exercice 61 Le passager distrait ★★★★★

corrigé p. 71

Les n passagers ($n \geq 2$) d'un avion de n places embarquent dans l'ordre $1, \dots, n$; la place k est celle du passager k . Le passager 1, distrait, s'assoit sur une place choisie au hasard ; ensuite, chaque passager prend sa place si elle est libre, sinon une place libre choisie au hasard. On note $q(n, k)$ la probabilité que le passager k ($2 \leq k \leq n$) soit à sa place.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer $q(3, 2)$ et $q(3, 3)$.
2. Soit c la place choisie par le passager 1. a) Montrer que le passager k est à sa place si $c = 1$ ou $c > k$, et pas si $c = k$.
b) Si $2 \leq c \leq k - 1$, expliquer pourquoi, lorsque le passager c embarque, tout se passe comme dans le problème à $n - c + 1$ places, le passager c jouant le rôle du distrait, la place 1 celui de sa place et le passager k celui du passager $k - c + 1$. En déduire que $q(n, k) = \frac{1}{n} \left(n - k + 1 + \sum_{c=2}^{k-1} q(n - c + 1, k - c + 1) \right)$.
3. Démontrer par récurrence forte sur n que $q(n, k) = \frac{n-k+1}{n-k+2}$. Probabilité que le dernier passager trouve sa place libre ?
4. L'avion a 100 places. Calculer $q(100, 50)$. Sachant que le dernier passager est à sa place, quelle est la probabilité que le passager distrait se soit assis à la sienne ?

Exercice 62 La poule à trois joueurs ★★★★★

corrigé p. 72

Trois joueurs A, B, C disputent une « poule » : A et B jouent la première partie, puis le vainqueur de chaque partie affronte le joueur qui n'y a pas participé ; le premier qui gagne deux parties consécutives remporte la poule. Les parties sont indépendantes.

1. Dans les questions 1 et 2, chaque joueur gagne chaque partie avec la probabilité $\frac{1}{2}$. a) Montrer que la poule se termine exactement à la k -ième partie ($k \geq 2$) avec la probabilité $\frac{1}{2^{k-1}}$, et que la probabilité qu'elle ne soit pas terminée après n parties tend vers 0.
b) On suppose que A gagne la première partie. Montrer que, tant que la poule continue, les vainqueurs successifs sont $A, C, B, A, C, B, \dots$
2. Sachant que A gagne la première partie, montrer que la probabilité que A remporte la poule en au plus n parties tend vers $\frac{4}{7}$, et calculer les limites analogues pour B et C . En déduire les probabilités (limites) de victoire de A, B et C .
3. Un joueur plus fort. C gagne maintenant chacune de ses parties avec la probabilité $p \in]0, 1[$, les parties entre A et B restant équilibrées. a) Montrer que C ne peut remporter la poule qu'à l'issue d'une partie de numéro $3j + 3$ ($j \in \mathbb{N}$), avec la probabilité $p^2 \left(\frac{p(1-p)}{2} \right)^j$. b) En déduire la probabilité $\pi(p)$ que C gagne. Pour quels p est-il favori ?

Exercice 63 Le jeu de craps ★★★★★

corrigé p. 73

On lance deux dés ; S est la somme des numéros et $p_s = P(S = s)$. Au premier lancer, le joueur gagne si $S \in \{7, 11\}$ et perd si $S \in \{2, 3, 12\}$; sinon, la valeur k de S devient son point, et il relance les deux dés jusqu'à obtenir de nouveau k (il gagne) ou 7 (il perd).

1. Montrer que $p_s = \frac{6-|s-7|}{36}$ ($2 \leq s \leq 12$). Probabilités de gagner, de perdre, dès le premier lancer ?

- Le point est $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ et $r = 1 - p_k - p_7$. Montrer que le jeu n'est pas terminé après n relances avec la probabilité $d_n = r^n$, et qu'il est gagné en au plus n relances avec la probabilité $g_n = p_k \frac{1-r^n}{1-r}$. Calculer $\lim d_n$, et $\lim g_n$ pour chaque k .
- La probabilité de gagner est la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de la probabilité de gagner en au plus n relances. Montrer qu'elle vaut $\gamma = \frac{244}{495}$. Le joueur mise 1 DH et reçoit 2 DH s'il gagne : quel est son gain moyen ? Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait gagné dès le premier lancer ?

Exercice 64 L'extinction d'une lignée ★★★★★

corrigé p. 73

À chaque génération, chaque bactérie, indépendamment des autres, meurt (probabilité q) ou se divise en deux (probabilité $p = 1 - q$, $0 < p < 1$). On part d'une bactérie ; x_n est la probabilité que la population soit éteinte à la génération n ($x_0 = 0$).

- Calculer x_1 et x_2 . On admet que les descendance de deux bactéries distinctes évoluent indépendamment, chacune comme la population issue d'une seule bactérie. En distinguant selon le sort de la bactérie initiale, montrer que $x_{n+1} = q + p x_n^2$.
- Soit $f(x) = q + px^2$ sur $[0, 1]$. a) Résoudre $f(x) = x$ dans $[0, 1]$; on note ℓ la plus petite solution. b) Montrer que (x_n) est croissante, majorée par ℓ , et converge vers ℓ . c) Interpréter selon les valeurs de p . Cas $p = \frac{3}{4}$; et si l'on part de 5 bactéries ?

Exercice 65 Les séries ★★★★★

corrigé p. 74

On aligne au hasard r boules rouges et b bleues ($r, b \geq 1$, $n = r + b$; les C_n^r alignements sont équiprobables). Une *série* est un bloc maximal de boules consécutives de même couleur (RRBR-RRB en a 4) ; R est le nombre de séries.

- Cas $r = 3$, $b = 2$. Écrire les 10 alignements, puis donner la loi de R et $E(R)$.
- a) Montrer qu'il y a C_{m-1}^{j-1} façons d'écrire un entier $m \geq 1$ comme somme ordonnée $m_1 + \dots + m_j$ d'entiers $m_i \geq 1$.
b) En déduire que $P(R = 2k) = 2 C_{r-1}^{k-1} C_{b-1}^{k-1} / C_n^r$ pour $k \geq 1$, et exprimer de même $P(R = 2k + 1)$.
- Linéarité.** a) Soit X, Y deux variables aléatoires sur Ω fini. Montrer que $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$, puis $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
b) Pour $1 \leq i \leq n - 1$, T_i vaut 1 si les boules i et $i + 1$ sont de couleurs différentes, 0 sinon. Montrer que $R = 1 + T_1 + \dots + T_{n-1}$ et $P(T_i = 1) = \frac{2rb}{n(n-1)}$. En déduire $E(R) = 1 + \frac{2rb}{n}$.
c) Montrer que n lancers d'une pièce équilibrée donnent en moyenne $\frac{n+1}{2}$ séries (de Pile ou de Face).

Exercice 66 Les cent prisonniers ★★★★★

corrigé p. 74

$2n$ prisonniers numérotés de 1 à $2n$ relèvent un défi : dans une salle, la boîte i ($1 \leq i \leq 2n$) contient le numéro $\sigma(i)$, où σ est une permutation (bijection) de $\{1, \dots, 2n\}$ choisie au hasard. Chaque prisonnier entre seul, ouvre au plus n boîtes et ressort sans rien déplacer ni communiquer ; tous sont libérés si chacun a trouvé son numéro.

- Si chacun ouvre n boîtes au hasard (indépendamment), montrer que la probabilité de libération est 4^{-n} .
- Stratégie de la boucle :** le prisonnier k ouvre la boîte k , puis la boîte portant le numéro qu'il vient de lire, etc. On note $\sigma^0(k) = k$ et $\sigma^{j+1}(k) = \sigma(\sigma^j(k))$.

- a) Montrer qu'il existe un plus petit entier $L \geq 1$ tel que $\sigma^L(k) = k$, et que $k, \sigma(k), \dots, \sigma^{L-1}(k)$ sont distincts : c'est le cycle de k , de longueur L .
- b) Montrer que le prisonnier k trouve son numéro si et seulement si $L \leq n$.
3. Soit $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$. a) Montrer qu'une permutation a au plus un cycle de longueur k , et que $(2n)!/k$ permutations ont un cycle de longueur k . b) En déduire que la probabilité de libération est $\pi_n = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n} 1/k$. Vérifier π_2 en dénombrant.
4. Montrer que $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \ln 2$; en déduire que $\pi_n > 1 - \ln 2 \approx 0,307$, et $\lim \pi_n$.

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25

Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. Un tiercé dans l'ordre est une 3-liste de chevaux distincts : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}$. Dans le désordre, c'est une partie à 3 éléments : $C_{10}^3 = \frac{720}{3!} = \boxed{120}$.
2. Écrivons l'entier $\overline{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5}$ avec $d_1 \neq 0$. Si $d_1 = 7$: on place l'autre 7 (4 positions) et on complète par trois chiffres $\neq 7$: $4 \times 9^3 = 2916$. Si $d_1 \neq 7$: 8 choix pour d_1 , $C_4^2 = 6$ choix des positions des deux 7, 9^2 pour les deux autres chiffres : $8 \times 6 \times 81 = 3888$. Total : $\boxed{6804}$ (principe additif).
En complétant à gauche par des 0, les entiers de 0 à 999 999 correspondent aux 10^6 listes de 6 chiffres, dont 9^6 sans 7 (parmi elles, 0). Par le complémentaire : $10^6 - 9^6 = \boxed{468\,559}$.
3. La tour de la ligne i est dans la colonne $\sigma(i)$, et les colonnes sont distinctes : σ est une permutation de $\{1, \dots, 8\}$, d'où $8! = \boxed{40\,320}$ placements. Cases blanches : $i + \sigma(i)$ impair, donc σ envoie les 4 lignes impaires sur les 4 colonnes paires et les 4 lignes paires sur les 4 colonnes impaires : $4! \times 4! = \boxed{576}$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. a) $\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = 4 \times \frac{n(n-1)}{2} \iff n+1 = 12$ (on divise par $n(n-1) \neq 0$) : $\boxed{n = 11}$.
b) $n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = 84 \iff n(n-1) = 56 \iff (n-8)(n+7) = 0$: $\boxed{n = 8}$.
2. $C_n^k C_k^p = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!(n-k)!}$ et $C_n^p C_{n-p}^{k-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-k)!}$: c'est la même chose.
On compte les couples (comité, bureau) : on choisit le comité (C_n^k) puis le bureau parmi ses membres (C_k^p) ; ou d'abord le bureau (C_n^p), puis les $k-p$ autres membres du comité parmi les $n-p$ personnes restantes (C_{n-p}^{k-p}). Cas : $C_{12}^5 C_5^2 = 792 \times 10 = C_{12}^2 C_{10}^3 = 66 \times 120 = \boxed{7920}$.
3. Pascal deux fois : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ et $C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+1}^{p+2}$; en ajoutant : $C_n^p + 2C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}$. Vérification : $15 + 2 \times 20 + 15 = 70 = C_8^4$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 3

1. $1 + 2x + x^2 = (1+x)^2$, donc $(1 + 2x + x^2)^4 = (1+x)^8$: le coefficient de x^3 est $C_8^3 = \boxed{56}$.
2. Dans le produit de $(1+x)^n = \sum_k C_n^k x^k$ par $(1-x)^n = \sum_j (-1)^j C_n^j x^j$, le coefficient de x^n est $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} C_n^{n-k} = (-1)^n S_n$, où $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2$. Or $(1-x^2)^n = \sum_j (-1)^j C_n^j x^{2j}$ n'a que des puissances paires : si n est impair, $\boxed{S_n = 0}$; si $n = 2m$, le coefficient de x^{2m} est $(-1)^m C_{2m}^m$ et $(-1)^{2m} = 1$, d'où $\boxed{S_{2m} = (-1)^m C_{2m}^m}$.

3. $6^n = (1+5)^n = 1 + 5n + \sum_{k=2}^n C_n^k 5^k$, et chaque terme de la dernière somme est multiple de 5^2 : $25 \mid 6^n - 5n - 1$ (pour $n \leq 1$ la différence est nulle).
4. Le coefficient de x^k est $a_k = C_{10}^k 2^k$, et $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{10}^{k+1}}{C_{10}^k} \times 2 = \frac{2(10-k)}{k+1}$. Or $\frac{2(10-k)}{k+1} > 1 \iff 20 - 2k > k + 1 \iff k < \frac{19}{3} \iff k \leq 6$: donc $a_0 < a_1 < \dots < a_7$, puis $a_7 > a_8 > \dots > a_{10}$. Le plus grand coefficient est celui de x^7 : $a_7 = C_{10}^7 \times 2^7 = 120 \times 128 = \boxed{15\,360}$ ($a_6 = 13\,440$, $a_8 = 11\,520$).

■ Corrigé de l'exercice 4

1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{5}{12}$, et $A \cap B \subset B$ donne $P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$. De même $A \subset A \cup B$ donne $\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$. Les bornes sont atteintes : sur $\Omega = \{1, \dots, 12\}$ équiprobable, avec $A = \{1, \dots, 9\}$, $B = \{1, \dots, 8\} \subset A$ donne $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$; $B = \{5, \dots, 12\}$ donne $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$ et $P(A \cup B) = 1$.
2. « Un seul de A, B » = $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ (incompatibles), et $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$: on obtient $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. Pour trois : $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ est le complémentaire de $A \cap (B \cup C)$ dans A , donc $P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
En ajoutant les trois expressions analogues (incompatibles), chaque $P(A \cap B)$ apparaît 2 fois et $P(A \cap B \cap C)$ 3 fois : c'est la formule.
3. Exactement un : $1,2 - 2 \times 0,45 + 3 \times 0,05 = \boxed{0,45}$; au moins un (crible) : $1,2 - 0,45 + 0,05 = \boxed{0,8}$.

■ Corrigé de l'exercice 5

Les mains sont les $C_{52}^5 = \boxed{2\,598\,960}$ parties à 5 éléments, équiprobables. On compte les mains favorables :

	choix successifs	nombre	probabilité
a) carré	hauteur du carré (13), 5 ^e carte (48)	624	$\frac{1}{4165}$
b) full	brelan $13 \times C_4^3$, paire $12 \times C_4^2$	3744	$\frac{6}{4165}$
c) deux paires	$C_{13}^2 \times (C_4^2)^2 \times 44$	123 552	$\frac{198}{4165}$
d) 5 hauteurs	hauteurs C_{13}^5 , couleurs 4^5	1 317 888	$\frac{2112}{4165} \approx 0,507$
e) au moins un as	contraire : $C_{48}^5 = 1\,712\,304$ mains sans as	886 656	$\frac{18\,472}{54\,145} \approx 0,341$

Piège en c) : choisir une « première » paire (13) puis une « seconde » (12) compterait chaque main deux fois.

■ Corrigé de l'exercice 6

1. Sachant D_k , on lance k pièces indépendantes : $P_{D_k}(Z) = \frac{1}{2^k}$; un seul Pile : k choix du lancer qui donne Pile, chacun de probabilité $\frac{1}{2^k}$: $P_{D_k}(U) = \frac{k}{2^k}$. Formule des probabilités totales avec le système complet $(D_1, \dots, D_6)$:

$$P(Z) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{6} \times \frac{63}{64} = \boxed{\frac{21}{128}}, \quad P(U) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{6} \times \frac{32 + 32 + 24 + 16 + 10 + 6}{64} = \boxed{\frac{5}{16}}.$$

2. Bayes : $P_Z(D_1) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{21}{128}} = \boxed{\frac{32}{63}} \approx 0,51$; $P_U(D_k) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{k}{2^k}}{\frac{5}{16}} = \frac{8k}{15 \times 2^k}$, soit pour $k = 1, \dots, 6$: $\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ (somme 1 ✓). Sachant U , les valeurs les plus probables sont $\boxed{k=1 \text{ et } k=2}$.

■ Corrigé de l'exercice 7

1. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $A \cap B \cap C = \{1\}$: $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$. Mais $A \cap B = A \cap C = \{1\}$ et $B \cap C = \{1, 5, 6\}$: $P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$ et $P(B \cap C) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4}$: aucune paire n'est indépendante.
2. $P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \iff P(A) = P(A)^2 \iff P(A) \in \{0, 1\}$. Si $A \subset B$: $P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff P(A)(1 - P(B)) = 0$: $\boxed{P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 1}$ (cas sans intérêt).
3. Les événements T_i « le tireur i réussit » sont indépendants, ainsi que leurs contraires : $P(X = 0) = 0,4 \times 0,3 \times 0,2 = 0,024$; $P(X = 1) = 0,6 \times 0,3 \times 0,2 + 0,4 \times 0,7 \times 0,2 + 0,4 \times 0,3 \times 0,8 = 0,188$; $P(X = 3) = 0,6 \times 0,7 \times 0,8 = 0,336$; $P(X = 2) = 1 - 0,024 - 0,188 - 0,336 = 0,452$. $E(X) = 0,188 + 0,904 + 1,008 = \boxed{2,1}$ On remarque que $2,1 = 0,6 + 0,7 + 0,8$.

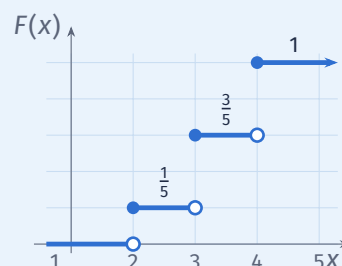
■ Corrigé de l'exercice 8

1. $X = 2$: la 2^e boule est l'unique boule restante de la couleur de la 1^{re}, parmi 5 : $P(X = 2) = \frac{1}{5}$. Après 4 tirages, deux boules ont la même couleur (3 couleurs seulement) : $X \leq 4$, et $X = 4$ si et seulement si les trois premières boules ont des couleurs distinctes : $P(X = 4) = 1 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$. D'où $P(X = 3) = \frac{2}{5}$.

$$E(X) = \frac{2 + 6 + 8}{5} = \boxed{\frac{16}{5}}, \quad E(X^2) = \frac{4 + 18 + 32}{5} = \frac{54}{5},$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{54}{5} - \frac{256}{25} = \boxed{\frac{14}{25}}.$$

$F(x) = 0$ si $x < 2$, $\frac{1}{5}$ sur $[2, 3[$, $\frac{3}{5}$ sur $[3, 4[$, 1 si $x \geq 4$ (ci-contre).



2. $G = 2X - 7$: $E(G) = 2 \times \frac{16}{5} - 7 = \boxed{-\frac{3}{5}}$ DH, $V(G) = 4V(X) = \boxed{\frac{56}{25}}$.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

1. Les $C_7^2 = 21$ tirages sont équiprobables. $A : C_3^2 + C_4^2 = 9$ tirages, $P(A) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$. B : « 0 + 2 » (la verte 0 avec l'une des trois boules 2) ou « 1 + 1 » (C_3^2 paires parmi les trois boules 1) : 6 tirages, $P(B) = \frac{2}{7}$. $A \cap B$: vertes $\{0, 2\}$ ou vertes $\{1, 1\}$: $P(A \cap B) = \frac{2}{21}$, $P_A(B) = \frac{2/21}{9/21} = \frac{2}{9}$. Comme $P(A)P(B) = \frac{6}{49} \neq \frac{2}{21}$, A et B ne sont **pas indépendants**.
2. Les numéros sont 0 (une fois), 1 (trois fois), 2 (trois fois) ; $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$:

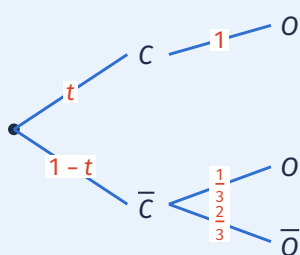
k	1	2	3	4
tirages	$0 + 1 : 3$	6	$1 + 2 : 3 \times 3 = 9$	$2 + 2 : C_3^2 = 3$
$P(X = k)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$E(X) = \frac{1+4+9+4}{7} = \boxed{\frac{18}{7}}, \quad E(X^2) = \frac{1+8+27+16}{7} = \frac{52}{7}, \quad V(X) = \frac{52}{7} - \frac{324}{49} = \boxed{\frac{40}{49}}. \quad E(7X - 15) = 7 \times \frac{18}{7} - 15 = \boxed{3},$$

$$V(7X - 15) = 49 \times \frac{40}{49} = \boxed{40}.$$

3. Trois épreuves identiques et indépendantes, « succès » A de probabilité $\frac{3}{7}$: $Y \sim B\left(3, \frac{3}{7}\right)$, $P(Y = k) = C_3^k \frac{3^k 4^{3-k}}{343}$: $\frac{64}{343}, \frac{144}{343}, \frac{108}{343}, \frac{27}{343}$. $P(Y = 1) = \boxed{\frac{144}{343}}$, $E(Y) = 3 \times \frac{3}{7} = \boxed{\frac{9}{7}}$, $V(Y) = 3 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{36}{49}}$.

■ Corrigé de l'exercice 10



1. Un élève qui a copié répond « oui » dans tous les cas ; sinon il ne dit « oui » que si le dé donne 1 ou 2. Probabilités totales : $P(O) = t \times 1 + (1 - t) \times \frac{1}{3} = \frac{1+2t}{3}$.

$$\frac{1+2t}{3} = 0,45 \iff 2t = 0,35 \iff t = 0,175 = \frac{7}{40}$$

2. $P_O(C) = \frac{P(C \cap O)}{P(O)} = \frac{t}{(1+2t)/3} = \frac{3t}{1+2t}$; pour $t = \frac{7}{40}$: $\frac{21/40}{54/40} = \frac{7}{18} \approx 0,39$. Si l'élève a répondu « non », il n'a pas copié : $P_{\bar{O}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = 0$.

3. $f(t) = \frac{3t}{1+2t}$, $f'(t) = \frac{3(1+2t)-6t}{(1+2t)^2} = \frac{3}{(1+2t)^2} > 0$: f croît de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1$. $f(t) \geq \frac{1}{2} \iff 6t \geq 1+2t \iff t \geq \frac{1}{4}$. Pour $t < 1$, $P_O(C) < 1$: un « oui » peut toujours venir du dé, ce n'est jamais une preuve (ici, l'élève qui a dit « oui » n'a probablement pas copié : $\frac{7}{18} < \frac{1}{2}$). C'est ce qui permet d'obtenir des réponses sincères.

■ Corrigé de l'exercice 11

1. 36 couples équiprobables ; somme 4 : (1, 3), (2, 2), (3, 1) ; somme 8 : (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) ; somme 12 : (6, 6) : $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Les 4 parties sont des épreuves de Bernoulli indépendantes : $X \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, $P(X = k) = C_4^k \frac{3^{4-k}}{256}$:

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1, V(X) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, P(X \geq 2) = \frac{54+12+1}{256} = \frac{67}{256} \approx 0,26.$$

2. Le joueur paie $4 \times 2 = 8$ DH et reçoit $6X$: $G = 6X - 8$, $E(G) = 6 - 8 = -2$ DH, $V(G) = 36 \times \frac{3}{4} = 27$. Si une partie gagnée rapporte a DH : $E(aX - 8) = a - 8 = 0 \iff a = 8$ DH.

3. $P(\text{au moins un gain}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq 0,95 \iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,75} \approx 10,4$ ($\ln 0,75 < 0$ renverse l'inégalité) : $n = 11$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. Pour G_1 , $G_1^2 = 1$; pour G_2 , $E(G_2^2) = \frac{35^2+36}{37} = \frac{1261}{37}$, d'où $V(G_2) = \frac{1261}{37} - \frac{1}{37^2} = \frac{1261 \times 37 - 1}{1369}$:

gain	valeurs	probabilités	espérance	variance	écart-type
G_1 (« rouge »)	1 ; -1	$\frac{18}{37}$; $\frac{19}{37}$	$-\frac{1}{37}$	$\frac{1368}{1369}$	≈ 1
G_2 (« plein »)	35 ; -1	$\frac{1}{37}$; $\frac{36}{37}$	$-\frac{1}{37}$	$\frac{46\,656}{1369}$	$\frac{216}{37} \approx 5,84$

Même perte moyenne ($\approx 2,7$ centimes par DH misé), mais le « plein » est bien plus risqué.

2. Les parties sont indépendantes : $N \sim B\left(10, \frac{1}{37}\right)$. Chaque partie gagnée rapporte 35, chaque partie perdue coûte 1 : $T = 35N - (10 - N) = 36N - 10$. $E(T) = 36 \times \frac{10}{37} - 10 = -\frac{10}{37}$, $V(T) = 36^2 \times 10 \times \frac{1}{37} \times \frac{36}{37} = \frac{466\,560}{1369} \approx 340,8$. $T > 0 \iff N \geq 1$: $P(T > 0) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^{10} \approx 0,240$.

3. $R \sim B\left(10, \frac{18}{37}\right)$ parties gagnées, $T' = R - (10 - R) = 2R - 10$: $E(T') = -\frac{10}{37}$, $V(T') = 4 \times 10 \times$

$\frac{18}{37} \times \frac{19}{37} = \frac{13\,680}{1369} \approx 9,99$. $T' > 0 \iff R \geq 6 : P(T' > 0) = \sum_{k=6}^{10} C_{10}^k \left(\frac{18}{37}\right)^k \left(\frac{19}{37}\right)^{10-k} \approx \boxed{0,344}$ (et $P(T' = 0) \approx 0,245$).

Même espérance, mais des risques très différents : sur « rouge », on finit gagnant plus souvent (0,344 contre 0,240), avec de petits gains ; en « plein », on gagne rarement, mais beaucoup (26 DH dès une partie gagnée) : c'est ce que mesure l'écart-type (18,5 contre 3,2).

■ Corrigé de l'exercice 13



1. Badr obtient au moins un 6 avec $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$. Un tour est sans vainqueur avec $r = \frac{5}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{125}{216}$. Les tours étant indépendants, Ali gagne au tour j ($j = 1, 2, 3$) avec la probabilité $r^{j-1} \times \frac{1}{6}$; ces événements sont incompatibles : $P(A) = \frac{1}{6}(1 + r + r^2)$.

De même $P(B) = \frac{5}{6} \times \frac{11}{36}(1 + r + r^2) = \frac{55}{216}(1 + r + r^2)$ et $P(\text{nulle}) = r^3$. Avec $1 + r + r^2 = \frac{89\,281}{46\,656}$: $P(A) \approx 0,319$, $P(B) \approx 0,487$, $P(\text{nulle}) = r^3 \approx 0,194$ (somme 1 ✓).

2. $P_{A \cup B}(A) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{1/6}{1/6 + 55/216} = \frac{36}{36 + 55} = \frac{36}{91} \approx 0,40$. Avec m tours au plus, $P(A)$ et $P(B)$ sont multipliés par le même facteur $1 + r + \dots + r^{m-1}$: la réponse **ne dépend pas** de m .

3. Après un échec d'Ali, Badr gagne le tour avec $q_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$; comme en 2., $P(A) > P(B) \iff \frac{1}{6} > \frac{5}{6} q_k \iff \left(\frac{5}{6}\right)^k > \frac{4}{5}$. La suite $\left(\frac{5}{6}\right)^k$ décroît et $\left(\frac{5}{6}\right)^1 > 0,8 > \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,69$: Ali n'est favori que pour $\boxed{k = 1}$.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. n épreuves indépendantes, succès « obtenir 6 » : $X_n \sim B\left(n, \frac{1}{6}\right)$, $P(X_n = k) = C_n^k \frac{5^{n-k}}{6^n}$, $E(X_n) = \frac{n}{6}$, $V(X_n) = \frac{5n}{36}$ (pour $n = 12$: $E = 2$, $V = \frac{5}{3}$).

$P(E_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx \boxed{0,665}$; $P(E_2) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx \boxed{0,619}$; $P(E_3) = 1 - \sum_{k=0}^2 C_{18}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{18-k} \approx \boxed{0,597}$. E_1 est le plus probable (réponse de Newton), bien que les trois paris demandent « autant de 6 qu'on en attend en moyenne ».

2. $q_n = \frac{n}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{5}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \geq 1 \iff 5n + 5 \geq 6n \iff n \leq 5$, avec égalité pour $n = 5$. Donc $q_1 < \dots < q_5 = q_6 > q_7 > \dots$: q_n est maximale pour $\boxed{n = 5 \text{ et } n = 6}$, et vaut $q_5 = \frac{5}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx \boxed{0,402}$.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. CASABLANCA a 10 lettres : 4 A, 2 C, et S, B, L, N. Anagrammes : $\frac{10!}{4!2!} = \boxed{75\,600}$, équiprobables.

a) On complète A...A par les 8 lettres restantes (2 A, 2 C, S, B, L, N) : $\frac{8!}{2!2!} = 10\,080$, $P = \frac{2}{15}$ ($= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$).

b) Le bloc AAAA et les 6 autres lettres (2 C) : $\frac{7!}{2!} = 2520$, $P = \frac{1}{30}$.

c) On écrit les 6 autres lettres ($\frac{6!}{2!} = 360$ façons) ; les A vont dans 4 des 7 intervalles (avant, entre, après), au plus un par intervalle : $C_7^4 = 35$. $360 \times 35 = 12\,600$, $P = \frac{1}{6}$.

2. $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$ alignements équiprobables. Bleues aux bouts : on aligne 4 R et 3 V au milieu : $C_7^3 = 35$, $P = \frac{1}{36}$. Couleurs groupées : $3! = 6$ ordres des blocs, $P = \frac{1}{210}$.

■ Corrigé de l'exercice 16

1. 3 dés indépendants, succès « le numéro sort » ($\frac{1}{6}$) : $N \sim B\left(3, \frac{1}{6}\right)$. $G = k$ si $N = k \geq 1$, $G = -1$ si $N = 0$:

N	0	1	2	3
G	-1	1	2	3
probabilité	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$E(G) = \frac{-125+75+30+3}{216} = -\frac{17}{216} \approx -0,079 ; E(G^2) = \frac{125+75+60+9}{216} = \frac{269}{216}, V(G) = \frac{269}{216} - \frac{17^2}{216^2} = \frac{57815}{46656},$$

$$\sigma(G) \approx [1,11].$$

$$E(N) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^3 k P(N = k), \text{ donc } E(G) = \sum_{k=1}^3 k P(N = k) - P(N = 0) = \frac{1}{2} - \frac{125}{216} = -\frac{17}{216} \checkmark.$$

2. $P(G > 0) = P(N \geq 1) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0,42 < \frac{1}{2}$. L'erreur : les événements « le numéro sort sur le dé i » ne sont pas incompatibles, on ne peut pas ajouter leurs probabilités ; $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ est $E(N)$, le nombre moyen de dés montrant le numéro.

27

Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

1. Une répartition est la liste des boîtes des boules $1, \dots, n$. Aucune boîte vide $\iff$ les n boules sont dans n boîtes distinctes (une permutation) : $P = \frac{n!}{n^n}$. Une seule boîte vide $\iff$ une boîte vide, une boîte avec 2 boules, les autres avec 1. On choisit la boîte vide (n), la boîte double ($n-1$), ses deux boules (C_n^2), puis on place les $n-2$ autres boules une par boîte $((n-2)!) : n(n-1)(n-2)! C_n^2 = C_n^2 n!$ répartitions, d'où $\frac{C_n^2 n!}{n^n}$.
2. $4^4 = 256$ répartitions : $V = 0 : 24$; $V = 1 : 6 \times 24 = 144$; $V = 3 : 4$ (tout dans une boîte) ; $V = 2$: deux boîtes vides ($C_4^2 = 6$), et les 4 boules dans les 2 autres sans en laisser une vide ($2^4 - 2 = 14$) : 84, $P(V = 2) = \frac{84}{256} = \frac{21}{64}$ (et $24 + 144 + 84 + 4 = 256 \checkmark$). $E(V) = \frac{144+168+12}{256} = \frac{81}{64}$. Une boîte donnée est vide dans $3^4 = 81$ répartitions, avec la probabilité $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, et $4 \times \frac{81}{256} = \frac{81}{64} = E(V)$. Ce n'est pas un hasard : $256 E(V) = \sum V$ (sur toutes les répartitions) compte les couples (répartition, boîte vide), et chacune des 4 boîtes est vide dans 81 répartitions.

■ Corrigé de l'exercice 18

1. Les C_N^n tirages sont équiprobables ; $X = k$: k blanches parmi a et $n - k$ autres parmi $N - a$.

$$k C_a^k = \frac{k a!}{k! (a-k)!} = a \frac{(a-1)!}{(k-1)! (a-k)!} = a C_{a-1}^{k-1}. \text{ Avec Vandermonde } (\sum_j C_{a-1}^j C_{N-a}^{n-1-j} = C_{N-1}^{n-1}) :$$

$$E(X) = \frac{a}{C_N^n} \sum_{k \geq 1} C_{a-1}^{k-1} C_{N-a}^{n-k} = \frac{a C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \boxed{\frac{na}{N}} \quad \left(C_N^n = \frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1} \right).$$

2. De même $k(k-1) C_a^k = a(a-1) C_{a-2}^{k-2}$, donc $E(X(X-1)) = \frac{a(a-1) C_{N-2}^{n-2}}{C_N^n} = \frac{n(n-1)a(a-1)}{N(N-1)}$ (formule encore vraie, avec $0 = 0$, si $n = 1$ ou $a = 1$). Comme $\sum k^2 p_k = \sum k(k-1) p_k + \sum k p_k$:

$$V(X) = \frac{n(n-1)a(a-1)}{N(N-1)} + \frac{na}{N} - \frac{n^2 a^2}{N^2} = \frac{na}{N} \cdot \frac{(n-1)(a-1)N + N(N-1) - na(N-1)}{N(N-1)} = \frac{na}{N} \cdot \frac{(N-a)(N-n)}{N(N-1)},$$

$$\text{soit } V(X) = n \frac{a}{N} \left(1 - \frac{a}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}.$$

3. Avec remise, on aurait $B\left(n, \frac{a}{N}\right)$: même espérance $\frac{na}{N}$, variance $n \frac{a}{N} \left(1 - \frac{a}{N} \right)$, plus grande car $\frac{N-n}{N-1} \leq 1$ (égalité si $n = 1$). Urne U : $N = 9$, $a = 4$, $n = 3$: $E(X) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ et $V(X) = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{5}{9}$, comme dans le cours ✓.

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $p_1 = \frac{1}{2}$ (premier saut de 1) ; $p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (sauts « 2 » ou « 1, 1 ») ; p_3 : « 1, 1, 1 », « 1, 2 », « 2, 1 » : $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.

Regardons le dernier saut avant la marche $n+2$: la grenouille se pose sur $n+2$ si et seulement si elle se pose sur $n+1$ puis saute de 1, ou se pose sur n puis saute de 2 (et alors elle évite $n+1$: cas incompatibles). Le saut qui suit un atterrissage est indépendant des précédents :

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{2} p_n \quad (p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \checkmark).$$

2. $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2} (p_{n+1} - p_n)$: suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, de premier terme $p_1 - p_0 = -\frac{1}{2}$, donc $p_{k+1} - p_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$. En sommant (télescopage) :

$$p_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3/2} = \boxed{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}, \quad p_{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3072} = \boxed{\frac{683}{1024}}.$$

$p_n \rightarrow \frac{2}{3}$, inverse de la longueur moyenne $\frac{3}{2}$ d'un saut.

3. $T \in \{2, 3, 4\}$: $T = 2 \iff$ les deux premiers sauts valent 2 : $\frac{1}{4}$; $T = 4 \iff$ les trois premiers valent 1 : $\frac{1}{8}$; donc $P(T = 3) = \frac{5}{8}$. $E(T) = \frac{2 \times 2 + 3 \times 5 + 4 \times 1}{8} = \boxed{\frac{23}{8}}$.

■ Corrigé de l'exercice 20

1. $X_1 = 3$ (toutes les boules sont dans la première urne), $E(X_1) = 3$. Si $X_1 = 3$, la boule tirée est dans la 1^{re} urne avec $\frac{3}{4}$: $P(X_2 = 2) = \frac{3}{4}$, $P(X_2 = 4) = \frac{1}{4}$, $E(X_2) = \frac{5}{2}$. De 4 on passe à 3 ; de 2, à 1 ou 3 avec $\frac{1}{2}$: $P(X_3 = 3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$, $P(X_3 = 1) = \frac{3}{8}$, $E(X_3) = \frac{9}{4}$.

2. Si $X_n = k$, la première urne contient k des N boules équiprobables : $X_{n+1} = k - 1$ avec $\frac{k}{N}$, $k + 1$ avec $1 - \frac{k}{N}$. Par les probabilités totales (système complet $(X_n = k)_{0 \leq k \leq N}$), $P(X_{n+1} = j) = \sum_k P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = j)$, d'où

$$E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \left[(k-1) \frac{k}{N} + (k+1) \left(1 - \frac{k}{N} \right) \right] = \sum_{k=0}^N P(X_n = k) \left[\left(1 - \frac{2}{N} \right) k + 1 \right] = \left(1 - \frac{2}{N} \right) E(X_n) + 1.$$

3. Suite arithmético-géométrique, de point fixe $\frac{N}{2} : E(X_n) - \frac{N}{2} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(N - \frac{N}{2}\right)$, donc

$$E(X_n) = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \quad (N = 4 : 3, \frac{5}{2}, \frac{9}{4} \checkmark).$$

Comme $\left|1 - \frac{2}{N}\right| < 1$, $E(X_n) \rightarrow \frac{N}{2}$: en moyenne, les boules s'équilibrent entre les deux urnes (modèle de diffusion d'un gaz entre deux compartiments).

■ Corrigé de l'exercice 21

- Le premier Pile sort au lancer k (Face $k - 1$ fois, puis Pile, lancers indépendants) avec $\frac{1}{2^k}$; aucun Pile en n lancers : $\frac{1}{2^n}$. Donc $P(X_n = 2^k) = \frac{1}{2^k} (1 \leq k \leq n)$, $P(X_n = 0) = \frac{1}{2^n}$ (somme 1 $\checkmark$).
 $E(X_n) = \sum_{k=1}^n 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \boxed{n}$, $E(X_n^2) = \sum_{k=1}^n \frac{4^k}{2^k} = 2^{n+1} - 2$, $V(X_n) = 2^{n+1} - 2 - n^2$.
- $E(X_n) = n$: le jeu est équitable. $X_{20} > 20 \iff 2^k > 20 \iff k \geq 5 : P = \sum_{k=5}^{20} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2^{20}} \approx 0,0625$. Bien qu'équitable « en moyenne », le jeu fait perdre le joueur dans 15 cas sur 16 : l'espérance est portée par des gains énormes et très rares ($\sigma \approx 1448$ DH).
- $E = \sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{2^k} + \sum_{k=11}^{20} \frac{2^{10}}{2^k} = 10 + 2^{10} \left(\frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{20}}\right) = \boxed{11 - 2^{-10}}$: une banque limitée à 1024 DH fait passer le juste prix de 20 DH à environ 11 DH.

■ Corrigé de l'exercice 22

- $Y_n \sim B(n, p)$ (n pas indépendants, succès « avancer ») et $S_n = Y_n - (n - Y_n) = \boxed{2Y_n - n}$. $E(S_n) = 2np - n = \boxed{n(p - q)}$, $V(S_n) = 4V(Y_n) = \boxed{4npq}$. $S_n = k \iff Y_n = \frac{n+k}{2} : P(S_n = k) = C_n^{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}$ si $-n \leq k \leq n$ et $n + k$ est pair, 0 sinon.
- $P(S_{2m} = 0) = P(Y_{2m} = m) = C_{2m}^m (pq)^m$, et $pq = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. D'où $P(S_{2m} = 0) \leq \frac{C_{2m}^m}{4^m} = u_m$, avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.
- Pour $p = \frac{1}{2} : P(S_{2m} = 2j) = P(Y_{2m} = m + j) = \frac{C_{2m}^{m+j}}{4^m}$ et $\frac{C_{2m}^{m+j}}{C_{2m}^m} = \frac{m! m!}{(m+j)!(m-j)!} = \prod_{i=1}^j \frac{m-i+1}{m+i}$. Pour $1 \leq i \leq j \leq \frac{m}{2}$, chaque facteur vaut $1 - \frac{2i-1}{m+i} \geq 1 - \frac{2j}{m} \geq 0$ (car $\frac{2i-1}{m+i} < \frac{2j}{m} \leq \frac{2j}{m}$) ; l'inégalité de Bernoulli $(1 - x)^j \geq 1 - jx$ ($0 \leq x \leq 1$) donne $P(S_{2m} = 2j) \geq u_m \left(1 - \frac{2j}{m}\right)^j \geq u_m \left(1 - \frac{2j^2}{m}\right)$.
 Si $4j^2 \leq m$ (alors $j \leq \frac{\sqrt{m}}{2}$), on obtient $P(S_{2m} = \pm 2j) \geq \frac{u_m}{2}$ (même loi pour $-2j$, par symétrie : $p = q$).
 Soit J le plus grand entier tel que $4J^2 \leq m : J > \frac{\sqrt{m}}{2} - 1$. Les $2J + 1$ événements $(S_{2m} = 2j)$, $-J \leq j \leq J$, sont incompatibles, donc $(2J + 1) \frac{u_m}{2} \leq 1$; et $2J + 1 > \sqrt{m} - 1 : \boxed{u_m \leq \frac{2}{\sqrt{m} - 1}}$ ($m \geq 2$), d'où $\boxed{u_m \rightarrow 0}$.
 Le terme central de la loi $B\left(2m, \frac{1}{2}\right)$, le plus grand, tend vers 0 : la loi « s'étale » sur environ $\sqrt{m}$ valeurs.

■ Corrigé de l'exercice 23

- a) Les n blanches donnent $nx + ny = n$, donc $x + y = 1$ et $\pi = \frac{x+y}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$, quelle que soit la répartition des couleurs. b) $x = 1, y = \frac{n-1}{2n-1} : \pi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n-1}{2n-1}\right) = \boxed{\frac{3n-2}{2(2n-1)}}$.
- Probabilités totales (chaque urne est choisie avec $\frac{1}{2}$) : $\pi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. On compte les blanches : $sx + (2n - s)y = n$.

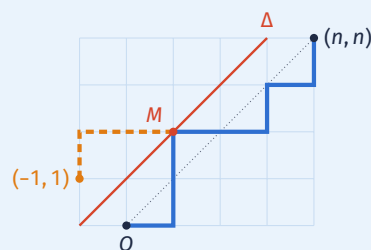
Si $s < n$: $y = \frac{n-sx}{2n-s}$ et $x+y = \frac{n}{2n-s} + x \frac{2n-2s}{2n-s} \leq \frac{3n-2s}{2n-s} = 1 + \frac{n-s}{2n-s}$, car $2n-2s > 0$ et $x \leq 1$. Or $\frac{n-s}{2n-s} = 1 - \frac{n}{2n-s}$ décroît avec $s \geq 1$: $x+y \leq 1 + \frac{n-1}{2n-1}$, d'où $\pi \leq \frac{3n-2}{2(2n-1)}$. Si $s > n$, on échange les rôles des urnes ; si $s = n$, $\pi = \frac{1}{2} < \frac{3n-2}{2(2n-1)}$.

L'égalité impose $s = 1$ et $x = 1$ (ou l'inverse) : π est maximale quand **une urne contient une seule boule, blanche**, et l'autre toutes les autres. Pour $n = 50$: $\pi_{\max} = \frac{148}{198} = \frac{74}{99} \approx 0,747$.

28 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- Le long d'un chemin, $d = y - x$ varie de ± 1 à chaque pas et vaut 0 en O. S'il atteint une valeur ≥ 1 , il passe d'abord par 1 : le chemin a un point sur Δ . Réciproquement, un point de Δ vérifie $y = x + 1 > x$.
- La symétrie par rapport à Δ est $s(x, y) = (y - 1, x + 1)$: elle échange pas horizontaux et verticaux, fixe Δ et change d en $2 - d$. Soit M le premier point du mauvais chemin sur Δ : en remplaçant la partie $O \rightarrow M$ par sa symétrique, on obtient un chemin de $s(O) = (-1, 1)$ à (n, n) . Inversement, un chemin de $(-1, 1)$ ($d = 2$) à (n, n) ($d = 0$) rencontre Δ ; en symétrisant la partie qui précède son premier point sur Δ , on obtient un mauvais chemin. Avant M, on a $d \leq 0$ d'un côté et $d \geq 2$ de l'autre : le premier point sur Δ est conservé et les deux opérations sont réciproques. Il y a donc autant de mauvais chemins que de chemins de $(-1, 1)$ à (n, n) ($n + 1$ pas horizontaux, $n - 1$ verticaux) : $C_{2n}^{n+1} = \frac{n}{n+1} C_{2n}^n$, et



$$c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) C_{2n}^n = \frac{C_{2n}^n}{n+1} \quad c_1, \dots, c_5 = 1, 2, 5, 14, 42.$$

- Les $(2n)!$ ordres des personnes sont équiprobables et chaque mot de n lettres P (pièce) et n lettres B (billet) provient de $n!n!$ ordres : les C_{2n}^n mots sont équiprobables. On code P par $(1, 0)$ et B par $(0, 1)$. Une personne à billet trouve une pièce en caisse si et seulement si, après son passage, le nombre y de billets ne dépasse pas le nombre x de pièces : le caissier rend toujours la monnaie si et seulement si le chemin est bon. $P = \frac{c_n}{C_{2n}^n} = \frac{1}{n+1}$. Avec $m \geq n$ pièces : chemins de O à (m, n) , et la même réflexion associe aux mauvais les chemins de $(-1, 1)$ à (m, n) (au point final, $d = n - m \leq 0$) : $P = 1 - \frac{C_{m+n}^{n-1}}{C_{m+n}^n} = 1 - \frac{n}{m+1} = \frac{m-n+1}{m+1}$; $m = 6, n = 4$: $\frac{3}{7}$.

■ Corrigé de l'exercice 25

- AAAB (scores 1-0, 2-0, 3-0, 3-1) et AABA conviennent ; ABAA (1-1 au 2^e bulletin) et BAAA non : $P(T) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Après k bulletins, le chemin est au point (x, y) (voix de A, de B) ; $T \iff x > y$ en tout point autre que O. Si T : le premier bulletin est pour A, et aucun point autre que O n'est sur $y = x$. Réciproquement, $d = y - x$ vaut -1 après le premier pas, varie de ± 1 et ne s'annule plus : il reste < 0 .

3. La symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$ échange les deux sortes de pas et fixe $y = x$. Un chemin commençant par $(1, 0)$ et retouchant $y = x$ en un premier point $R \neq O$ devient, après symétrie de la partie $O \rightarrow R$, un chemin commençant par $(0, 1)$. Inversement, un chemin commençant par $(0, 1)$ ($d = 1$) finit en (a, b) ($d = b - a < 0$) : il touche $y = x$ en un premier point $R \neq O$, et la même opération le ramène. Bijection : les chemins pour T sont au nombre de $C_{a+b-1}^b - C_{a+b-1}^{b-1}$ (tous ceux qui commencent par $(1, 0)$, moins ceux qui commencent par $(0, 1)$). Or $\frac{C_{a+b-1}^b}{C_{a+b}^b} = \frac{a}{a+b}$ et $\frac{C_{a+b-1}^{b-1}}{C_{a+b}^b} = \frac{b}{a+b}$:
- $$P(T) = \frac{a-b}{a+b} \quad (a = 3, b = 1 : \frac{1}{2} \checkmark).$$
4. Sans égalité, d ne s'annule jamais après O , donc garde le signe final (A en tête) : c'est T .
 $P(\text{au moins une égalité}) = 1 - \frac{6-4}{10} = \frac{4}{5}.$

■ Corrigé de l'exercice 26

1. $d_1 = 0, d_2 = 1$ (échange), $d_3 = 2$ ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$). La personne 1 reçoit le chapeau de $j \neq 1$: $n - 1$ choix, chacun donnant le même nombre de cas. Si j reçoit le chapeau de 1, les $n - 2$ autres se partagent leurs propres chapeaux, aucun ne recevant le sien : d_{n-2} cas. Sinon, les personnes 2, ..., n se partagent les chapeaux autres que celui de j , personne n'ayant le sien et j n'ayant pas celui de 1 : en rebaptisant « chapeau de j » le chapeau de 1, ce sont les d_{n-1} cas de $n - 1$ personnes. D'où $d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.
2. $u_n = d_n - n d_{n-1} = (n - 1)d_{n-2} - d_{n-1} = -u_{n-1}$ et $u_1 = d_1 - d_0 = -1$: $d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$. En divisant par $n!$: $p_n - p_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$, et $p_0 = 1$, d'où $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. $d_4 = 9, d_5 = 44, d_6 = 265, d_7 = 1854, d_8 = 14\,833$ (c'est aussi le nombre de placements de 8 tours de l'exercice 1 hors de la diagonale).
3. $p_{2m+2} - p_{2m} = \frac{1}{(2m+2)!} - \frac{1}{(2m+1)!} < 0$, $p_{2m+3} - p_{2m+1} = \frac{1}{(2m+3)!} - \frac{1}{(2m+2)!} > 0$, $p_{2m+1} - p_{2m} = -\frac{1}{(2m+1)!} \rightarrow 0$: les suites sont adjacentes, de limite commune $\frac{1}{e}$, avec $p_{2m+1} \leq \frac{1}{e} \leq p_{2m}$. Si n est pair : $0 \leq p_n - \frac{1}{e} \leq p_n - p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$; si n est impair : $0 \leq \frac{1}{e} - p_n \leq p_{n+1} - p_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Comme $9! = 362\,880 < 10^6 \leq 10!$, l'écart est $\leq 10^{-6}$ dès $n = 9$: au-delà de quelques personnes, $P(\text{personne n'a son chapeau}) \approx \frac{1}{e} \approx 0,368$.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. Le couple des anniversaires de i et j est l'un des N^2 couples équiprobables, dont N égaux : $P(E_{ij}) = \frac{1}{N}$. Le contraire de « dates distinctes » est la réunion des C_n^2 événements E_{ij} ; inégalité de Boole : $p_n \leq \frac{C_n^2}{N} = \frac{n(n-1)}{2N}$. Si $N = 365$ et $n \leq 19$: $p_n \leq \frac{19 \times 18}{730} = \frac{342}{730} < \frac{1}{2}$.
2. $g(x) = \ln(1 - x) + x + x^2$: $g'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 + 2x = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $g(0) = 0$, donc $g \geq 0$. Si $n \leq \frac{N}{2}$, les $x = \frac{k}{N}$ ($k \leq n - 1$) sont dans $[0, \frac{1}{2}]$ et

$$\ln q_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{N}\right) \geq -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \geq -\frac{n^2}{2N} - \frac{n^3}{3N^2},$$

car $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n^2}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq \frac{n^3}{3}$. On conclut par croissance de l'exponentielle.

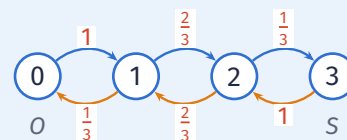
3. $q_N \leq 1 - \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{2}$ (on garde le dernier facteur) : s_N existe et $s_N \leq N$. Soit n_1 le plus petit entier $\geq 1 + \sqrt{2N \ln 2}$; alors $n_1 < 2 + \sqrt{2N \ln 2}$. Si $n_1 \leq N$: $n_1(n_1 - 1) \geq (n_1 - 1)^2 \geq 2N \ln 2$, donc $q_{n_1} \leq e^{-n_1(n_1-1)/(2N)} \leq \frac{1}{2}$ et $s_N \leq n_1$; si $n_1 > N$: $s_N \leq N < n_1$. Dans les deux cas, $s_N \leq 2 + \sqrt{2N \ln 2}$.

Pour $N \geq 16$, on a $2 + \sqrt{2N \ln 2} \leq \frac{N}{2}$, donc $s = s_N \leq \frac{N}{2}$ et, avec 2. et $q_s \leq \frac{1}{2} : \frac{s^2}{2N} + \frac{s^3}{3N^2} \geq \ln 2$. Posons $t_N = \frac{s_N}{\sqrt{N}} \leq \sqrt{2 \ln 2} + \frac{2}{\sqrt{N}} \leq 2 : t_N^2 \geq 2 \ln 2 - \frac{2t_N^3}{3\sqrt{N}} \geq 2 \ln 2 - \frac{16}{3\sqrt{N}}$. Par encadrement, $\boxed{\frac{s_N}{\sqrt{N}} \rightarrow \sqrt{2 \ln 2} \approx 1,18}$.

Pour $N = 365$, $\sqrt{730 \ln 2} \approx 22,5$: très proche de $s_{365} = 23$.

■ Corrigé de l'exercice 28

- On numérote les sommets par des triplets de 0 et 1, avec $O = (0, 0, 0)$: chaque arête change une coordonnée, et la distance à O est le nombre de 1. D'un sommet à la distance d , d voisins sont à la distance $d - 1$ et $3 - d$ à la distance $d + 1$: $P_{(D_n=d)}(D_{n+1} = d - 1) = \frac{d}{3}$, $P_{(D_n=d)}(D_{n+1} = d + 1) = \frac{3-d}{3}$ (schéma). Chaque pas change D de ± 1 et $D_0 = 0$: D_n a la parité de n .



- $D_{2k} \in \{0, 2\}$. En deux pas, on revient en 0 depuis 0 avec $1 \times \frac{1}{3}$, depuis 2 avec $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$; probabilités totales : $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{9}(1 - a_k) = \frac{1}{9}a_k + \frac{2}{9}$. Point fixe $\frac{1}{4}$: $a_k - \frac{1}{4} = \frac{1}{9^k}(a_0 - \frac{1}{4})$, d'où $\boxed{a_k = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 9^k}}$.
Puis $P(D_{2k+1} = 3) = \frac{1}{3}P(D_{2k} = 2) = \frac{1-a_k}{3} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot 9^k}}$. Les deux tendent vers $\frac{1}{4}$: aux instants pairs, la fourmi est asymptotiquement uniforme sur les 4 sommets à distance paire.
- Entre les instants $2k$ et $2k + 2$, sans passer par S : de 0, on revient en 0 ($\frac{1}{3}$) ou on va en 2 ($\frac{2}{3}$) ; de 2, on va en 0 ($\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$) ou on revient en 2 par 1 ($\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$), le pas $2 \rightarrow 3$ étant exclu. D'où $b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k + \frac{2}{9}c_k$ et $c_{k+1} = \frac{2}{3}b_k + \frac{4}{9}c_k$, avec $b_1 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{2}{3}$. Si $c_k = 2b_k$: $b_{k+1} = \frac{7}{9}b_k$ et $c_{k+1} = \frac{14}{9}b_k = 2b_{k+1}$ (récurrence) ; alors $b_{k+1} + c_{k+1} = \frac{7}{9}(b_k + c_k)$ et $\boxed{b_k + c_k = \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}}$.
- Premier passage en S à l'instant $2k + 1$ ($k \geq 1$) : être à la distance 2 à l'instant $2k$ sans être passé par S , puis aller en S : $\frac{1}{3}c_k = \boxed{\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}}$. En sommant (ou : $1 - b_k - \frac{2}{3}c_k$), S est atteint au plus tard à l'instant $2k + 1$ avec la probabilité $\boxed{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^k} \rightarrow 1$: la fourmi finit presque sûrement par atteindre S .

■ Corrigé de l'exercice 29

- 2 pas : seuls ++ et -- évitent 0 : $\rho_1 = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$. 4 pas : il faut $S_2 = \pm 2$; depuis $S_2 = 2$, les suites ++, +-, -- évitent 0, pas -- : 3 suites, autant du côté négatif : $\rho_2 = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$.
- Une telle suite a $a = n + k$ pas + et $b = n - k$ pas -. En lisant + comme une voix pour A et - comme une voix pour B, « $S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0$ » signifie « A est strictement en tête tout au long du dépouillement ». Si $k < n$ ($b \geq 1$), l'exercice 25 donne $\frac{a-b}{a+b} C_{2n}^{n+k} = \frac{2k}{2n} C_{2n}^{n+k} = \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k}$ suites ; si $k = n$, seule ++ ... + convient, et $\frac{n}{n} C_{2n}^{2n} = 1$ ✓.
- $C_{2n-1}^{n+k-1} - C_{2n-1}^{n+k} = \frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k)!} [(n+k) - (n-k)] = \frac{2k}{2n} \cdot \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} = \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k}$. En sommant pour $k = 1, \dots, n$ (télescopage) : il y a $C_{2n-1}^n - C_{2n-1}^0 = C_{2n-1}^n = \frac{1}{2} C_{2n}^n$ suites strictement positives (car $C_{2n}^n = C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n = 2C_{2n-1}^n$). Les pas valant ± 1 , une suite qui évite 0 garde un signe constant ; par symétrie (+ $\leftrightarrow$ -), il y a autant de suites négatives. D'où $\boxed{\rho_n = \frac{C_{2n}^n}{4^n} = P(S_{2n} = 0)}$ ($\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = \frac{3}{8}$ ✓). Avec

l'exercice 22, $p_n = u_n \rightarrow 0$: la probabilité de ne jamais revenir en 0 pendant $2n$ pas tend vers 0 ; le pion finit presque sûrement par revenir à son point de départ.

■ Corrigé de l'exercice 30

1. Parmi les 5 segments issus d'un point v , 3 au moins ont la même couleur (sinon il y en aurait au plus $2+2=4$), disons rouges, vers a, b, c . Si l'un des segments ab, bc, ca est rouge, il forme avec v un triangle rouge ; sinon abc est un triangle bleu. Pour 5 personnes : côtés d'un pentagone en rouge, diagonales en bleu ; chaque couleur forme un « cycle » de 5 points (pentagone, étoile) sans triangle.
2. Chaque coloriage des C_k^2 segments joignant les k points se prolonge de $2^{C_n^2 - C_k^2}$ façons : $P(\text{tous rouges}) = \frac{2^{C_n^2 - C_k^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{-C_k^2}$, de même pour bleu, d'où $2^{1-C_k^2}$ (incompatibles). Soit M_S l'événement « les segments joignant les points de S sont de même couleur », pour chacune des C_n^k parties S à k éléments. Boole : $P(\text{réunion des } M_S) \leq C_n^k 2^{1-C_k^2} < 1$, donc l'événement contraire, « aucun M_S », est de probabilité > 0 : il n'est pas vide, un coloriage convient.
3. $C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}$. Si $n \leq 2^{k/2}$: $C_n^k 2^{1-C_k^2} \leq \frac{2^{k^2/2} 2^{1-k(k-1)/2}}{k!} = \frac{2^{1+k/2}}{k!}$. Or $2^{1+k/2} < k!$ pour $k \geq 3$: vrai pour $k=3$ ($4\sqrt{2} \approx 5,66 < 6$), et si c'est vrai pour k , $2^{1+(k+1)/2} = \sqrt{2} \cdot 2^{1+k/2} < \sqrt{2} k! < (k+1)!$. Pour $k=20$, $n=1024=2^{20/2}$: on peut imaginer 1024 personnes parmi lesquelles **aucun groupe de 20 ne se connaît deux à deux, ni ne s'ignore deux à deux** (Erdős, 1947), alors que 6 personnes suffisent pour forcer un tel groupe de 3 (question 1). L'existence est prouvée sans construire l'exemple.

29

Corrigés : dénombrement

■ Corrigé de l'exercice 31

1. Un signal de k symboles est une k -liste de l'ensemble {point, trait} : il y en a 2^k . Principe additif et somme géométrique : $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$. Pour $n=4$, $30 < 36$; pour $n=5$, $62 \geq 36$: il faut $n=5$ (c'est le cas des chiffres en Morse).
2. Chacun des 6 points a 2 états : $2^6 = 64$ configurations, dont une vide, d'où 63 caractères. On choisit les 3 points en relief : $C_6^3 = 20$. Au moins 2 points : on retire les $C_6^1 = 6$ caractères à un seul point : $63 - 6 = 57$.
3. a) 7 doubles et $C_7^2 = 21$ dominos à deux nombres distincts : 28 dominos. Si $0 \leq i \leq j \leq 6$, alors $\{i, j+1\}$ est une partie à 2 éléments de $\{0, \dots, 7\}$ ($i < j+1 \leq 7$) ; réciproquement, à $\{x, y\}$ ($x < y$) correspond le domino $\{x, y-1\}$. Ces applications sont réciproques : $28 = C_8^2$.
b) Le nombre k figure sur les 7 dominos $\{k, j\}$ ($0 \leq j \leq 6$), deux fois sur le double : il apparaît 8 fois. Total : $8(0+1+\dots+6) = 8 \times 21 = 168$ points.
c) Il y a $C_{28}^2 = 378$ paires de dominos, équiprobables. Pour chaque nombre k , les 7 dominos portant k donnent $C_7^2 = 21$ paires ; deux dominos distincts ont au plus un nombre en commun, donc aucune paire n'est comptée deux fois : $7 \times 21 = 147$ paires favorables, et $P = \frac{147}{378} = \frac{7}{18}$.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. a) On choisit les 4 élèves de la salle 1 ($C_{12}^4 = 495$ choix), puis ceux de la salle 2 parmi les 8 restants ($C_8^4 = 70$) ; les 4 derniers vont en salle 3. Principe multiplicatif : $C_{12}^4 \times C_8^4 = \frac{12!}{4!8!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{12!}{(4!)^3} = 495 \times 70 = \boxed{34\,650}$.
- b) Une répartition en groupes non numérotés donne $3! = 6$ répartitions numérotées (on attribue les trois groupes, distincts, aux trois salles) : $\frac{34\,650}{6} = \boxed{5775}$.
- c) Répartitions où Ali et Omar sont ensemble : salle commune (3 choix), leurs 2 coéquipiers parmi les 10 autres ($C_{10}^2 = 45$), puis les 8 restants dans les deux autres salles ($C_8^4 = 70$) : $3 \times 45 \times 70 = 9450$, et $P = \frac{9450}{34\,650} = \boxed{\frac{3}{11}}$. (Vue directe : Omar occupe l'une des 11 places laissées par Ali, dont 3 sont dans le groupe d'Ali.)
2. a) $a_1 = 1$. Pour quatre élèves A, B, C, D : $\{AB, CD\}, \{AC, BD\}, \{AD, BC\}$, donc $\boxed{a_2 = 3}$.
- b) Parmi $2n + 2$ élèves, fixons-en un, e . Son partenaire peut être choisi de $2n + 1$ façons, puis les $2n$ autres élèves sont répartis en n binômes de a_n façons : $\boxed{a_{n+1} = (2n + 1)a_n}$. Avec $a_1 = 1$, une récurrence immédiate donne $a_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)$. En séparant facteurs pairs et impairs,

$$(2n)! = [1 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)] \times [2 \times 4 \times \dots \times 2n] = a_n \times 2^n n!, \quad \text{d'où} \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

$$a_3 = 1 \times 3 \times 5 = \boxed{15} \quad \text{et} \quad a_5 = 15 \times 7 \times 9 = \boxed{945}.$$

3. Les 945 répartitions sont équiprobables. Tous les binômes sont mixtes si et seulement si chaque fille a un garçon pour partenaire, chaque garçon étant pris une fois : c'est une bijection de l'ensemble des filles sur celui des garçons, d'où $5! = 120$ répartitions et $P = \frac{120}{945} = \boxed{\frac{8}{63}}$.
- Si Ali et Omar sont ensemble, les 8 autres forment 4 binômes : $a_4 = 105$ répartitions, et $P = \frac{105}{945} = \boxed{\frac{1}{9}}$ (le partenaire d'Ali est l'un des 9 autres élèves, avec la même chance).

■ Corrigé de l'exercice 33

1. Un match par paire d'équipes : $\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}}$ matchs. Chaque match a 2 vainqueurs possibles, d'où $\boxed{2C_n^2}$ résultats. Chaque match donne exactement une victoire : la somme des scores vaut $\boxed{C_n^2}$.
2. a) Deux équipes invaincues se sont rencontrées, et l'une a perdu ce match : contradiction.
- b) Soit I_k : « l'équipe k est invaincue ». Les $n - 1$ matchs de l'équipe k sont imposés et les $C_n^2 - (n - 1) = C_{n-1}^2$ autres sont libres : $\text{card}(I_k) = 2^{C_{n-1}^2}$, donc $P(I_k) = \frac{1}{2^{n-1}}$. Les I_k sont deux à deux incompatibles (question a), d'où $P(I_1 \cup \dots \cup I_n) = \sum_{k=1}^n P(I_k) = \boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}$ ($n = 4 : \frac{1}{2}$; $n = 6 : \frac{3}{16}$).
- c) Pour deux équipes $T \neq L$, « T invaincue et L sans victoire » impose les $n - 1$ matchs de T et les $n - 1$ matchs de L , le match $T-L$ étant commun (et gagné par T) : $2n - 3$ matchs imposés, donc une probabilité $\frac{1}{2^{2n-3}}$. Comme pour a), il y a au plus une équipe sans victoire : ces $n(n - 1)$ événements sont deux à deux incompatibles, et $P = \boxed{\frac{n(n-1)}{2^{2n-3}}}$ ($n = 3 : \frac{3}{4}$; $n = 4 : \frac{3}{8}$).

3. a) Chaque équipe joue $n - 1$ matchs : les scores sont n entiers distincts de $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, qui a n éléments, donc ce sont **tous** ces entiers. Montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 2$; elle est claire pour $n = 2$. Supposons-la vraie pour n équipes, et considérons $n + 1$ équipes de scores distincts $0, \dots, n$. L'équipe T de score n bat toutes les autres. Retirons T : chacune des n autres équipes avait perdu contre T , donc garde le même score dans le tournoi restreint, où les scores sont encore distincts. Par hypothèse, chacune y bat exactement les équipes de score inférieur ; avec T , qui bat tout le monde, la propriété est vraie pour $n + 1$.
- b) Un tel résultat est donc entièrement déterminé par le classement des équipes (l'équipe classée devant bat celle classée derrière) ; réciproquement, chacun des $n!$ classements définit ainsi un résultat, de scores $0, 1, \dots, n - 1$, et deux classements différents donnent deux résultats différents. Il y a $n!$ résultats favorables :

$$P = \frac{n!}{2^{C_n^2}}; \quad n = 4 : \frac{24}{64} = \frac{3}{8}; \quad n = 5 : \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}.$$

■ Corrigé de l'exercice 34

1. a) Pour une partie B de cardinal k , il y a 2^k parties $A \subset B$, et il y a C_n^k parties B de cardinal k . Principe additif, puis binôme : $\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = (1 + 2)^n = 3^n$.
- b) Si $A \subset B$, chaque élément x vérifie exactement l'une des conditions : $x \in A$; $x \in B$ et $x \notin A$; $x \notin B$. Réciproquement, le choix d'une situation pour chacun des n éléments définit un unique couple (A, B) avec $A \subset B$: on retrouve 3^n (n -listes d'un ensemble à 3 éléments).
2. $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \bar{B}$. L'application $(A, B) \mapsto (A, \bar{B})$ est une bijection de $P(E)^2$ sur lui-même (elle est sa propre réciproque), qui envoie les couples tels que $A \cap B = \emptyset$ sur les couples (A, B') tels que $A \subset B'$: il y en a 3^n . De même, $A \cup B = E \iff \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ (De Morgan), et $(A, B) \mapsto (\bar{A}, \bar{B})$ donne encore 3^n couples. Enfin $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ signifie $B = \bar{A}$: 2^n couples (le choix de A).
3. Soit T l'ensemble des triplets (x, A, B) tels que $x \in A \cap B$. En comptant d'abord par couple (A, B) : $\text{card}(T) = \sum \text{card}(A \cap B)$. En comptant d'abord par élément x : les couples tels que $x \in A$ et $x \in B$ s'obtiennent en choisissant librement la situation de chacun des $n - 1$ autres éléments (4 situations : dans A ou non, dans B ou non), soit 4^{n-1} couples. D'où $\sum \text{card}(A \cap B) = n 4^{n-1}$.
- Pour la réunion, $x \in A \cup B$ correspond à 3 des 4 situations de x : $\sum \text{card}(A \cup B) = 3n 4^{n-1}$.
4. $P(A \subset B) = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (pour $n = 3 : \frac{27}{64}$). Puis $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,01 \iff n \ln \frac{4}{3} > \ln 100 \iff n > \frac{\ln 100}{\ln \frac{4}{3}} \approx 16,008$: $n = 17$ ($\left(\frac{3}{4}\right)^{16} \approx 0,01002$ et $\left(\frac{3}{4}\right)^{17} \approx 0,0075$).

■ Corrigé de l'exercice 35

1. Pour $n = 1$: aucune corde, 1 région ; $n = 2$: 2 ; $n = 3$: le triangle et trois segments de disque, 4 ; $n = 4$: les deux diagonales du quadrilatère le coupent en 4, plus 4 segments de disque, 8 ; $n = 5$ (figure) : à l'intérieur du pentagone, 1 pentagone central, 5 pointes d'étoile et 5 triangles appuyés sur les côtés, plus 5 segments de disque, soit 16. On est tenté de conjecturer $r_n = 2^{n-1}$.
2. La droite (AC) partage le plan en deux demi-plans ouverts, qui contiennent chacun l'un des deux arcs ouverts d'extrémités A et C . Si B et D sont sur le même arc, le segment $[BD]$ est

dans un même demi-plan et ne rencontre pas (AC) . Sinon, $[BD]$ coupe (AC) en un point de $]BD[$, intérieur au disque ; or la partie de (AC) intérieure au disque est $]AC[$: les cordes se coupent à l'intérieur du disque.

Un point d'intersection intérieur est sur exactement deux cordes (pas de concours triple), qui n'ont pas d'extrémité commune (deux cordes issues d'un même point ne se recoupent pas) : on lui associe l'ensemble de leurs 4 extrémités. Réciproquement, nommons A, B, C, D quatre des n points dans l'ordre du cercle : parmi les trois façons de les associer en deux cordes, seule $\{[AC], [BD]\}$ donne des cordes sécantes (par ce qui précède). On a donc une bijection entre les points d'intersection et les parties à 4 éléments des n points : il y en a $\boxed{C_n^4}$.

- La nouvelle corde est coupée en m points distincts (pas de concours triple), donc partagée en $m + 1$ segments ; chacun traverse une région et la coupe en deux : le nombre de régions augmente de $m + 1$. On part du disque (1 région) et on trace les C_n^2 cordes (une par paire de points) ; si m_i est le nombre de points d'intersection sur la i^{e} corde tracée, avec les précédentes, alors $\sum m_i = C_n^4$ (chaque point d'intersection est compté une fois, quand on trace la seconde de ses deux cordes). Donc $r_n = 1 + \sum_i (m_i + 1) = \boxed{1 + C_n^2 + C_n^4}$.
- $r_6 = 1 + 15 + 15 = \boxed{31} \neq 32$: la conjecture est **fausse**. $r_{10} = 1 + 45 + 210 = \boxed{256} = 2^8$ (et non 2^9). La suite (r_n) est croissante, $r_{13} = 1 + 78 + 715 = 794 < 1000$ et $r_{14} = 1 + 91 + 1001 = 1093$: $\boxed{n = 14}$.
- La relation de Pascal donne $C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$ et $C_n^4 = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4$ (valable aussi avec la convention, et $1 = C_{n-1}^0$, d'où l'égalité. Si $2 \leq n \leq 5$, alors $n - 1 \leq 4$: la somme contient tous les C_{n-1}^k non nuls, donc vaut 2^{n-1} (binôme) ; et $r_1 = 1 = 2^0$. Dès $n = 6$, les termes $C_{n-1}^5, \dots$ manquent : $r_n < 2^{n-1}$. La régularité observée sur les premiers termes était un piège.

■ Corrigé de l'exercice 36

- La case 1 reçoit l'une des k couleurs, puis chaque case suivante l'une des $k - 1$ couleurs différentes de celle de la case précédente : $\boxed{k(k - 1)^{n-1}}$ coloriages corrects (principe multiplicatif).
 - a) Les trois secteurs sont deux à deux voisins : trois couleurs distinctes, dans l'ordre : $c_3 = A_k^3 = \boxed{k(k - 1)(k - 2)}$.
b) Les $k(k - 1)^{n-1}$ coloriages corrects de la bande (cases 1 à n) se partagent en deux catégories.
 - Cases 1 et n de couleurs différentes : ce sont exactement les coloriages corrects du camembert à n secteurs (c_n).
 - Cases 1 et n de même couleur : la case $n - 1$ diffère de la case n , donc de la case 1 ; les cases 1 à $n - 1$ forment un coloriage correct du camembert à $n - 1 \geq 3$ secteurs. Réciproquement, un tel coloriage se prolonge d'une seule façon (la case n prend la couleur de la case 1). Il y en a c_{n-1} .
- D'où $\boxed{c_n + c_{n-1} = k(k - 1)^{n-1}}$.
- c) Pour $n = 3$: $(k - 1)^3 - (k - 1) = (k - 1)(k^2 - 2k) = k(k - 1)(k - 2) = c_3$. Si la formule est vraie au rang $n - 1 \geq 3$, alors
- $$c_n = k(k - 1)^{n-1} - (k - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(k - 1) = (k - 1)^{n-1}(k - 1) + (-1)^n(k - 1) = (k - 1)^n + (-1)^n(k - 1).$$

- a) Pour $k = 4$: $c_6 = 3^6 + 3 = 732$, et $P = \frac{732}{4^6} = \frac{732}{4096} = \boxed{\frac{183}{1024} \approx 0,179}$.

b) Avec $k = 2$: $c_n = 1 + (-1)^n$, qui vaut 2 si n est pair (couleurs alternées) et 0 si n est impair. Avec $k = 3$: $c_n = 2^n + 2(-1)^n \geq 2^3 - 2 > 0$. Il faut donc 2 **couleurs si n est pair**, 3 **si n est impair** (une seule ne suffit jamais).

30 Corrigés : équiprobabilité

■ Corrigé de l'exercice 37

1. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, d divise 600 si et seulement si ses facteurs premiers sont parmi 2, 3, 5, avec des exposants au plus égaux à ceux de 600 : $d = 2^a 3^b 5^c$, (a, b, c) étant unique. Il y a $4 \times 2 \times 3 = 24$ diviseurs (principe multiplicatif).
2. A : $a \geq 1$, soit $3 \times 2 \times 3 = 18$ diviseurs : $P(A) = \frac{3}{4}$. B : $b = 1$ et $c \geq 1$: $4 \times 1 \times 2 = 8$, $P(B) = \frac{1}{3}$.
 $A \cap B$: $3 \times 1 \times 2 = 6$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, d'où $P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}$. C : a, b, c pairs, soit $a \in \{0, 2\}$, $b = 0, c \in \{0, 2\}$: 4 diviseurs (1, 4, 25, 100), $P(C) = \frac{1}{6}$.
3. a) Si $d \mid 600$, alors $\frac{600}{d}$ est un entier positif qui divise 600, et $\frac{600}{600/d} = d$: l'application est sa propre réciproque, c'est une bijection. Comme $24^2 = 576 < 600 < 625 = 25^2$, aucun diviseur ne vérifie $d^2 = 600$, et $d \leq 24 \iff d^2 < 600 \iff \left(\frac{600}{d}\right)^2 > 600 \iff \frac{600}{d} \geq 25$. La bijection échange donc les diviseurs ≤ 24 et les diviseurs ≥ 25 , qui sont ainsi aussi nombreux : 12 chacun, et $P(d \leq 24) = \frac{1}{2}$.
 b) $d \wedge \frac{600}{d} = 1$ signifie qu'aucun nombre premier ne divise les deux : chaque facteur premier va entièrement dans d ou pas du tout, soit $a \in \{0, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$, $c \in \{0, 2\}$: 8 diviseurs, $P = \frac{1}{3}$.
4. Les $24^2 = 576$ couples (d_1, d_2) sont équiprobables, et $d_1 \mid d_2 \iff a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2$. Les couples $(a_1, a_2) \in \{0, \dots, 3\}^2$ avec $a_1 \leq a_2$ sont $4 + 3 + 2 + 1 = 10$; de même $2 + 1 = 3$ pour (b_1, b_2) et $3 + 2 + 1 = 6$ pour (c_1, c_2) . D'où $10 \times 3 \times 6 = 180$ couples et $P = \frac{180}{576} = \frac{5}{16}$.

■ Corrigé de l'exercice 38

1. Il y a $C_{2n}^2 = n(2n - 1)$ tirages équiprobables, dont n paires : $P = \frac{n}{n(2n - 1)} = \frac{1}{2n - 1}$. Puis $\frac{1}{2n - 1} \leq 0,1 \iff 2n - 1 \geq 10 \iff n \geq 5,5$: il faut au moins 6 paires.
2. $C_{10}^4 = 210$ tirages équiprobables.
 - a) Aucune paire : 4 paires parmi 5 ($C_5^4 = 5$), puis une chaussure de chacune ($2^4 = 16$) : 80 tirages, $P = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$.
 - b) Deux paires : $C_5^2 = 10$ tirages, $P = \frac{1}{21}$.
 - c) Par le contraire : $1 - \frac{8}{21} - \frac{1}{21} = \frac{4}{7}$. Directement : la paire complète (5 choix), deux autres

paires ($C_4^2 = 6$) et une chaussure dans chacune (4) : 120 tirages, et $\frac{120}{210} = \frac{4}{7}$ ✓.

d) Le contraire est « 4 pieds gauches ou 4 pieds droits » : $C_5^4 + C_5^4 = 10$ tirages, $P = 1 - \frac{10}{210} = \frac{20}{21}$.

■ Corrigé de l'exercice 39

1. a) Comme $a, c \geq 1$:

b	1	2	3	4	5	6	total
condition	aucune	$ac \leq 1$	$ac \leq 2$	$ac \leq 4$	$ac \leq 6$	$ac \leq 9$	
$4ac \leq b^2$	0	1	3	8	14	17	43
$4ac = b^2$	0	1 (1, 1)	0	3 (1, 4), (2, 2), (4, 1)	0	1 (3, 3)	5

(Pour $b = 5$: $a = 1$ donne 6 valeurs de c , $a = 2$ en donne 3, $a = 3$ en donne 2, $a = 4, 5, 6$ une chacun ; pour $b = 6$: $6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 17$.)

b) (E) a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta > 0$: $43 - 5 = 38$ triplets, $P = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}$; $\Delta = 0$: $\frac{5}{216}$; $\Delta < 0$: $\frac{173}{216}$.

2. Si les solutions z_1, z_2 sont réelles : $z_1 z_2 = \frac{c}{a} > 0$, elles sont de même signe, et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} < 0$, elles sont donc strictement négatives.

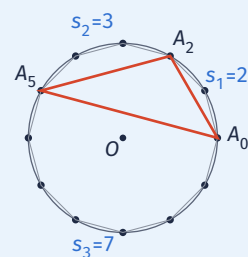
3. a) Si $\Delta < 0$, les solutions sont $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, conjuguées, et $|z|^2 = z \bar{z} = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$: $|z| = \sqrt{\frac{c}{a}}$.

b) Si $\Delta < 0$: les solutions sont de module 1 si et seulement si $c = a$, et alors $\Delta < 0 \iff b^2 < 4a^2 \iff b < 2a$. Si $\Delta \geq 0$: deux réels strictement négatifs de module 1 valent tous deux -1, donc $az^2 + bz + c = a(z+1)^2$, soit $b = 2a$ et $c = a$; réciproquement, si $c = a$ et $b = 2a$, la solution double est -1. D'où l'équivalence demandée. Dénombrement : $a = 1$: $b \leq 2$ (2 cas) ; $a = 2$: $b \leq 4$ (4 cas) ; $a \in \{3, 4, 5, 6\}$: $b \leq 6$ ($4 \times 6 = 24$ cas) ; total 30, et $P = \frac{30}{216} = \frac{5}{36}$.

c) j et j^2 sont les solutions de $z^2 + z + 1 = 0$. Les solutions de (E) sont j et j^2 si et seulement si $az^2 + bz + c = a(z-j)(z-j^2) = a(z^2 + z + 1)$, soit $a = b = c$: 6 triplets, $P = \frac{1}{36}$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $C_{12}^3 = 220$ triangles, équiprobables.
2. a) Deux cordes ont même longueur si et seulement si elles sous-tendent des arcs égaux : le triangle est équilatéral si et seulement si les trois arcs qu'il découpe contiennent chacun 4 côtés, soit les triangles $A_k A_{k+4} A_{k+8}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$: $P = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$.



angle en A_2 : $15 \times 7 = 105^\circ$

b) $SA = SB$ signifie que S est sur la médiatrice de $[AB]$, qui passe par O : c'est la droite (OS) , axe de symétrie du polygone. Pour $S = A_k$, les triangles isocèles de sommet principal S sont donc les $A_k A_{k+i} A_{k-i}$ (indices modulo 12), $1 \leq i \leq 5$: $5 \times 12 = 60$ triangles comptés, un triangle équilatéral étant compté 3 fois.

Il y a $60 - 2 \times 4 = 52$ triangles isocèles : $P = \frac{52}{220} = \frac{13}{55}$.

c) Un triangle rectangle a un seul côté diamètre (l'hypoténuse) : 6 diamètres $[A_k A_{k+6}]$, puis le troisième sommet parmi les 10 autres : 60 triangles, $P = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

3. a) Chaque côté du polygone sous-tend un angle au centre de $\frac{360}{12} = 30^\circ$. L'angle du triangle en un sommet V intercepte l'arc opposé à V ; s'il contient s côtés, son angle au centre vaut $30s$ degrés, et l'angle inscrit en est la moitié : $15s$ degrés.
- b) L'angle en V est obtus si et seulement si l'arc opposé contient $s \geq 7$ côtés, c'est-à-dire si les deux arcs issus de V contiennent $s' \geq 1$ et $s'' \geq 1$ côtés avec $s' + s'' \leq 5$: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ couples (s', s'') , chacun donnant un triangle. Un triangle ayant au plus un angle obtus, il y a $12 \times 10 = 120$ triangles obtus : $P = \frac{120}{220} = \frac{6}{11}$. Restent $220 - 60 - 120 = 40$ triangles acutangles : $P = \frac{40}{220} = \frac{2}{11}$.

■ Corrigé de l'exercice 41

1. Si, par exemple, $a \geq b + c$ et $b \geq a + c$, en ajoutant : $a + b \geq a + b + 2c$, soit $c \leq 0$, impossible. Il en est de même pour les autres paires d'inégalités.
2. a) Si $c \geq a + b$ avec $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$, posons $x = a$, $y = a + b$, $z = c + 1$: $1 \leq x < y \leq c < z \leq n + 1$ ($b \geq 1$), donc $\{x, y, z\}$ est une partie à 3 éléments de $\{1, \dots, n + 1\}$. Réciproquement, si $1 \leq x < y < z \leq n + 1$, on pose $a = x$, $b = y - x$, $c = z - 1$: $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a + b = y \leq z - 1 = c \leq n$ (donc $a, b \leq n$ aussi). Les deux applications sont réciproques l'une de l'autre, d'où $N = C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.
- b) $\bar{T}$ est la réunion des trois événements $a \geq b + c$, $b \geq a + c$, $c \geq a + b$, deux à deux incompatibles (question 1) et de même cardinal N (les rôles de a, b, c sont symétriques). Les n^3 triplets étant équiprobables,

$$P(T) = 1 - \frac{3N}{n^3} = 1 - \frac{(n+1)n(n-1)}{2n^3} = 1 - \frac{n^2 - 1}{2n^2} = \frac{n^2 + 1}{2n^2}.$$

3. a) $P(T) = \frac{37}{72}$ ($= \frac{111}{216}$). Triangle aplati : $c = a + b$ (ou l'analogue pour a ou b , cas incompatibles)

; les couples (a, b) tels que $a + b \leq 6$ sont $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$, d'où $3 \times 15 = 45$ triplets et $P = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}$.

b) Équilatéral : $a = b = c$, 6 triplets, $P = \frac{1}{36}$. Rectangle : la seule solution de $x^2 + y^2 = z^2$ avec $1 \leq x \leq y < z \leq 6$ est $(3, 4, 5)$ (test direct des valeurs $z \leq 6$) ; ses 3! ordres donnent $P = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. Isocèle non équilatéral, de côtés x, x, z avec $z \neq x$: il est non aplati si et seulement si $z < 2x$, ce qui donne, pour $x = 1, \dots, 6$, respectivement 0, 2, 4, 5, 5, 5 valeurs de z , soit 21 couples (x, z) et $3 \times 21 = 63$ triplets (position de z). Avec les 6 équilatéraux : 69 triplets, $P = \frac{69}{216} = \frac{23}{72}$.

c) $P_T(\text{isocèle}) = \frac{69/216}{111/216} = \frac{69}{111} = \frac{23}{37}$.

■ Corrigé de l'exercice 42

- $C_{64}^2 = 2016$ paires de cases, équiprobables.
- Même ligne : $8 \times C_8^2 = 224$ paires ; même colonne : 224 ; ces cas sont incompatibles : 448 paires, $P = \frac{448}{2016} = \frac{2}{9}$. Sur un échiquier $n \times n$: $2n C_n^2 = n^2(n-1)$ paires parmi $C_{n^2}^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$, d'où $P = \frac{2n^2(n-1)}{n^2(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n+1}$.
- Paires voisines : horizontalement $8 \times 7 = 56$, verticalement 56, en diagonale $2 \times 7 \times 7 = 98$; total 210, $P = \frac{210}{2016} = \frac{5}{48}$.
- a) Pour une direction : $2(C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_7^2) + C_8^2 = 2(1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21) + 28 = 140$ paires. Deux cases distinctes ne peuvent être à la fois sur deux diagonales de directions différentes : 280 paires.
b) Fous : $P = \frac{280}{2016} = \frac{5}{36}$. Dames : deux cases distinctes d'une même ligne ou colonne ne sont pas sur une même diagonale, donc $448 + 280 = 728$ paires et $P = \frac{728}{2016} = \frac{13}{36}$.
- Comptons les couples ordonnés (départ, arrivée). Pour le déplacement $(+1, +2)$ (une colonne à droite, deux lignes vers le haut), le départ est dans les 7 premières colonnes et les 6 premières lignes : 42 couples ; il en va de même pour les 8 déplacements $(\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1)$: $8 \times 42 = 336$ couples ordonnés, soit 168 paires, $P = \frac{168}{2016} = \frac{1}{12}$.

31 Corrigés : conditionnement

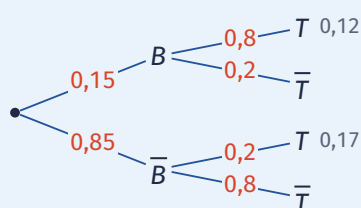
■ Corrigé de l'exercice 43

1. Notons C_{RR} , C_{RB} , C_{BB} les trois cartes, chacune de probabilité $\frac{1}{3}$, et V : « la face visible est rouge ». On a $P_{C_{RR}}(V) = 1$, $P_{C_{RB}}(V) = \frac{1}{2}$, $P_{C_{BB}}(V) = 0$, donc (probabilités totales) $P(V) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. L'autre face est rouge si et seulement si la carte est C_{RR} : $P_V(C_{RR}) = \frac{P(C_{RR} \cap V)}{P(V)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$.

Le raisonnement « c'est C_{RR} ou C_{RB} , donc une chance sur deux » oublie que ces deux cas n'ont pas la même probabilité sachant V : C_{RR} montre du rouge deux fois plus souvent. Des 3 faces rouges, également susceptibles d'être visibles, 2 appartiennent à C_{RR} .

2. a) Si R_1 est réalisé, U_2 contient 3 rouges sur 7 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{7}$; sinon 2 rouges sur 7 : $P_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{2}{7}$. Avec $P(R_1) = \frac{3}{5}$: $P(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{9}{35} + \frac{4}{35} = \frac{13}{35}$.
- b) Formule de Bayes : $P_{R_2}(R_1) = \frac{9/35}{13/35} = \frac{9}{13}$ (contre $P(R_1) = \frac{3}{5}$: une rouge tirée de U_2 rend plus probable un transfert rouge).

■ Corrigé de l'exercice 44



1. Probabilités totales : $P(T) = 0,15 \times 0,8 + 0,85 \times 0,2 = 0,12 + 0,17 = 0,29$. Puis $P_T(B) = \frac{0,12}{0,29} = \frac{12}{29} \approx 0,414 < \frac{1}{2}$: même après le témoignage, le taxi est plus probablement vert ($P_T(\bar{B}) = \frac{17}{29}$). Les taxis verts sont si nombreux que les erreurs commises sur eux (0,17) dépassent les identifications justes de taxis bleus (0,12).

2. $P(B \cap T) = 0,15x$ et $P(\bar{B} \cap T) = 0,85(1 - x)$, d'où

$$P_T(B) = \frac{0,15x}{0,15x + 0,85 - 0,85x} = \frac{15x}{85 - 70x} = \frac{3x}{17 - 14x}.$$

Comme $17 - 14x > 0$: $P_T(B) \geq \frac{1}{2} \iff 6x \geq 17 - 14x \iff x \geq 0,85$; $P_T(B) \geq 0,9 \iff 3x \geq 15,3 - 12,6x \iff x \geq \frac{15,3}{15,6} = \frac{51}{52} \approx 0,981$.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. a) « Au moins un garçon » = $\{GG, GF, FG\}$: $P = \frac{1}{3}$. b) « L'aîné est un garçon » = $\{GG, GF\}$: $P = \frac{1}{2}$.
2. a) Le contraire de M : aucun des deux enfants n'est un garçon né un mardi, soit 13 possibilités sur 14 pour chacun : $13^2 = 169$ familles, donc $\text{card}(M) = 196 - 169 = 27$.
- b) Deux garçons : $7 \times 7 = 49$ couples de jours, dont $6 \times 6 = 36$ sans mardi ; $M \cap GG$ compte $49 - 36 = 13$ familles, et $P_M(GG) = \frac{13}{27} \approx 0,48$.

3. Pour chaque enfant, indépendamment de l'autre, trois cas : garçon ayant la caractéristique (probabilité $\frac{p}{2}$), garçon sans la caractéristique ($\frac{1-p}{2}$), fille ($\frac{1}{2}$). Soit C : « au moins un garçon a la caractéristique ». Alors

$$P(C) = 1 - \left(1 - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p(4-p)}{4}, \quad P(GG \cap C) = P(GG) - P(GG \cap \bar{C}) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 = \frac{p(2-p)}{4},$$

d'où $P_C(GG) = \frac{2-p}{4-p}$. Pour $p = 1$ (simple garçon) : $\frac{1}{3}$; pour $p = \frac{1}{7}$: $\frac{13/7}{27/7} = \frac{13}{27}$ ✓. Comme $\frac{2-p}{4-p} = 1 - \frac{2}{4-p}$, cette probabilité **décroît** de $\frac{1}{2}$ (quand p tend vers 0) à $\frac{1}{3}$ (pour $p = 1$). Plus la caractéristique est rare, plus elle désigne un enfant précis, et l'on se rapproche de la situation 1.b).

■ Corrigé de l'exercice 46

- $P_{A \cap L}(G) = \frac{90}{100} = 0,9$, $P_{\bar{A} \cap L}(G) = \frac{255}{300} = 0,85$, $P_{A \cap \bar{L}}(G) = \frac{150}{300} = 0,5$, $P_{\bar{A} \cap \bar{L}}(G) = \frac{40}{100} = 0,4$: **A est meilleur pour chaque forme**. Pourtant $P_A(G) = \frac{90+150}{400} = \boxed{0,6}$ et $P_{\bar{A}}(G) = \frac{255+40}{400} = \boxed{0,7375}$: globalement, B semble meilleur !
- a) $A \cap G$ est la réunion des événements disjoints $A \cap L \cap G$ et $A \cap \bar{L} \cap G$, donc $P(A \cap G) = P(A \cap L) P_{A \cap L}(G) + P(A \cap \bar{L}) P_{A \cap \bar{L}}(G)$. On divise par $P(A)$, sachant que $\frac{P(A \cap L)}{P(A)} = P_A(L)$ et $\frac{P(A \cap \bar{L})}{P(A)} = P_A(\bar{L})$.
b) $P_A(L) = \frac{100}{400} = \boxed{\frac{1}{4}}$ et $P_{\bar{A}}(L) = \frac{300}{400} = \boxed{\frac{3}{4}}$. Ainsi $P_A(G) = \frac{1}{4} \times 0,9 + \frac{3}{4} \times 0,5 = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(G) = \frac{3}{4} \times 0,85 + \frac{1}{4} \times 0,4 = 0,7375$: chaque taux global est une **moyenne pondérée** des taux par forme, avec des poids différents. Le traitement A a surtout été donné à des formes graves : la comparaison globale mélange l'effet du traitement et celui de la gravité.
- Avec $\lambda = P_A(L) = P_{\bar{A}}(L) \in [0, 1]$: $P_A(G) - P_{\bar{A}}(G) = \lambda(a_1 - b_1) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)$, où $a_1 > b_1$ et $a_2 > b_2$ sont les taux de guérison par forme. Les coefficients λ et $1 - \lambda$ sont positifs et non tous deux nuls : la différence est strictement positive.
- $P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{240}{240 + 295} = \frac{240}{535} = \boxed{\frac{48}{107} \approx 0,449}$.

■ Corrigé de l'exercice 47

- Notons E_0 : « 0 est émis » (mot 000) et $E_1 = \bar{E}_0$. Si 000 est émis, le décodage se trompe si et seulement si au moins deux des trois bits sont inversés. Le nombre de bits inversés suit la loi $B(3, \varepsilon)$ (trois épreuves indépendantes), d'où

$$P = C_3^2 \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) + \varepsilon^3 = 3 \times 0,01 \times 0,9 + 0,001 = \boxed{0,028}.$$

C'est la même valeur sachant E_1 , donc, par les probabilités totales, $P(\text{erreur}) = 0,028\pi + 0,028(1 - \pi) = 0,028$, contre 0,1 avec un seul bit.

- En notant encore 001 l'événement « on reçoit 001 » : $P_{E_0}(001) = (1 - \varepsilon)^2 \varepsilon = \boxed{0,081}$ (seul le 3^e bit est inversé) et $P_{E_1}(001) = \varepsilon^2 (1 - \varepsilon) = \boxed{0,009}$. Bayes :

$$P_{001}(E_0) = \frac{0,6 \times 0,081}{0,6 \times 0,081 + 0,4 \times 0,009} = \frac{0,0486}{0,0522} = \boxed{\frac{27}{29} \approx 0,931}.$$

3. a) Pour un mot reçu m ayant w bits égaux à 1 : $P_{E_0}(m) = \varepsilon^w(1 - \varepsilon)^{3-w}$ (w inversions) et $P_{E_1}(m) = (1 - \varepsilon)^w \varepsilon^{3-w}$. Par Bayes, $P_m(E_0)$ et $P_m(E_1)$ ont le même dénominateur $P(m)$ et pour numérateurs $\pi P_{E_0}(m)$ et $(1 - \pi) P_{E_1}(m)$: d'où le critère. Avec $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = 9$, il s'écrit

$$\text{on décide 0} \iff \frac{\pi}{1-\pi} > 9^{2w-3}.$$

b) Pour $\pi = 0,6$, $\frac{\pi}{1-\pi} = 1,5$, compris entre 9^{-1} et 9^1 : on décide 0 pour $w \in \{0, 1\}$ et 1 pour $w \in \{2, 3\}$, c'est le décodage majoritaire.

c) Pour 011, $w = 2$: on décide 0 $\iff \frac{\pi}{1-\pi} > 9 \iff \pi > 9 - 9\pi \iff \boxed{\pi > 0,9}$.

4. $\frac{\pi}{1-\pi} = 19$: on décide 0 pour $w \leq 2$ ($19 > 9$) et 1 seulement si l'on reçoit 111 ($19 < 729$). Erreur : 0 émis et 111 reçu (ε^3), ou 1 émis et $w \leq 2$ ($1 - (1 - \varepsilon)^3$) :

$$P(\text{erreur}) = 0,95 \times 0,001 + 0,05 \times (1 - 0,729) = 0,00095 + 0,01355 = \boxed{0,0145} < 0,028.$$

Tenir compte de la fréquence des 0 divise presque par deux la probabilité d'erreur.

■ Corrigé de l'exercice 48

- Le génotype du père (AA, Aa, aa, de probabilités u, v, w) forme un système complet, et la probabilité de transmettre A vaut $1, \frac{1}{2}, 0$ selon le cas. Probabilités totales : $p = u \times 1 + v \times \frac{1}{2} + w \times 0 = \boxed{u + \frac{v}{2}}$; de même $q = w + \frac{v}{2}$.
- La mère transmet A avec la même probabilité p , indépendamment du père. Donc $P(AA) = p \times p = \boxed{p^2}$, $P(aa) = \boxed{q^2}$, et Aa s'obtient par « A du père et a de la mère » ou l'inverse (incompatibles) : $P(Aa) = pq + qp = \boxed{2pq}$.
- Pour la génération 1, la probabilité de transmettre A vaut, par 1, $p_1 = p^2 + \frac{2pq}{2} = p(p + q) = p$. Par 2, la génération 2 a pour proportions $p_1^2 = p^2$, $2p_1q_1 = 2pq$, $q_1^2 = q^2$: ce sont celles de la génération 1, et il en va de même ensuite.
- a) $p = 0,5 + 0,1 = 0,6$, $q = 0,4$: AA : $\boxed{0,36}$, Aa : $\boxed{0,48}$, aa : $\boxed{0,16}$.
b) L'enfant est aa si le père et la mère transmettent a (la mère avec la probabilité $q = 0,4$). Sachant le père Aa : $\frac{1}{2} \times 0,4 = 0,2$; sachant le père aa : $1 \times 0,4 = 0,4$; sachant le père AA : 0. D'où $P(aa) = 0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,04 + 0,12 = 0,16$ ✓, puis par Bayes :

$$P_{aa}(\text{père Aa}) = \frac{0,04}{0,16} = \boxed{\frac{1}{4}}, \quad P_{aa}(\text{père aa}) = \frac{0,12}{0,16} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

5. $q^2 = 10^{-4}$ donne $q = 0,01$, $p = 0,99$ et $2pq = \boxed{0,0198}$: environ **une personne sur 50** est porteuse saine, alors qu'une sur 10 000 seulement est albinos : l'allèle a se cache surtout chez des porteurs sains.

32

Corrigés : indépendance**■ Corrigé de l'exercice 49**

1. a) $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$: 36 couples (rouge, vert) équiprobables. A compte $3 \times 6 = 18$ couples : $P(A) = \frac{1}{2}$.
 $S_7 = \{(1, 6), (2, 5), \dots, (6, 1)\}$: $P(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $S_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$: $P(S_8) = \frac{5}{36}$.

$A \cap S_7 = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$: $P(A \cap S_7) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$: A et S_7 sont indépendants.

$A \cap S_8 = \{(2, 6), (4, 4), (6, 2)\}$: $P(A \cap S_8) = \frac{1}{12}$, alors que $P(A)P(S_8) = \frac{5}{72}$: A et S_8 ne sont pas indépendants ($P_{S_8}(A) = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$: une somme 8 favorise un dé rouge pair).

- b) R_I compte 6 $\text{card}(I)$ couples : $P(R_I) = \frac{\text{card}(I)}{6}$. Pour chaque $r \in I$, il y a exactement un vert $v = 7 - r \in \{1, \dots, 6\}$ tel que $r + v = 7$: $\text{card}(R_I \cap S_7) = \text{card}(I)$, et

$$P(R_I \cap S_7) = \frac{\text{card}(I)}{36} = \frac{\text{card}(I)}{6} \times \frac{1}{6} = P(R_I)P(S_7) \quad \checkmark$$

Le dé rouge ne renseigne pas sur l'événement « somme 7 ». En revanche $R_{\{1\}} \cap S_8 = \emptyset$ (il faudrait un vert égal à 7), alors que $P(R_{\{1\}})P(S_8) = \frac{5}{216} \neq 0$: S_8 et $R_{\{1\}}$ ne sont pas indépendants.

2. $P(A)P(B) = P(A \cap B) = 0,12$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donne $P(A) + P(B) = 0,7$. Les nombres $P(A)$ et $P(B)$ sont donc les racines de $x^2 - 0,7x + 0,12 = 0$ ($\Delta = 0,01$) : 0,3 et 0,4. Comme $P(A) < P(B)$: $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$.

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,42$ ($= 0,7 \times 0,6$: $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants $\checkmark$). A et $\overline{B}$ sont indépendants (cours), donc $P_{\overline{B}}(A) = P(A) = 0,3$.

■ Corrigé de l'exercice 50

1. Chaque moteur tombe en panne (le « succès ») avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres : 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc $X \sim B(4; 0,1)$ et $P(X = k) = C_4^k 0,1^k 0,9^{4-k}$:

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Le quadrimoteur arrive si $X \leq 2$: $p_4 = 0,6561 + 0,2916 + 0,0486 = 0,9963$. Le bimoteur arrive si ses deux moteurs ne tombent pas tous les deux en panne : $p_2 = 1 - 0,1^2 = 0,99$.

2. De même, $p_2 = 1 - q^2$ et $p_4 = 1 - P(X = 3) - P(X = 4) = 1 - 4q^3(1 - q) - q^4 = 1 - 4q^3 + 3q^4$. Puis

$$p_4 - p_2 = q^2 - 4q^3 + 3q^4 = q^2(3q^2 - 4q + 1) = q^2(3q - 1)(q - 1).$$

Comme $q^2 > 0$ et $q - 1 < 0$: $p_4 > p_2 \iff 3q - 1 < 0 \iff q < \frac{1}{3}$ (égalité pour $q = \frac{1}{3}$). Pour $q = 0,4$: $p_2 = 0,84$ et $p_4 = 1 - 0,256 + 0,0768 = 0,8208$: le **bimoteur** est alors plus sûr. Avec des moteurs peu fiables, exiger 2 moteurs sur 4 est plus exigeant qu'1 sur 2.

■ Corrigé de l'exercice 51

Deux dés différents n'ont aucun numéro commun : il n'y a jamais d'égalité, et $P(Y > X) = 1 - P(X > Y)$.

$$1. P(A > B) = P(A = 4) = \boxed{\frac{2}{3}}; P(B > C) = P(C = 2) = \boxed{\frac{2}{3}}; \text{ par indépendance des lancers, } P(C > D) = P(C = 6) + P(C = 2)P(D = 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2}{3}} \text{ et } P(D > A) = P(D = 5) + P(D = 1)P(A = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Chaque dé bat le suivant avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et D bat A : la relation « battre avec une probabilité $> \frac{1}{2}$ » **n'est pas transitive** (A bat B , qui bat C , qui bat D , qui bat A).

$$2. P(A > C) = P(A = 4)P(C = 2) = \boxed{\frac{4}{9}} \text{ (donc } C \text{ bat } A \text{ avec la probabilité } \frac{5}{9}) \text{ et } P(B > D) = P(D = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Moyennes : $A : \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$; $B : 3$; $C : \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$; $D : 3$. Le dé C a la plus grande moyenne et perd pourtant contre B avec la probabilité $\frac{2}{3}$: la moyenne ne décide pas d'un duel.

3. Le second joueur répond à A par D , à B par A , à C par B et à D par C : d'après 1, il gagne avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Il n'existe pas de « meilleur » dé.

4. Ali gagne chaque manche avec la probabilité $\frac{2}{3}$, indépendamment : le nombre N de manches qu'il gagne suit $B(3, \frac{2}{3})$, et

$$P(N \geq 2) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{12+8}{27} = \boxed{\frac{20}{27} \approx 0,741}.$$

En cinq manches, $N' \sim B(5, \frac{2}{3})$: $P(N' \geq 3) = C_5^3 \frac{2^3}{3^5} + C_5^4 \frac{2^4}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} = \frac{80+80+32}{243} = \frac{192}{243} = \boxed{\frac{64}{81} \approx 0,790}$: plus de manches amplifient l'avantage.

■ Corrigé de l'exercice 52

1. $n = 2$: $\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$, issues équiprobables ; $A = \{GF, FG\}$, $B = \{GG, GF, FG\}$, $A \cap B = A$: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{8}$: **pas indépendants**.

$n = 3$: 8 issues ; $\bar{A} = \{GGG, FFF\}$: $P(A) = \frac{3}{4}$; B : aucune fille (1 issue) ou une seule (3 issues) : $P(B) = \frac{1}{2}$; $A \cap B$: exactement une fille : $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$: **indépendants**.

2. Les 2^n issues sont équiprobables (indépendance). $\bar{A}$ = « que des garçons ou que des filles » : $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. B : aucune fille (1 issue) ou exactement une (n issues, selon le rang de la fille) : $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$. $A \cap B$ = « exactement une fille » (il y a alors un garçon car $n \geq 2$) : $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$. Ainsi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff n = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)(n+1) \iff n 2^{n-1} = (2^{n-1} - 1)(n+1) \iff \boxed{2^{n-1} = n+1}.$$

Soit $u_n = 2^{n-1} - n - 1$: $u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1 > 0$ pour $n \geq 2$, donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante ; $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, donc $u_n > 0$ pour $n \geq 4$. Seul $\boxed{n = 3}$ convient : l'indépendance est ici une coïncidence numérique.

■ Corrigé de l'exercice 53

1. Si C_5 fonctionne, M et N sont reliés : on atteint $\{M, N\}$ depuis E si C_1 ou C_3 fonctionne (probabilité $1 - (1 - p)^2 = a(p)$), puis S si C_2 ou C_4 fonctionne ($a(p)$) ; ces deux étapes portent sur des composants distincts, indépendants : probabilité $a(p)^2$. Si C_5 est en panne, il reste deux branches en parallèle, C_1C_2 et C_3C_4 , chacune fonctionnant avec la probabilité p^2 : le système est en panne si les deux le sont, d'où $1 - (1 - p^2)^2 = b(p)$. Probabilités totales avec $(C_5, \overline{C_5})$:

$$R(p) = p a(p)^2 + (1 - p) b(p) = p(4p^2 - 4p^3 + p^4) + (1 - p)(2p^2 - p^4) = \boxed{2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5}.$$

2. Sans C_5 , la fiabilité est $b(p)$; $R(p) - b(p) = p(a(p)^2 - b(p)) = p(2p^2 - 4p^3 + 2p^4) = \boxed{2p^3(1 - p)^2 > 0}$.

3. $a(1 - p) = 1 - p^2$ et $b(1 - p) = 1 - (1 - (1 - p)^2)^2 = 1 - a(p)^2$. Donc

$$R(1 - p) = (1 - p)a(1 - p)^2 + p b(1 - p) = (1 - p)(1 - p^2)^2 + p(1 - a(p)^2),$$

$$1 - R(p) = p(1 - a(p)^2) + (1 - p)(1 - b(p)) = p(1 - a(p)^2) + (1 - p)(1 - p^2)^2,$$

d'où $\boxed{R(1 - p) = 1 - R(p)}$. Avec $p = \frac{1}{2}$: $R(\frac{1}{2}) = 1 - R(\frac{1}{2})$, soit $\boxed{R(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}}$. $R(0,9) = 1,62 + 1,458 - 3,2805 + 1,18098 = \boxed{0,97848}$ (contre $b(0,9) = 0,9639$ sans le pont).

4. $P(C_5 \text{ fonctionne et le système aussi}) = p a(p)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{32}$ et $R(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$: la probabilité cherchée est $\frac{9/32}{1/2} = \boxed{\frac{9}{16}}$.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $P(A) = \frac{a}{n}$, $P(B) = \frac{b}{n}$, $P(A \cap B) = \frac{c}{n}$ (notations de 2.a) : $\frac{c}{n} = \frac{ab}{n^2} \iff \boxed{nc = ab}$. Si n est premier et A, B non triviaux, alors $1 \leq a, b \leq n - 1$; l'indépendance donnerait $n \mid ab$, donc (lemme d'Euclide) $n \mid a$ ou $n \mid b$: impossible.
2. a) $6c = ab$ avec $1 \leq a, b \leq 5$: $ab \neq 0$, donc $c \geq 1$, et ab est un multiple de 6 au plus égal à 25 : 6, 12, 18 ou 24. Avec deux facteurs dans $\{1, \dots, 5\}$: $6 = 2 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, mais ni 18 ni 24. D'où $(a, b, c) \in \{(2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 4, 2), (4, 3, 2)\}$. Exemples : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$: $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ✓ ; $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$: $\frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ ✓.
- b) On choisit A ($C_6^2 = 15$), l'élément de A qui est dans B (2), puis les deux autres éléments de B hors de A ($C_4^2 = 6$) : $15 \times 2 \times 6 = \boxed{180}$ couples.
- c) D'après a), dans un couple d'événements non triviaux indépendants, **exactement un** est de cardinal 3. Si A, B, C étaient deux à deux indépendants, soit k le nombre d'entre eux de cardinal 3 : si $k = 0$ ou $k = 1$, deux d'entre eux ne sont pas de cardinal 3 ; si $k = 2$ ou $k = 3$, deux d'entre eux sont de cardinal 3. Contradiction dans tous les cas.
3. Les 2^k événements $B_1 \cap \dots \cap B_k$ sont deux à deux incompatibles : deux choix différents diffèrent en un indice i , l'un est inclus dans A_i , l'autre dans $\overline{A_i}$. Par indépendance, chacun a la probabilité $P(B_1) \dots P(B_k) > 0$, car $0 < P(A_i) < 1$. Chacun contient donc au moins une issue : $\boxed{n \geq 2^k}$. Par exemple, sur un dé, pas trois événements non triviaux mutuellement indépendants ($6 < 8$) ; avec trois pièces ($n = 8$), « la pièce i donne Pile » ($i = 1, 2, 3$) atteint la borne.

33

Corrigés : variables aléatoires

■ Corrigé de l'exercice 55

1. L'urne contient $1+2+3+4 = 10$ boules, équiprobables

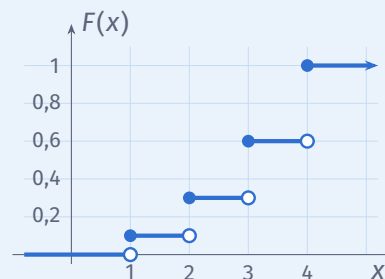
$$: P(X = k) = \frac{k}{10}.$$

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(X) = \frac{1+4+9+16}{10} = \boxed{3}, \quad E(X^2) = \frac{1+8+27+64}{10} = 10, \quad V(X) = 10 - 3^2 = \boxed{1} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \boxed{1}.$$

$F(x) = 0$ si $x < 1$; $0,1$ sur $[1, 2[$; $0,3$ sur $[2, 3[$; $0,6$ sur $[3, 4[$; 1 si $x \geq 4$ (figure : marches croissantes, fermées à gauche).

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \boxed{0,7}.$$



2. a) L'urne contient $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ boules, dont k portent le numéro k : $P(X = k) = \frac{k}{n(n+1)/2} =$

$$\frac{2k}{n(n+1)}, \quad \text{puis} \quad F(k) = \sum_{j=1}^k \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)} \quad (\text{contrôle : } F(n) = 1).$$

b) $E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$ et $E(X^2) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2}$, d'où

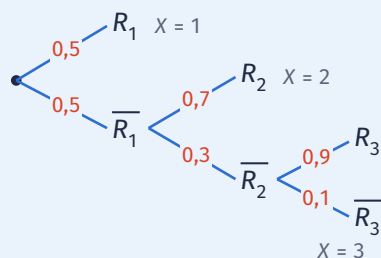
$$V(X) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{9n^2 + 9n - 8n^2 - 8n - 2}{18} = \frac{n^2 + n - 2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}.$$

Pour $n = 4$, on retrouve 3 et 1 ✓.

c) $P(X \leq k) = \frac{k(k+1)}{420} \geq \frac{1}{2} \iff k(k+1) \geq 210$. Comme $k \mapsto k(k+1)$ est croissante, $13 \times 14 = 182 < 210$ et $14 \times 15 = 210$: $\boxed{k = 14}$ (et $P(X \leq 14) = \frac{1}{2}$ exactement).

■ Corrigé de l'exercice 56

- 1.



R_i : « il réussit le i -ième passage ». Le troisième passage a lieu dès que les deux premiers sont manqués, quel qu'en soit le résultat : $P(X = 1) = 0,5$, $P(X = 2) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$ et $P(X = 3) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$.

$$P(\text{permis}) = 1 - 0,5 \times 0,3 \times 0,1 = \boxed{0,985}.$$

$$E(X) = 0,5 + 0,7 + 0,45 = \boxed{1,65}; \quad E(X^2) = 0,5 + 1,4 + 1,35 = 3,25; \quad V(X) = 3,25 - 1,65^2 = \boxed{0,5275} \quad \text{et} \quad \sigma(X) \approx \boxed{0,726}.$$

2. $C = 3000 + 600X$: $E(C) = 3000 + 600 \times 1,65 = \boxed{3990 \text{ DH}}$ et $\sigma(C) = 600 \sigma(X) \approx \boxed{435,8 \text{ DH}}$ (car $V(aX + b) = a^2 V(X)$).

3. L'événement $(X = 1)$ est inclus dans « permis » : $P = \frac{0,5}{0,985} = \frac{100}{197} \approx 0,508$.

■ Corrigé de l'exercice 57

1. S'il perd les $k-1$ premières parties, il a perdu $1+2+\dots+2^{k-2} = 2^{k-1} - 1$ DH ; il gagne alors la mise 2^{k-1} : gain total $2^{k-1} - (2^{k-1} - 1) = \boxed{1 \text{ DH}}$. S'il perd les n parties, son gain est $-(1+2+\dots+2^{n-1}) = \boxed{-(2^n - 1)}$.
2. G prend les valeurs 1 et $-(2^n - 1)$, avec $P(G = -(2^n - 1)) = q^n$ (n défaites indépendantes) et $P(G = 1) = 1 - q^n$. Donc

$$E(G) = 1 - q^n - (2^n - 1)q^n = \boxed{1 - (2q)^n}.$$

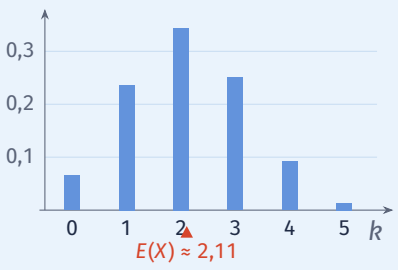
$N = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) s'il perd $k-1$ parties puis gagne : $P(N = k) = q^{k-1}p$; $N = n$ s'il perd les $n-1$ premières : $P(N = n) = q^{n-1}$ (somme : $1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1$ ✓).
3. $p = q = \frac{1}{2}$: $2q = 1$, donc $E(G) = 0$: le « gain sûr » est une illusion. $V(G) = E(G^2) = (1 - 2^{-n}) + 2^{-n}(2^n - 1)^2 = 1 - 2^{-n} + 2^n - 2 + 2^{-n} = \boxed{2^n - 1}$.
 Pour $n = 10$: $P(G = 1) = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} \approx 0,999$ et $\sigma(G) = \sqrt{1023} \approx \boxed{32 \text{ DH}}$. Il doit pouvoir perdre $1+2+\dots+512 = \boxed{1023 \text{ DH}}$ pour gagner 1 DH : petite probabilité, perte énorme.
4. $q = \frac{19}{37}$, $2q = \frac{38}{37} > 1$: $E(G) = 1 - \left(\frac{38}{37}\right)^n < 0$, et $E(G)$ décroît quand n augmente, car $n \mapsto \left(\frac{38}{37}\right)^n$ est croissante. Pour $n = 10$: $E(G) = 1 - \left(\frac{38}{37}\right)^{10} \approx \boxed{-0,306 \text{ DH}}$. Plus la martingale est longue, plus elle coûte en moyenne.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. Un dé donné montre 6 à la fin si l'un des (au plus) trois lancers auxquels il participe donne 6 ; il échoue s'il ne donne aucun 6 en trois lancers indépendants : probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Donc $p = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$. Les cinq dés sont cinq épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p : $X \sim B\left(5, \frac{91}{216}\right)$, $P(X = k) = C_5^k \left(\frac{91}{216}\right)^k \left(\frac{125}{216}\right)^{5-k}$.
2. Loi de X , à 10^{-3} près :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,065	0,236	0,344	0,250	0,091	0,013

$P(X = 5) = \left(\frac{91}{216}\right)^5 \approx \boxed{0,013}$; $P(X \geq 4) \approx \boxed{0,104}$;
 $E(X) = 5p = \frac{455}{216} \approx \boxed{2,106}$;
 $V(X) = 5p(1-p) = \frac{56875}{46656} \approx \boxed{1,219}$.
 La valeur la plus probable est 2 (diagramme ci-contre).


3. Avec k lancers, chaque dé montre 6 à la fin avec la probabilité $p_k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$, et l'on obtient cinq 6 avec la probabilité p_k^5 . Comme $\ln \frac{5}{6} < 0$:

$$p_k^5 > \frac{1}{2} \iff p_k > 2^{-1/5} \iff \left(\frac{5}{6}\right)^k < 1 - 2^{-1/5} \approx 0,1294 \iff k > \frac{\ln(1 - 2^{-1/5})}{\ln(5/6)} \approx 11,2.$$

Il faut $\boxed{k = 12}$ lancers (contrôle : $p_{11}^5 \approx 0,485$ et $p_{12}^5 \approx 0,552$).

■ Corrigé de l'exercice 59

1. On échange les deux sommes : pour j fixé, k varie de 1 à j :

$$\sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n P(X = j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j 1 \right) P(X = j) = \sum_{j=1}^n j P(X = j) = E(X).$$

2. $M \geq k$ sauf si les trois dés donnent moins de k : $P(M \geq k) = 1 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3$ (dés indépendants).
D'après 1 :

$$E(M) = \sum_{k=1}^6 \left(1 - \frac{(k-1)^3}{216}\right) = 6 - \frac{0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125}{216} = 6 - \frac{225}{216} = \frac{119}{24} \approx 4,96.$$

$(a, b, c) \mapsto (7 - a, 7 - b, 7 - c)$ est une bijection de $\{1, \dots, 6\}^3$, qui conserve l'équiprobabilité, et $\min(a, b, c) = 7 - \max(7 - a, 7 - b, 7 - c)$: m a la même loi que $7 - M$, et $E(m) = 7 - \frac{119}{24} = \frac{49}{24} \approx 2,04$.

3. a) Récurrence sur $N \geq p$: pour $N = p$, $C_p^p = 1 = C_{p+1}^{p+1}$; si l'égalité est vraie au rang N , alors $\sum_{j=p}^{N+1} C_j^p = C_{N+1}^{p+1} + C_{N+1}^p = C_{N+2}^{p+1}$ (Pascal).

b) Les C_n^p tirages sont équiprobables ; $m \geq k$ si les p numéros sont dans $\{k, \dots, n\}$, qui en compte $n - k + 1$: $P(m \geq k) = C_{n-k+1}^p / C_n^p$, et $P(m \geq k) = 0$ si $k > n - p + 1$. D'après 1, puis a) avec $j = n - k + 1$:

$$E(m) = \frac{1}{C_n^p} \sum_{k=1}^{n-p+1} C_{n-k+1}^p = \frac{1}{C_n^p} \sum_{j=p}^n C_j^p = \frac{C_{n+1}^{p+1}}{C_n^p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{p+1}.$$

La bijection $x \mapsto n + 1 - x$ échange le plus petit et le plus grand numéro : M a la même loi que $n + 1 - m$, donc $E(M) = n + 1 - \frac{n+1}{p+1} = \frac{p(n+1)}{p+1}$.

c) $n = 49$, $p = 6$: $E(m) = \frac{50}{7} \approx 7,14$ et $E(M) = \frac{300}{7} \approx 42,86$: en moyenne, les 6 numéros découpent $\{1, \dots, 49\}$ en 7 « intervalles » de même longueur.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. Avec $\mu = E(X)$: $(x_i - a)^2 = (x_i - \mu)^2 + 2(x_i - \mu)(\mu - a) + (\mu - a)^2$, et $\sum p_i(x_i - \mu) = \mu - \mu = 0$, d'où $f(a) = V(X) + (\mu - a)^2$: f est minimale en $a = E(X)$ **seulement**, de minimum $V(X)$.
2. a) Pour $a \in [x_k, x_{k+1}]$: $|x_i - a| = a - x_i$ si $i \leq k$ et $x_i - a$ si $i \geq k + 1$, donc

$$g(a) = a \left(\sum_{i \leq k} p_i - \sum_{i > k} p_i \right) + \sum_{i > k} p_i x_i - \sum_{i \leq k} p_i x_i,$$

fonction affine de coefficient directeur $F(x_k) - (1 - F(x_k)) = 2F(x_k) - 1$. Sur $]-\infty, x_1]$: $g(a) = \sum p_i(x_i - a) = \mu - a$; sur $[x_r, +\infty[$: $g(a) = a - \mu$.

b) g est continue. Soit x_j une médiane : $F(x_{j-1}) = P(X < x_j) \leq \frac{1}{2} \leq F(x_j)$ (avec $F(x_0) = 0$). À gauche de x_j , les pentes sont -1 et les $2F(x_k) - 1 \leq 2F(x_{j-1}) - 1 \leq 0$ ($k \leq j - 1$, F croissante) : g décroît sur $]-\infty, x_j]$. À droite, les pentes $2F(x_k) - 1 \geq 2F(x_j) - 1 \geq 0$ ($k \geq j$) et 1 : g croît sur $[x_j, +\infty[$.

g est minimale en x_j .

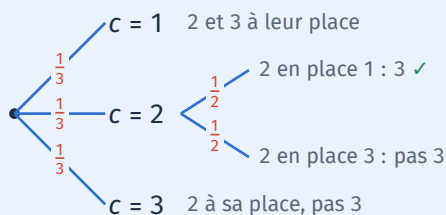
3. Inégalité triangulaire : $|\mu - m| = \left| \sum p_i(x_i - m) \right| \leq \sum p_i |x_i - m| = g(m)$, et $g(m) \leq g(\mu)$ car g est minimale en m . Soit $Y = |X - \mu|$: $E(Y) = g(\mu)$ et $E(Y^2) = E((X - \mu)^2) = V(X)$, donc $0 \leq V(Y) = V(X) - g(\mu)^2$, soit $g(\mu) \leq \sigma(X)$. Conclusion : $|E(X) - m| \leq \sigma(X)$: moyenne et médiane sont à moins d'un écart-type l'une de l'autre.
4. F vaut 0,1 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,85 ; 1 aux bornes 0, 2, 3, 7, 12. Comme $P(X < 3) = 0,4 \leq \frac{1}{2} \leq F(3) = 0,6$, la médiane est $m = 3$ (les pentes de g sont -1 ; -0,8 ; -0,2 ; 0,2 ; 0,7 ; 1).
- a) Dispensaire à la borne 3 : $g(3) = 0,1 \times 3 + 0,3 \times 1 + 0 + 0,25 \times 4 + 0,15 \times 9 = 2,95 \text{ km}$.
- b) D'après 1, à la borne $\mu = 0,6 + 0,6 + 1,75 + 1,8 = 4,75$; alors $g(4,75) = 0,475 + 0,825 + 0,35 + 0,5625 + 1,0875 = 3,3 \text{ km} > 2,95$.
- c) $E(X^2) = 1,2 + 1,8 + 12,25 + 21,6 = 36,85$, $V(X) = 36,85 - 4,75^2 = 14,2875$, $\sigma(X) \approx 3,78$, et bien $1,75 \leq 2,95 \leq 3,3 \leq 3,78$ ✓.

34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

1.



Le passager 1 choisit $c \in \{1, 2, 3\}$. Si $c = 2$, le passager 2 choisit au hasard entre les places 1 et 3 ; le passager 3 prend la dernière place libre. Donc $q(3, 2) = P(c \neq 2) = \frac{2}{3}$ et

$$q(3, 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. a) Si $c = 1$, chaque passager trouve sa place libre (récurrence : seules les places 1, 2, ..., $j - 1$ sont prises quand j arrive) : k est à sa place. Si $c > k$, de même les passagers 2, ..., k trouvent leur place libre, la seule place « volée » étant $c > k$. Si $c = k$, la place de k est prise : il n'est pas à sa place.
- b) Si $2 \leq c \leq k - 1$, les passagers 2, ..., $c - 1$ s'assoient à leur place. Quand c arrive, les places libres sont 1, $c + 1$, ..., n : il y en a $n - c + 1$; c en choisit une au hasard, puis $c + 1$, ..., n suivent la même règle. En renommant la place 1 « place de c », et la place et le passager $c + i$ « place et passager $i + 1$ » ($1 \leq i \leq n - c$), on retrouve exactement le problème à $n - c + 1$ places, de distrait c ; le passager k devient le passager $k - c + 1 \in \{2, \dots, n - c + 1\}$. Sachant c , k est donc à sa place avec la probabilité $q(n - c + 1, k - c + 1)$. Probabilités totales sur les n valeurs équiprobables de c ($c = 1$ et les $n - k$ valeurs $c > k$ donnent 1, $c = k$ donne 0) :

$$q(n, k) = \frac{1}{n} \left(n - k + 1 + \sum_{c=2}^{k-1} q(n - c + 1, k - c + 1) \right).$$

3. Montrons par récurrence forte sur $n \geq 2$ que $q(n, k) = \frac{n-k+1}{n-k+2}$ pour $2 \leq k \leq n$. Pour $n = 2$: $k = 2$, somme vide, $q(2, 2) = \frac{1}{2}$ ✓. Supposons la formule vraie pour tous les m tels que $2 \leq m < n$. Pour $2 \leq c \leq k - 1$, on a $2 \leq n - c + 1 < n$ et $(n - c + 1) - (k - c + 1) = n - k$: chacun des $k - 2$ termes vaut $\frac{n-k+1}{n-k+2}$, indépendamment de c . Donc

$$q(n, k) = \frac{n - k + 1}{n} \left(1 + \frac{k - 2}{n - k + 2} \right) = \frac{n - k + 1}{n} \times \frac{n}{n - k + 2} = \frac{n - k + 1}{n - k + 2}.$$

Le dernier passager ($k = n$) trouve sa place libre avec la probabilité $\boxed{\frac{1}{2}}$, quel que soit n .

4. $q(100, 50) = \boxed{\frac{51}{52}} \approx 0,981$. Soit L : « le dernier est à sa place » et D : « $c = 1$ ». Comme $D \subset L$:
- $$P_L(D) = \frac{P(D)}{P(L)} = \frac{1/100}{1/2} = \boxed{\frac{1}{50}} \quad (\text{en général } \frac{2}{n}).$$

■ Corrigé de l'exercice 62

- La poule se termine exactement à la partie $k \geq 2$ si chacune des parties 2, ..., $k - 1$ est gagnée par le joueur qui entre et la partie k par le vainqueur de la partie $k - 1$. La partie 1 est quelconque, chaque autre condition a la probabilité $\frac{1}{2}$, les parties sont indépendantes : probabilité $\boxed{\frac{1}{2^{k-1}}}$. Elle n'est pas terminée après n parties si les parties 2, ..., n sont gagnées par le joueur qui entre : probabilité $\frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - A bat B ; partie 2 : A contre C, et si la poule continue, C gagne ; partie 3 : C contre B, B gagne ; partie 4 : B contre A, A gagne. On est revenu à la situation d'après la partie 1 (A vient de battre B, C attend) : les vainqueurs successifs sont A, C, B, A, C, B, ...
- Sachant que A a gagné la partie 1, la poule s'arrête à la partie k avec la probabilité $\frac{1}{2^{k-1}}$ (même raisonnement), et son vainqueur est celui de la partie $k - 1$, le $(k - 1)$ -ième terme de A, C, B, ... : c'est A si $k - 1 \equiv 1 [3]$, soit $k = 3j + 2$. Donc

$$P(\text{A gagne en au plus } n \text{ parties}) = \sum_{j: 3j+2 \leq n} \frac{1}{2^{3j+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1/2}{1 - 1/8} = \boxed{\frac{4}{7}}.$$

De même, C gagne si $k = 3j + 3$: limite $\frac{1/4}{7/8} = \boxed{\frac{2}{7}}$; B si $k = 3j + 4$: limite $\boxed{\frac{1}{7}}$ (total 1 ✓). Si B gagne la partie 1, on échange A et B. Probabilités totales, puis limite :

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \boxed{\frac{5}{14}} = P(B), \quad P(C) = \boxed{\frac{2}{7}} < \frac{1}{3} : \text{commencer par attendre est un handicap.}$$

- Soit W et L le vainqueur et le perdant de la partie 1. Tant que la poule continue, les vainqueurs sont $W, C, L, W, C, L, \dots$ (comme en 1.b). C remporte la poule à la partie k s'il a gagné la partie $k - 1$ (la poule continuant) puis la partie k : $k - 1 \equiv 2 [3]$, soit $k = 3j + 3$. Partie 1 : quelconque ; partie 2 : C bat W (p) ; puis j cycles « L bat C ($1 - p$), W bat L ($\frac{1}{2}$), C bat W (p) » ; enfin C bat L (p) : probabilité $\boxed{p^2 \left(\frac{p(1-p)}{2} \right)^j}$.

b) La raison $\frac{p(1-p)}{2}$ est au plus $\frac{1}{8}$: $\pi(p) = \sum_{j \geq 0} p^2 \left(\frac{p(1-p)}{2} \right)^j = \frac{p^2}{1 - \frac{p(1-p)}{2}} = \boxed{\frac{2p^2}{2 - p + p^2}}$ (limite des sommes partielles). La poule se termine avec une probabilité tendant vers 1 (chaque partie, à partir de la deuxième, est gagnée par le joueur qui entre avec une probabilité au plus $\lambda = \max(p, 1 - p, \frac{1}{2}) < 1$, d'où une probabilité de non-fin au plus λ^{n-1}), et A, B jouent des rôles symétriques : $P(A) = P(B) = \frac{1 - \pi(p)}{2}$. C est favori si

$$\pi(p) > \frac{1 - \pi(p)}{2} \iff \pi(p) > \frac{1}{3} \iff 6p^2 > 2 - p + p^2 \iff 5p^2 + p - 2 > 0 \iff \boxed{p > \frac{\sqrt{41} - 1}{10}}.$$

Le seuil vaut environ 0,540 ; pour $p = \frac{1}{2}$, on retrouve $\pi = \frac{2}{7}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. Les 36 couples (a, b) sont équiprobables. Si $2 \leq s \leq 7$, $a + b = s$ pour $a \in \{1, \dots, s-1\}$: $s-1$ couples ; si $7 \leq s \leq 12$, pour $a \in \{s-6, \dots, 6\}$: $13-s$ couples ; dans les deux cas $6 - |s-7|$, d'où

$$p_s = \frac{6 - |s-7|}{36}. \text{ Gagner au premier lancer : } p_7 + p_{11} = \frac{6+2}{36} = \frac{2}{9}; \text{ perdre : } p_2 + p_3 + p_{12} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

2. À chaque relance (indépendante) : k avec la probabilité p_k , 7 avec p_7 , autre chose avec r . Le jeu continue après n relances si elles ont toutes donné « autre chose » : $d_n = r^n$. Il est gagné exactement à la relance j avec la probabilité $r^{j-1}p_k$, d'où $g_n = p_k \sum_{j=1}^n r^{j-1} = p_k \frac{1-r^n}{1-r}$. Comme

$$0 < r < 1 : \lim d_n = 0 \text{ et } \lim g_n = \frac{p_k}{1-r} = \frac{p_k}{p_k + p_7} \text{ (probabilité d'obtenir } k \text{ avant 7) :}$$

$$k = 4 \text{ ou } 10 : \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3}; \quad k = 5 \text{ ou } 9 : \frac{4}{10} = \frac{2}{5}; \quad k = 6 \text{ ou } 8 : \frac{5}{11}.$$

3. Probabilités totales sur le premier lancer, puis limite :

$$\gamma = \frac{2}{9} + \sum_k p_k \frac{p_k}{p_k + p_7} = \frac{2}{9} + 2 \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{45} + \frac{25}{396} \right) = \frac{2}{9} + 2 \times \frac{55 + 88 + 125}{1980} = \frac{110}{495} + \frac{134}{495} = \frac{244}{495} \approx 0,4929.$$

Le jeu se termine (car $\lim d_n = 0$) : le joueur gagne 1 DH avec la probabilité γ et perd 1 DH avec la probabilité $1 - \gamma$; gain moyen $2\gamma - 1 = -\frac{7}{495} \approx -0,014$ DH : le casino prélève environ 1,4 %

des mises. Enfin (Bayes) : $P(\text{gagné au 1^{er} lancer} \mid \text{gagné}) = \frac{2/9}{244/495} = \frac{110}{244} = \frac{55}{122} \approx 0,451$.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $x_1 = q$ (la bactérie meurt dès la première génération). La population est éteinte à la génération 2 si la bactérie meurt (q), ou si elle se divise (p) et que ses deux filles meurent (q^2 , indépendance) : $x_2 = q + pq^2$. En général, probabilités totales sur le sort de la bactérie initiale : si elle meurt, la population reste éteinte ; si elle se divise, la population est éteinte à la génération $n+1$ si chacune des deux lignées filles l'est n générations plus tard : x_n^2 (indépendance). Donc

$$x_{n+1} = q + p x_n^2.$$

2. a) $p + q = 1$ donne $px^2 - x + q = px(x-1) - q(x-1) = (x-1)(px-q)$: les solutions sont 1 et $\frac{q}{p}$. Si

$$p \geq \frac{1}{2}, \frac{q}{p} \leq 1 \text{ et } \ell = \frac{q}{p}; \text{ si } p < \frac{1}{2}, \frac{q}{p} > 1 \text{ et } \ell = 1 : \ell = \min\left(1, \frac{q}{p}\right).$$

b) f est croissante sur $[0, 1]$ et $f(\ell) = \ell$. On a $x_0 = 0 \leq x_1 = q \leq \ell$ (car $x_1 = f(0) \leq f(\ell)$) ; si $x_n \leq x_{n+1} \leq \ell$, alors $f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \leq f(\ell)$, soit $x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq \ell$. La suite, croissante et majorée, converge vers $L \in [0, \ell]$; f étant continue, $f(L) = L$, et L est une solution de $[0, 1]$ inférieure ou égale à la plus petite : $\lim x_n = \ell$.

c) Si $p \leq \frac{1}{2}$: $x_n \rightarrow 1$, la lignée s'éteint presque sûrement (chaque bactérie a en moyenne $2p \leq 1$ fille). Si $p > \frac{1}{2}$: $x_n \rightarrow \frac{q}{p} < 1$, elle survit indéfiniment avec la probabilité $1 - \frac{q}{p}$. Pour $p = \frac{3}{4}$:

$\ell = \frac{1}{3}$. Avec 5 bactéries, les 5 lignées sont indépendantes : extinction à la génération n avec

$$\text{la probabilité } x_n^5 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \approx 0,004.$$

■ Corrigé de l'exercice 65

1. Les 10 alignements (positions des deux bleues) et leur nombre de séries :

BBRRR	BRBRR	BRRBR	BRRRB	RBBRR	RBRBR	RBRRB	RRBBR	RRBRB	RRRBB
2	4	4	3	3	5	4	3	4	2

$$P(R = 2) = \frac{2}{10}, P(R = 3) = \frac{3}{10}, P(R = 4) = \frac{4}{10}, P(R = 5) = \frac{1}{10}, \text{ et } E(R) = \frac{4+9+16+5}{10} = \frac{17}{5}.$$

2. a) On écrit m comme m unités alignées : entre deux unités consécutives, il y a $m - 1$ intervalles. Une écriture $m = m_1 + \dots + m_j$ revient à choisir les $j - 1$ intervalles où l'on « coupe » (bijection) :

$$\boxed{C_{m-1}^{j-1}} \text{ façons.}$$

b) Si $R = 2k$, il y a k séries rouges et k séries bleues, qui alternent ; on choisit la couleur de la première (2 façons), les longueurs des séries rouges (somme ordonnée de k entiers ≥ 1 égale à r : C_{r-1}^{k-1}) et celles des séries bleues (C_{b-1}^{k-1}) ; ces données déterminent l'alignement. Donc

$$P(R = 2k) = \frac{2 C_{r-1}^{k-1} C_{b-1}^{k-1}}{C_n^r} \quad \text{et} \quad P(R = 2k + 1) = \frac{C_{r-1}^k C_{b-1}^{k-1} + C_{r-1}^{k-1} C_{b-1}^k}{C_n^r},$$

car si $R = 2k + 1$, la première et la dernière série ont la même couleur : $k + 1$ séries rouges et k bleues, ou l'inverse (avec $C_m^j = 0$ si $j > m$). Contrôle ($r = 3, b = 2, k = 1$) : $\frac{2}{10}$ et $\frac{2+1}{10}$ ✓.

3. a) En regroupant les issues selon la valeur de X : $P(X = x_i) = \sum_{X(\omega)=x_i} P(\{\omega\})$, donc $E(X) = \sum_i x_i \sum_{X(\omega)=x_i} P(\{\omega\}) = \boxed{\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})}$. Appliqué à $X + Y$: $E(X + Y) = \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P(\{\omega\}) = \boxed{E(X) + E(Y)}$, et par récurrence $E(X_1 + \dots + X_m) = E(X_1) + \dots + E(X_m)$.

b) Une nouvelle série commence à chaque changement de couleur : $R = 1 + T_1 + \dots + T_{n-1}$. L'événement $(T_i = 1)$ est la réunion disjointe de « i rouge, $i + 1$ bleue » et « i bleue, $i + 1$ rouge » ; chacun compte C_{n-2}^{r-1} alignements (les $r - 1$ autres rouges parmi les $n - 2$ autres positions) :

$$P(T_i = 1) = \frac{2 C_{n-2}^{r-1}}{C_n^r} = 2 \times \frac{(n-2)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!} = \frac{2rb}{n(n-1)}.$$

Comme $E(T_i) = P(T_i = 1)$, la linéarité donne $E(R) = 1 + (n-1) \frac{2rb}{n(n-1)} = \boxed{1 + \frac{2rb}{n}}$ ($r = 3, b = 2 : \frac{17}{5}$ ✓).

c) Pour n lancers d'une pièce, $R = 1 + T_1 + \dots + T_{n-1}$ de même, et deux lancers consécutifs diffèrent avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (PF ou FP parmi 4 cas) : $E(R) = 1 + \frac{n-1}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. Sachant σ , le prisonnier k réussit si la boîte contenant k est parmi ses n boîtes : probabilité $\frac{C_{2n-1}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, quelle que soit σ . Les choix étant indépendants, la libération a la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \boxed{4^{-n}}$ sachant σ , donc aussi au total. Pour 100 prisonniers : $2^{-100} \approx 8 \times 10^{-31}$.
2. a) Les $\sigma^j(k)$ ($j \geq 0$) sont dans un ensemble fini : il existe $i < j$ tels que $\sigma^i(k) = \sigma^j(k) = \sigma^i(\sigma^{j-i}(k))$; σ^i étant injective, $\sigma^{j-i}(k) = k$. Il existe donc un plus petit $L \geq 1$ tel que $\sigma^L(k) = k$. Si $\sigma^i(k) = \sigma^j(k)$ avec $0 \leq i < j \leq L - 1$, le même argument donne $\sigma^{j-i}(k) = k$ avec $0 < j - i < L$: contradiction.

b) À l'étape $j + 1$, le prisonnier ouvre la boîte $\sigma^j(k)$ et lit $\sigma^{j+1}(k)$. Il lit k pour la première fois à l'étape L (les $\sigma^i(k)$, $1 \leq i \leq L - 1$, diffèrent de k) : il trouve son numéro si et seulement si $L \leq n$.

3. a) Si $x = \sigma^i(k)$, le cycle de x est celui de k : deux cycles sont égaux ou disjoints. Deux cycles distincts de longueur $k > n$ contiendraient $2k > 2n$ éléments : impossible. Pour en avoir un : on choisit ses k éléments (C_{2n}^k) ; à partir du plus petit a , la liste $\sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)$ ordonne les $k - 1$ autres : $(k - 1)!$ cycles ; puis σ permute librement les $2n - k$ autres éléments : $(2n - k)!$. Le cycle long étant unique, rien n'est compté deux fois : $C_{2n}^k (k - 1)! (2n - k)! = \frac{(2n)!}{k}$.

b) Tous sont libérés si et seulement si aucun cycle n'a une longueur $k \in \{n + 1, \dots, 2n\}$; ces événements sont deux à deux incompatibles (a), d'où $1 - \pi_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!/k}{(2n)!}$ et $\pi_n = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

$\pi_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$; en dénombrant les 24 permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ sans cycle de longueur 3 ou 4 : l'identité, 6 transpositions et 3 doubles transpositions, soit $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ ✓.

4. Pour $t \in [k, k + 1]$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, avec des inégalités strictes sauf en une extrémité ; en intégrant : $\frac{1}{k+1} < \ln(k + 1) - \ln k < \frac{1}{k}$. En sommant (télescopage) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k+1}{k} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{k-1} = \ln \frac{2n}{n} = \ln 2.$$

Donc, quel que soit n , $\pi_n > 1 - \ln 2 \approx 0,307$, contre 4^{-n} au hasard ! Par encadrement ($\ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$) : $\lim \pi_n = 1 - \ln 2$. Pour 100 prisonniers ($n = 50$) : $\pi_{50} \approx 0,312$.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Dénombrement	31 à 36	/ 6	
Thème B · Probabilités et équiprobabilité	37 à 42	/ 6	
Thème C · Probabilités conditionnelles	43 à 48	/ 6	
Thème D · Indépendance et épreuves répétées	49 à 54	/ 6	
Thème E · Variables aléatoires	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Et maintenant : Révisions pour l'examen national

Maths Olympiad