

**Niveau : Deuxième bac
sciences maths**

Cours détaillé 1

Continuité d'une fonction

Plan de chapitre 1 : Continuité d'une fonction

- Cours détaillé
- Résumé de cours
- Série de 17 exercices
- Correction détaillée des exercices

admin



Prof fayssal

0681399067

www.elboutkhili.jimdofree.com

I) Continuité d'une fonction en un point

1. Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

Activité :

Soient f et g deux fonctions tels que :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} ; x \neq 2 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

1) a) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) Tracer (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé

2) Déterminer D_g et tracer (C_g) la courbe de la fonction g dans un repère orthonormé

Solution :

Soient f et g deux fonctions tels que :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} ; x \neq 2 \\ g(2) = 0 \end{cases}$$

1) a) Déterminer D_f puis calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$D_f = (\mathbb{R} - \{2\}) \cup \{2\} = \mathbb{R}$$

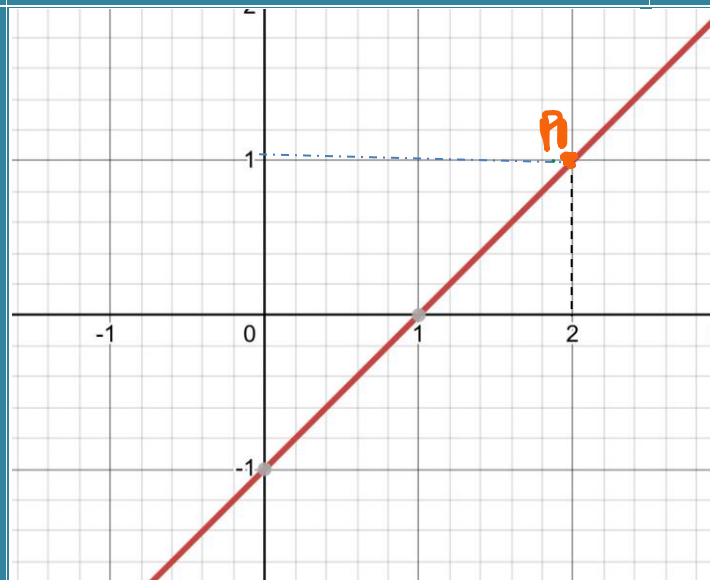
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Tracer (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé

On a $f(2) = 1$ donc (C_f) passe par le point $A(2 ; 1)$

Si $x \neq 2$, on a $f(x) = x - 1$

Donc (C_f) est une droite passe par exemple par le point $B(1 ; 0)$



On a la courbe (C_f) est continue au point A et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

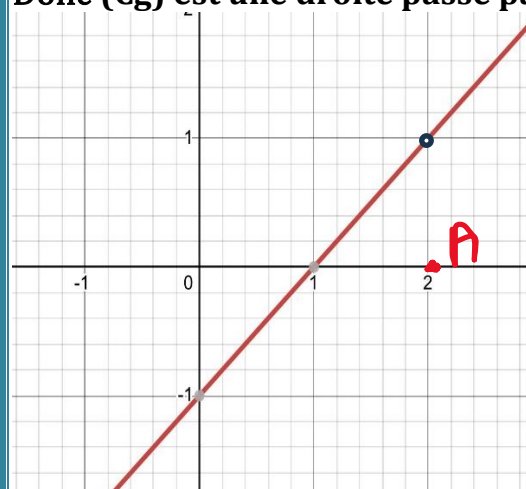
2) a) Déterminer D_g et tracer (C_g) la courbe de la fonction g

$$D_g = [0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[= \mathbb{R}$$

On a $g(2) = 0$ donc (C_g) passe par le point $A(2 ; 0)$

Si $x \neq 2$, on a $g(x) = x - 1$

Donc (C_g) est une droite passe par exemple par le point $B(1 ; 0)$



On a la courbe (C_g) n'est pas continue au point A de plus on a : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

Conclusion :

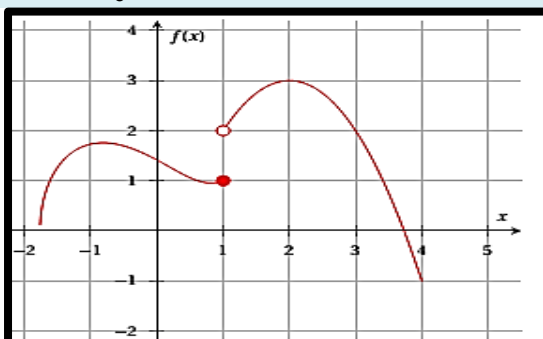
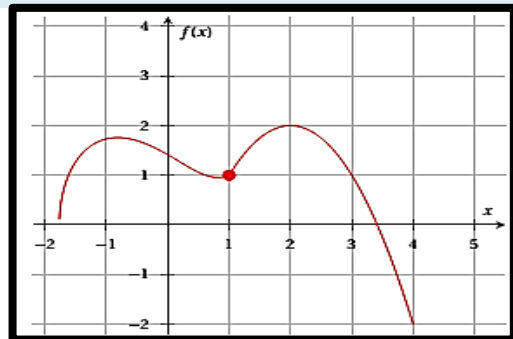
On dit que f est une fonction continue en a ssi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Définition :**

f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



La fonction f est continue en 1 f n'est pas continue en 1

EXEMPLES

1) f une fonction définit par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $a = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 = f(2) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

D'où f est continue en $a = 2$

2) Soit la fonction f définit par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Etudier la continuité de f en $a = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$; D'où f est continue en $a = 1$

2. Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

a. **Activité :** Fonction partie entière

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$;

L'entier relatif p tel que : $p \leq x < p + 1$

s'appelle la partie entière de réel

x ; on note par E(x) ou [x] , donc

$(\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) \leq x < E(x) + 1$

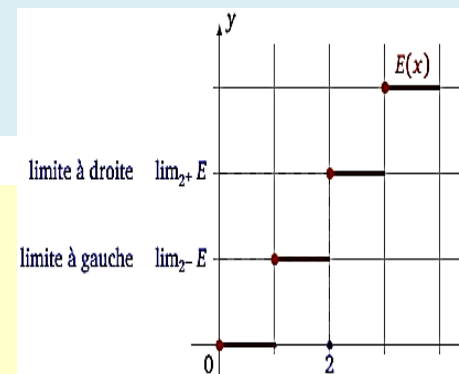
Propriétés : Soit $p \in \mathbb{Z}$

➤ $(\forall x \in I = [p; p + 1[) ; E(x) = p$

➤ $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}) ; E(x + p) = E(x) + p$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - 1 < E(x) \leq x$



Est-ce-que la fonction partie entière est continue en 2 ; en $\frac{1}{2}$??

a. Définition :

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; a + r[; r > 0$

f est continue à droite de a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I =]a - r ; a] ; r > 0$

f est continue à gauche de a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

b. Propriété :

la fonction f est continue en a $\Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche du point a



Exercic 01

Etudier la continuité en x_0 des fonctions suivantes :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{1-x^2}{x-1} & ; x > 1 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1 & x \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 1$$

$$2) \begin{cases} f(x) = -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2} & ; x < 0 \\ f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{12} \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{en } x_0 = 0$$

Solution :

$$1) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 = f(1)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) ;$$

D'où f est continue à gauche de $a = 1$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-1)(1+x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -(1+x) \\ &= -2 = f(1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) .$$

D'où f est continue à droite de $a = 1$

Conclusion : f est continue en 1

$$2) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3} \sin(x)}{12x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{\sin(x)}{x}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)$$

$$\text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

D'où f est continue à droite de 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{2+\cos x})^2 - \sqrt{3}^2}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+\cos x - 3}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x^2 (\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{(1-\cos x)}{x^2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos x} + \sqrt{3})} \quad \text{Rappel: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(\sqrt{2+\cos 0} + \sqrt{3})} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} = f(0)$$

D'où f est continue à gauche de 0

Conclusion : f est continue en 0

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^* ; \text{ on a : } |f(x)| = \left| \sin x \sin \frac{1}{x} \right| = |\sin x| \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$\leq |\sin x| \quad ; \quad \text{Car } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$\text{Donc : } -|\sin x| \leq f(x) \leq |\sin x|$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} -|\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$$

Donc d'après théorème d'encadrement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$; d'où f est continue en 0



3) Prolongement par continuité

Définition

I un intervalle tel que $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$
 La fonction f est dite prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 ; Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

- On définit alors la fonction $\bar{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} f(x) ; x \neq x_0 \\ f(x_0) = l \end{cases}$
- Alors $\bar{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0

Exercice 02

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right)$

- Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0
- Déterminer $\bar{f}$ le prolongement par continuité de f en 0

III) Continuité sur un intervalle

1) Définition

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

2) Exemples des fonctions usuelles continue sur un intervalle

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
- La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$
- La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \rightarrow \tan x$ est continue sur tout intervalle inclus dans l'ensemble $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) Opérations sur les fonctions continues

a) Somme -produit-quotient

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\alpha \cdot v)$ est continue sur I ssi u est continue sur I
- La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = \left(\frac{u}{v}\right)$ est continue sur I ssi u est continue et v continue sur I et $\forall x \in I ; v(x) \neq 0$

EXEMPLES

- la fonction $f: x \rightarrow x^3 + x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme
- Montrons que la fonction $f: x \rightarrow 2 \cos(x) + x^3 + 3$ est continue sur $[0; +\infty[$
 - On a la fonction $u: x \rightarrow 2 \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, car la fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; +\infty[$
 - Et on a la fonction $v: x \rightarrow x^3 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une polynôme en particulier sur $[0; +\infty[$;
 - Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $\mathbb{R}$
- Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \frac{x+1}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

1^{ère} méthode :

g est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son domaine de définition qui est $\mathbb{R}$ (car $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 3 \neq 0$)

2^{ème} méthode :

On a la fonction $u: x \rightarrow x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$

- On a la fonction $v: x \rightarrow x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, (polynôme) ; et on a $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 + 3 \neq 0$
- Donc la fonction $g = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$

b) Continuité de la composée de deux fonctionsActivité

f et g deux fonctions tels que : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{3x}{x-1}$

1) Déterminer $D_{g \circ f}$ puis Cours détaillé 1

2) Déterminer l'expression de $(g \circ f)(x)$

3) Déterminer $D_{f \circ g}$ puis déterminer l'expression de $(f \circ g)(x)$

$$g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Définition :

f et g définies respectivement sur I et J

tel que $f(I) \subset J$; **La composée** des fonctions f et g notée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par $\forall x \in I; g \circ f(x) = g(f(x))$

Remarques :

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

Propriété 01 :

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I

EXEMPLE :

Montrer que la fonction $f: x \rightarrow \sin(x^2 + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$

f est une fonction composée de deux fonctions $u: x \rightarrow x^2 + 1$ et $v: x \rightarrow \sin x$ tel que $f = v \circ u$

➤ On a la fonction $u: x \rightarrow x^2 + 1$ est **continue** sur $\mathbb{R}$, (polynôme)

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 > 0$; donc $f(\mathbb{R}) \subset]0; +\infty[$

Et on a la fonction $v: x \rightarrow \sin x$ est **continue** sur $]0; +\infty[$

➤ Donc $f = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$

Résultats :

Soit u est une fonction définie sur I et n un entier naturel

➤ La fonction $f = \sqrt[n]{u}$ est continue sur I ssi la fonction **u est continue** sur I et $\forall x \in I; u(x) \geq 0$

➤ Pour montrer que les fonctions $x \rightarrow \cos(u)$; $x \rightarrow \sin(u)$ $x \rightarrow |u|$ et $x \rightarrow u^n$ sont continue sur I , il suffit de montrer que la fonction **u est continue** sur I

EXEMPLE :

Montrons que la fonction $g: x \rightarrow \sqrt{x+3}$ est continue sur $[0; 1[$

On a la fonction **$u: x \rightarrow x+3$** est **continue** sur $[0; 1[$

(polynôme) Et on a $\forall x \in [0; 1[, x+3 \geq 0$;

Donc $g = \sqrt{u}$ est continue sur $[0; 1[$

Propriété 02 :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue en l

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(l)$$

Exercice 03

Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 5} \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x-1}-2\pi}{x-5}\right)$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\pi\sqrt{x-1}-2\pi}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\pi(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\pi(x-1-4)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\pi(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\pi}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Et comme la fonction $x \rightarrow \sin x$ est continue en $\frac{\pi}{4}$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x-1}-2\pi}{x-5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Exercic 04

f une fonction Définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2} ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} ; x < 2 \\ f(2) = \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition

2) Montrer que f est continue en 2.

3) Etudier la continuité de f sur D_f

Solution :

1) Considérons la fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ et $v: x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

$$x \in D_u \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ ou } x \neq -1$$

$$\text{Donc } D_u =]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $]2; +\infty[$ est définie sur :

$$D_u \cap]2; +\infty[=]2; +\infty[$$

$$x \in D_v \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 0 \text{ et } x + 2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } \sqrt{x+2} \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x + 2 \neq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ ou } x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_v = [-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

➤ Donc la restriction de f sur $] -\infty; 2[$ est définie sur :

$$D_v \cap] -\infty; 2[= [-2; 2[$$

➤ Donc $D_f = [-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\}$, car $f(2) = \frac{8}{3}$

➤ D'où $D_f = [-2; +\infty[$

2) Montrer que f est continue en 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2}{x+1} = \frac{8}{3} = f(2) \end{aligned}$$

Donc f est continue à droite de 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2+5-3^2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-2^2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2^2+5}+3)} \\ &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = f(2) \quad ; \text{ f est continue à gauche de 2} \end{aligned}$$

Conclusion : f est continue en 2

➤ 3) La fonction $u: x \rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ est continue sur toutes intervalles inclu dans D_u ; car c'est une fonction rationnelle
Donc elle est continue sur $]2; +\infty[$

➤ La fonction $x \rightarrow -3$ est continue sur $] -2; 2[$
La fonction $x \rightarrow x^2 + 5$ est continue sur $] -2; 2[$
Et $\forall x \in [-2; 2[: x^2 + 5 \geq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $] -2; 2[$
D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2+5} - 3$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ La fonction $x \rightarrow -2$ est continue sur $] -2; 2[$
La fonction $x \rightarrow x + 2$ est continue sur $] -2; 2[$
Et $\forall x \in [-2; 2[: x + 2 \geq 0$

D'où La fonction $x \rightarrow \sqrt{x+2} - 2$ est continue sur $] -2; 2[$

➤ En on a : $\forall x \in [-2; 2[: \sqrt{x+2} - 2 \neq 0$

Donc La fonction $x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ est continue sur $] -2; 2[$

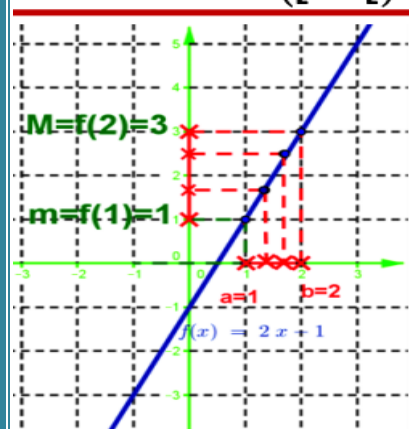
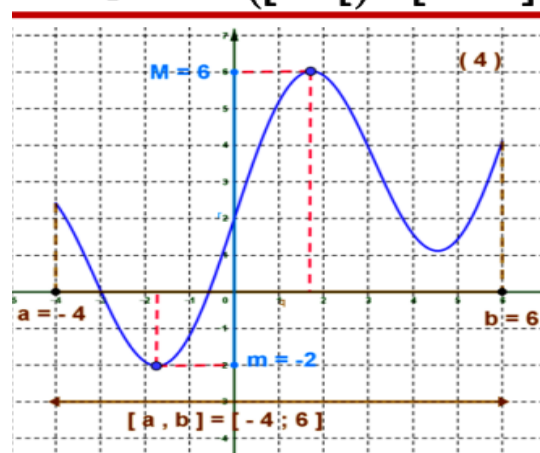
➤ D'où la fonction f est continue sur $] -2; 2[$ et sur $]2; +\infty[$
Et d'après la question 2) on a f est continue en 2

Donc f est continue sur $[-2; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{2\} = [-2; +\infty[$

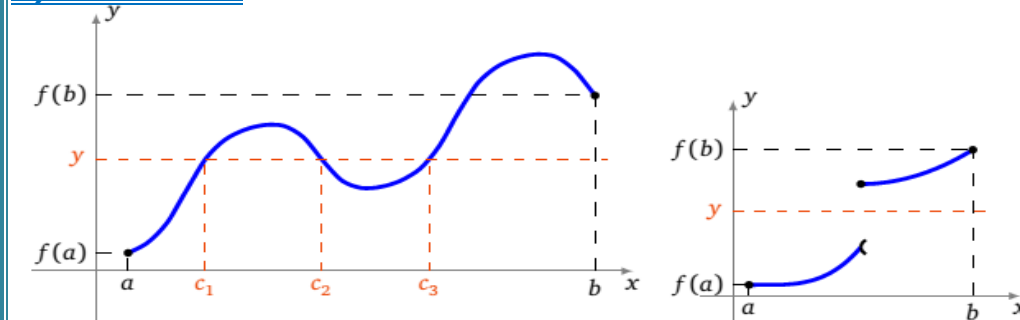
**VI) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire****1) Image d'un intervalle par une fonctions continue****a) Théorème :**

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

- Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$.

Alors $f([a, b]) = [m, M]$ **Exemple 1 : $f([1, 2]) = [1, 3]$** **Exemple 2 : $f([a, b]) = [m, M]$** **b) Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone** f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

f est strictement croissante sur I	f strictement décroissante
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$f([a; b]) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a; b]) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$f(]a; b]) =]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty; b]) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$f(]-\infty; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Exercice 05**1) Soit f une fonction tel que ; $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$** Déterminer $f(]-\infty; +\infty[)$ **2) Soit g une fonction tel que ; $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$** Déterminer $g(]1; +\infty[)$ **Solution :****1) Soit f tel que ; $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$; déterminer $f(]-\infty; +\infty[)$** Pour tout $x \in]-\infty; +\infty[$ f est dérivable, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$ ➤ Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$ Alors : $f(]-\infty; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty; +\infty[$ Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$ **2) On a pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$** ➤ Donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ $f(]1; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)[=]2; +\infty[$ **2)Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)****a)Théorème :**

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **il existe** un réel c dans $[a; b]$ tel que **$f(c) = k$**

En **d'autres termes** : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$



Démonstraton On a $f([a, b]) = [m, M]$ car f est continue sur $[a, b]$
 Si $f(a) \leq f(b)$ alors $k \in [f(a), f(b)] \subset [m, M]$ donc $k \in f([a, b])$
 Donc $(\exists c \in [a, b]); f(c) = k$

b) Corollaires du Théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 01

Si f une **fonction continue** sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$; alors
 l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution α dans $]a, b[$
 De plus si f est **strictement monotone** sur $[a, b]$ alors α est **unique**

Exercice 06

- 1) Montrons que l'équation $x^3 - 5 = 0$ possède au moins une solution dans $[0; 2]$
- 2) Montrer que l'équation $\sin(x) + x + \frac{1}{2} = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, 0]$

Solution :

1) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 5$
 f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et on particulier sur $[0; 2]$
 De plus on a : $f(0) = -5$ et $f(2) = 3$ donc $f(0) \times f(2) < 0$
 D'après **TVI** $f(x) = 0$ admet **au moins une solution** α dans $[0; 2]$

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin(x) + x + \frac{1}{2}$
 La fonction **f est continue** en tant que somme des fonctions continues, de plus $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ donc $f(0) \cdot f(-\frac{\pi}{6}) < 0$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; alors $f'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$
 alors **f strictement croissante sur $[-\pi/6, 0]$.**

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle

Corollaire 02

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I et $k \in f(I)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** α dans I

Exercice 07

Montrons que l'équation $x^5 + x^3 = 1 - x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Solution :

On pose pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$

- **f est continue sur $\mathbb{R}$**
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$; et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

Donc **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** . Et de plus on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$$

$$\text{Alors } f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

donc **$0 \in f(\mathbb{R})$**

Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Exercice 08

f une fonction définit par le tableau de variations, ci-dessous
 Déterminer le nombre de solution

des équations suivantes
 puis encadrer ces solutions.

- $f(x) = 18$
- $f(x) = 0$
- $f(x) = -3$
- $f(x) = 3$

x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

Solution :

a) L'équation $f(x) = 18$

Possède 1 solution compris dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.

b) L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $] -4 ; -3[$, $] -3 ; -1[$ et $] -1 ; 1[$.

c) L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

d) L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.



3) Principe de la méthode de dichotomie

f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$; l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans $[a, b]$

On peut obtenir des encadrements plus précis en procédant comme suit :

- On coupe $[a, b]$ en deux intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$
- On garde l'intervalle qui contient la solution de l'équation et on le divise en deux intervalles d'égales longueurs, Ainsi de suite jusqu'à' obtenir la précision de l'encadrement souhaité.

Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ et on a $f(0) \cdot f(1) < 0$ Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$.

Déterminons un encadrement de α de longueur 0.25

- Le centre de $[0, 1]$ est $\frac{1}{2}$ et on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{8}$. Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 1/2 = 1/2$)

Le centre de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est $\frac{3}{4}$ et on a $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-17}{64}$ donc $f(1) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ donc $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ (Longueur $1 - 3/4 = 1/4 = 0.25$)

A. Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1) Proposition :

f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I

Alors la fonction f est une bijection de I vers $J = f(I)$

de plus la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1}

défini sur $J = f(I)$, par la relation suivantes

$$y = f^{-1}(x) \text{ et } x \in J \Leftrightarrow f(y) = x \text{ et } y \in I$$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par ; $f(x) = x^2$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f est une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ vers J avec

$$J = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$$

Pratiquement pour déterminer l'expression de f^{-1}

Pour déterminer f^{-1} , On peut suit le schéma suivant :

Soit $x \in J$ cherchons $y \in I$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

Et on cherche le y en fonction de x

c-à-dire on résoudre l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y

EXEMPLE :

f une fonction définis sur $I = [0; 1]$ par $f(x) = x^2 + 3$

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} , défini sur J que l'on déterminera

- f est continue sur IR (polynome) et on particulier sur $[0; 1]$ et on a pour tout $x \in]0; 1[$: $f'(x) = 2x > 0$ Donc f est strictement croissante sur $[0; 1]$. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} défini sur J et on a : $J = f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [3; 4]$

2) Déterminerons f^{-1} la fonction réciproque de f

Soit $x \in J = [3; 4]$; cherchons $y \in I = [0; 1]$ tel que $y = f^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 3 = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x - 3} \text{ (car } y > 0 \text{)}$$

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$ pour tout $x \in [3; 4]$



Exercice 09

f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \sqrt{x} - 4$

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J (à déterminer)
- 2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Solution :

f une fonction définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x + \sqrt{x} - 4$

- 1) Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J (à déterminer)

➤ On a la fonction $u : x \rightarrow x - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$,
en particulier sur $[0; +\infty[$

Et on a la fonction $v : x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$;

Donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$

➤ La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, donc f est strictement
croissante sur $\mathbb{R}^+$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers J et $J = f(I)$

$$J = f(I) = f([0; +\infty[) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-4; +\infty[$$

- 2) Soit $x \in [-4; +\infty[$ cherchons $y \in [0; +\infty[$ tel que $y = f^{-1}(x)$;
 $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{y} - 4 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}^2 + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x + 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad ; y \in [0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{17}{4} ;$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{y} + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{x + \frac{17}{4}} \quad ; \left(\text{car } x + \frac{17}{4} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{17}{4}} \quad ; \left(\text{car } \sqrt{y} + \frac{1}{2} \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x + \frac{17}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + \frac{17}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ pour tous } x \in [-4; +\infty[$$

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-1}$

- 1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J
- 3) Tracer la courbe de f et f^{-1} dans le même repère orthonormé

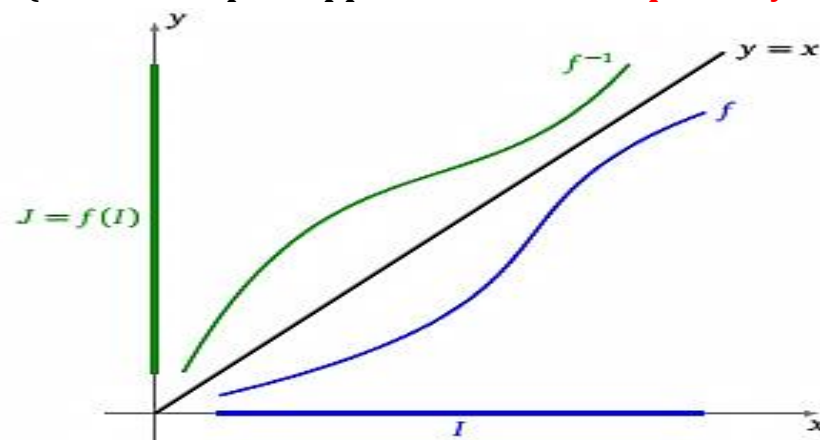
2) Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un I alors :

- 1) $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$
- 2) f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que f

- 3) Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice

(c'est-à-dire par rapport à la droite **d'équation $y=x$**)



- 4) $(\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad (\forall x \in J); f \circ f^{-1}(x) = x$

**B. Fonction racine n-ième**

La fonction $x \rightarrow x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$

Cette fonction est appelée la fonction racine n-ième, et elle est notée par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

2. Propriétés du fonction racine n-ième

Soient x et y dans $[0; +\infty[$ et m et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$1) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$2) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x} \text{ et } \sqrt[n]{x} = x$$

$$3) D_{\sqrt[n]{x}} = [0; +\infty[$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$5) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$6) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$$

$$7) \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$$

$$8) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$9) \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

EXEMPLES :**1) Comparer les nombres: $\sqrt[4]{3}$ et $\sqrt[3]{2}$**

$$\text{On a : } \sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 3]{3^3} = \sqrt[12]{27} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^4} = \sqrt[12]{32}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{2}$$

2) Simplifier le nombre $A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}}$

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^8}} = \sqrt[3 \times 4]{2^8} = \sqrt[3 \times 4]{2^{2 \times 4}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) $x^3 = 8$

$$(E) \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc } S = \{-2\}$$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt[5]{(x+2)^2} - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$(E_2) : \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1}$$

Solution :

1) L'équation (E_1) est définie si $x+2 \geq 0$

Donc le domaine de définition est : $D_{(E_1)} = [-2; +\infty[$

$$(E_1) \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^2 - 4\sqrt[5]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X)^2 - 4X + 3 = 0 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 3 \quad \text{avec } X = \sqrt[5]{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2} = 1 \text{ ou } \sqrt[5]{x+2} = 3$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 1^5 \text{ ou } x+2 = 3^5$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3^5 - 2$$

Les deux solutions sont dans $D_{E_1} = [-2; +\infty[$

$$\text{Donc } S = \{-1; 3^5 - 2\}$$

2) $x \in D_{(E_2)} \Leftrightarrow 1 - 2x \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \geq -1$$

Donc le domaine de (E_2) est : $D_{(E_2)} = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$$(E_2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[6]{(1-2x)^2} = \sqrt[6]{(x+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 - x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Donc } S = \{0\}$$



Exercic 12

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - 8x$$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[3]{x-1} - 2 = \sqrt[3]{9-1} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{0}{0}$ ".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\text{Rappel ; } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2^3}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 1 - 8}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)}{(x-9)[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{[(\sqrt[3]{x-1})^2 + 2\sqrt[3]{x-1} + 2^2]} = \frac{1}{[(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2]} \\ &= \frac{1}{[4 + 4 + 4]} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} = +\infty, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2+3)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 8x = +\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x} - 8x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3(1 + \frac{x}{x^3})} - 8x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 = 1 - 8 = -7$$

2. Puissances rationnelles d'un nombre réel str positif :Définition : Soit a un réel strictement positif et $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\text{on pose } r = \frac{p}{q}, \text{ on a : } a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriété : r et r' deux rationnels alors :

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$(ab)^r = a^r \times b^r ; \quad \frac{1}{a^r} = a^{-r} ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

Exercic 13

$$\text{Montrer que } \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} = 10$$

Solution :

$$\begin{aligned} * \frac{\sqrt[3]{10^5} \times \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{15^2} \times \sqrt[3]{2^4}} &= \frac{(2 \times 5)^{\frac{5}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(3 \times 5)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 5^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \\ &= 2^{\frac{5}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \times 5^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} \times 3^0 \times 5^{\frac{3}{3}} \\ &= 2^1 \times 1 \times 5^1 = 10 \end{aligned}$$

**C. Fonction arctangente**

• La fonction $x \rightarrow \tan x$ est continue et strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc il réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

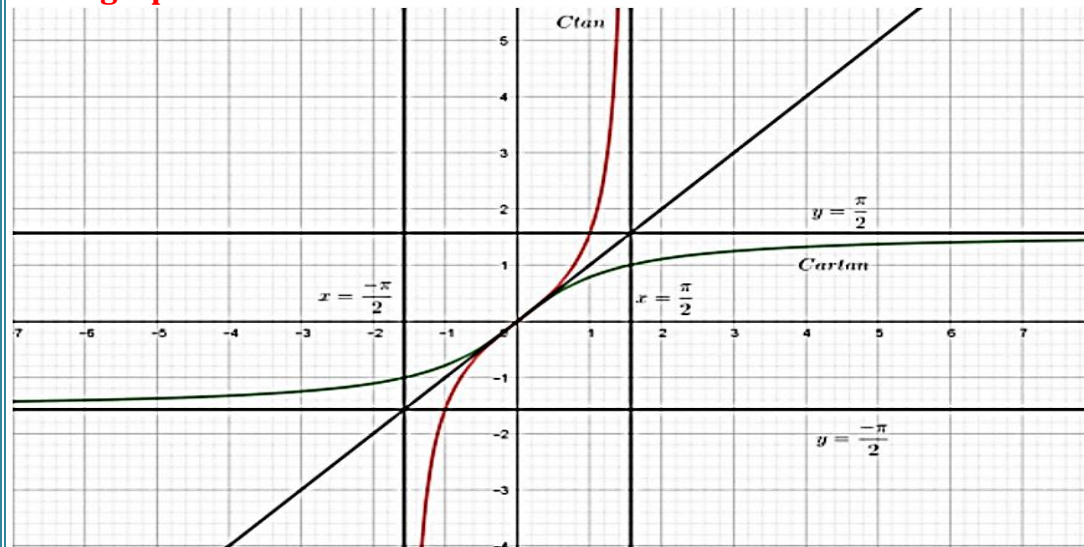
• La fonction réciproque est appelé **arctangente**, notée $\arctan$

Remarque :

➤ La fonction $x \rightarrow \arctan x$ est défini sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

➤ La fonction $x \rightarrow \arctan x$ est impaire

Le graphe de la fonction $x \rightarrow \arctan x$



Propriétés :

$$1. \forall (x, y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \tan x = y \iff x = \arctan y$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \text{ et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x.$$

$$3. (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \arctan x = \arctan y \iff x = y$$

4. La fonction $\arctan$ est impaire.

5. La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$6. x \in]0; +\infty[\iff 0 < \arctan x < \frac{\pi}{2} \text{ et } x \in]-\infty; 0[\iff -\frac{\pi}{2} < \arctan x < 0$$

Exemples : Simplifier les nombres suivants

$$\begin{aligned} 1) A &= \arctan(\tan(\frac{15\pi}{7})) = \arctan(\tan(\frac{15\pi}{7})) \\ &= \arctan(\tan(2\pi + \frac{\pi}{7})) \\ &= \arctan(\tan(\frac{\pi}{7})) \end{aligned}$$

$$\text{et on a ; } \frac{\pi}{7} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\text{ donc } A = \frac{\pi}{7}$$

$$\begin{aligned} 2) B &= \arctan(\tan(5 \arctan \sqrt{3})) = \arctan(\tan(5 \times \frac{\pi}{3})) \\ &= \arctan(\tan(2\pi - \frac{\pi}{3})) \\ &= \arctan(\tan(-\frac{\pi}{3})) \end{aligned}$$

$$\text{et on a ; } -\frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\text{ donc } B = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} 3) C &= \tan((2 \arctan 3)) = \arctan(\arctan 3 + \arctan 3) \\ &= \frac{\tan(\arctan 3) + \tan(\arctan 3)}{1 - \tan(\arctan 3) \times \tan(\arctan 3)} \\ &= \frac{3+3}{1-3 \times 3} = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Exercic 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1); \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad (E_2); \arctan(x^2 - x) = \frac{3\pi}{4}$$

Solution :

$$\begin{aligned} 1) \arctan(2x) &= \frac{\pi}{4} \iff \tan(\arctan(2x)) = \tan(\frac{\pi}{4}) \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{donc } S = \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \arctan(x^2 - x) &= \frac{3\pi}{4} \iff \tan(\arctan(x^2 - x)) = \tan(\frac{3\pi}{4}) \\ &\iff \tan(\arctan(x^2 - x)) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) \\ &\iff x^2 - x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \\ &\iff x^2 - x = -1 \iff x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

donc $S = \emptyset$, car le discriminant delta est négatif



Exercic 15

1. Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[); \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
2. Montrer que ; $(\forall x \in]-\infty; 0[); \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$
3. Calculer la valeur de ; $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$
et la valeur de $\arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1)$
4. Résoudre dans IR l'équation : (E); $\arctan x + \arctan (x - 1) = \frac{\pi}{2}$
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+; \arctan(x + 1) - \arctan x = \arctan(\frac{1}{x^2 + x + 1})$

Solution :

1) 1 ère méthode :

Soit $x \in]0; +\infty[$ On a : $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$ Donc $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x}$ Et on a la fonction $x \rightarrow \tan x$, réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ Donc : $\arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \arctan x)) = \arctan(\frac{1}{x})$ Donc $\frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan(\frac{1}{x})$ D'où $(\forall x \in]0; +\infty[); \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

2ème méthode :

Soit $x \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel c dans $]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan c = x$ (T.V.I) donc $c = \arctan x$

$$\tan c = x \Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan c}\right)$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\right)$$

et comme $\frac{\pi}{2} - c \in]0; \frac{\pi}{2}[$ on déduit que $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\right) = \frac{\pi}{2} - c$ Donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - c$, et on a $c = \arctan x$ donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. d'ou $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ 2) Soit $x \in]-\infty; 0[$ donc $-x \in]0; +\infty[$

$$\text{Donc } (\forall x \in]-\infty; 0[); \arctan(-x) + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } (\forall x \in]-\infty; 0[); \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Car la fonction arctan est impaire

$$3) \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$A = \arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan(\sqrt{2} + 1)$$

$$= \arctan(\sqrt{2} - 1) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

4) Le signe de $\arctan x$ est celui de x et puisque $\frac{\pi}{2} > 0$ alors $x > 0$ Soit $x \in]0; +\infty[$; on a $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, donc l'équation (E)

$$\text{équivalente à : } \arctan(x - 1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x - 1 = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

On obtient solution $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et comme x est positif on a : $S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ 5) MQ : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \arctan(x + 1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$ Soit $x \in]0; +\infty[$ On pose $a = \arctan(x + 1)$ et $b = \arctan x$ On a : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $0 < a - b < \frac{\pi}{2}$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} = \frac{x + 1 - x}{1 + (x + 1) \times x} = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{Donc : } a - b = \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[: \arctan(x + 1) - \arctan x = \arctan\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

Exercic 16

1) Soient a et b deux réel positifs montrer que :

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right)$$

2) Résoudre dans IR : (E) ; $\arctan(\sqrt{x} - 1) - \arctan(\sqrt{x} + 1) = -\frac{\pi}{4}$

Solution :

1) a et b positifs donc $\arctan(a) \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ et $\arctan(b) \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$

Donc $\arctan(a) - \arctan(b) \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a) \tan(\arctan b)} = \frac{a - b}{1 + ab}$$

donc $\arctan a - \arctan b = \frac{a-b}{1+ab}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: (E) ; $\arctan(\sqrt{x} - 1) - \arctan(\sqrt{x} + 1) = -\frac{\pi}{4}$

$$\arctan(\sqrt{x} - 1) - \arctan(\sqrt{x} + 1) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{-2}{x}\right) = \arctan(-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{x} = -1 \Leftrightarrow x = 2$$

Exercic 17

Considérons la fonction f définie sur $I = [0 ; 1]$ par

$$f(x) = \arctan(x+1) + \arctan(x) + \arctan(x-1) - \frac{\pi}{2}$$

1) Montrer que $\exists ! c \in]0 ; 1[; f(c) = 0$

2) Résoudre dans $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = 0$

Solution :

1) La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue sur I

La fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$ est continue sur I

La fonction $x \mapsto \arctan(x-1)$ est continue sur I

donc **la fonction est continue sur I**

Et on a : $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0$ et on a :

$$f(1) = \arctan 2 + \arctan 1 - \frac{\pi}{2} = \arctan 2 - \frac{\pi}{4} = \arctan 2 - \arctan 1 > 0$$

Montrons que f est strictement croissante sur I

La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est strictement croissante sur I

La fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$ est strictement croissante sur I

La fonction $x \mapsto \arctan(x-1)$ est strictement croissante sur I

donc **la fonction est strictement croissante sur I**

D'où $\exists ! c \in]0 ; 1[; f(c) = 0$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$

$$\Leftrightarrow \arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \arctan\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\arctan(x+1) + \arctan(x-1)) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan(\arctan((x+1) + (x-1)))}{1 - \tan(\arctan(x+1)\arctan(x-1))} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1) + (x-1)}{1 - (x+1)(x-1)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 3x^2 = 2$$

On obtient solution $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et comme x dans I on a : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}$

Limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

Exercic 18

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{x} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt[3]{x^3 + x} - 8x) ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^2 - x)}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right) ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}$$

Solution :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{3x} \times 3 = 3$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) ??$$

$$\text{On a ; } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$



$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt[3]{x^3 + x} - 8x)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - 8x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3(1 + \frac{x}{x^3})} - 8x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - 8 = 1 - 8 = -7$$

$$\text{Et on a : } \lim_{X \rightarrow -\infty} \arctan(X) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc par composition on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt[3]{x^3 + x} - 8x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$4) \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \arctan(X) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x^2 - x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x^2 - x)}{x} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty \times 0$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{1+x}}{x} \times \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} \times \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \times \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)} = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{X}(X+1)} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\arctan(X)}{X} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} x = -\infty$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Et on a d'après l'exercice 17 : } \arctan \sqrt{x} + \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} = -\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \arctan \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} \times \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\text{On pose } X = \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ donc } \sqrt{x} = \frac{1}{X} \text{ et } x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow X \rightarrow 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} \times \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} -\frac{1}{X} \times \frac{\arctan X}{X} = -\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{X \rightarrow 0^+} -\frac{1}{X} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\arctan X}{X} = 1$$

**1) Continuité d'une fonction en un point****Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0**

f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; a + r[; r > 0$

f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I =]a - r; a]; r > 0$

f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche du point a

3. Fonction partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$(\forall x \in \mathbb{R}): E(x) \leq x < E(x) + 1$

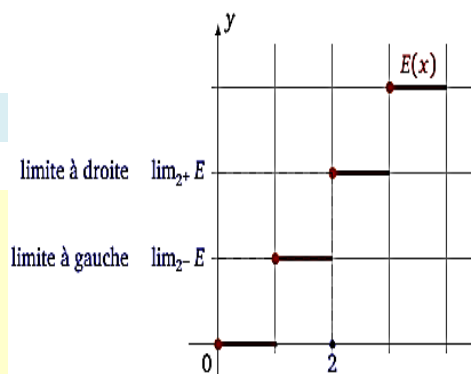
Propriétés : Soit $p \in \mathbb{Z}$

➤ $(\forall x \in I = [p; p + 1[); E(x) = p$

➤ $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}); E(x + p) = E(x) + p$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}): x - 1 < E(x) \leq x$

**3) Prolongement par continuité**

I un intervalle tel que $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$

La fonction f est dite prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 ; Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

- On définit alors la fonction $\bar{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} f(x); & x \neq x_0 \\ f(x_0) = l \end{cases}$$
- Alors $\bar{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0

2) Continuité sur un intervalle

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Exemple des fonction usuelles continue sur un intervalle

- 1) Toute fonction polynomiale est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 2) Les fonctions rationnelles sont continus en tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
- 3) La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur tout intervalles inclus dans $[0; +\infty[$
- 4) La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 5) Les fonctions cos et sin sont continus sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions continues**Somme -produit-quotient**

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\alpha \cdot u)$ est continue sur I ssi u est continue sur I
- La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\frac{u}{v})$ est continue sur I ssi u est continue et v continue sur I et $\forall x \in I; v(x) \neq 0$



Continuité de la composée de deux fonctions

$$g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$$

f et g définies respectivement sur I et J

tel que $f(I) \subset J$; La **composée** des fonctions f et g notée gof est la fonction définie sur I par $\forall x \in I; gof(x) = g(f(x))$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction gof est continue sur J

Résultats :

Soit u est une fonction définie sur I et n un entier naturel

➤ Pour montrer que la fonction $f = \sqrt[n]{u}$ est continue sur I, il suffit de montrer que **u est continue** sur I et $\forall x \in I; u(x) \geq 0$

➤ Pour montrer que les fonctions $x \rightarrow \cos(u)$; $x \rightarrow \sin(u)$
 $x \rightarrow |u|$ et $x \rightarrow u^n$ sont continue sur I, il suffit de montrer que **u est continue** sur I

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue en l
 alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(l)$

3) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire

Image d'un intervalle par une fonctions continue

➤ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
 ➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

➤ Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$.

$$\text{Alors } f([a, b]) = [m, M]$$

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

f strictement croissante sur I	f strictement décroissante
$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$	$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
$f([a; +\infty[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$f([a; +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$f([a; b[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$f([a; b[) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$f(]a; b]) =]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty; b]) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$f(]-\infty; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème :

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre **f(a) et f(b)**, **il existe** un réel **c** dans $[a; b]$ tel que **f(c) = k**

En **d'autres termes** : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre f(a) et f(b)

Corollaire 01

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$ et **f(a) × f(b) < 0**; alors l'équation **f(x) = 0** admet **au moins** une solution α dans $]a; b[$

➤ De plus si f est **strictement monotone** sur $[a; b]$ alors α est unique

Corollaire 02

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I et **k ∈ f(I)**

Alors l'équation **f(x) = k** admet **une unique solution α** dans I



4) Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Si f une **fonction continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I

Alors la fonction f est une **bijection de I vers $J = f(I)$**

de plus la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} **défini** sur $J = f(I)$, par la relation suivantes

$$y = f^{-1}(x) \text{ et } x \in J \Leftrightarrow f(y) = x \text{ et } y \in I$$

2) Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

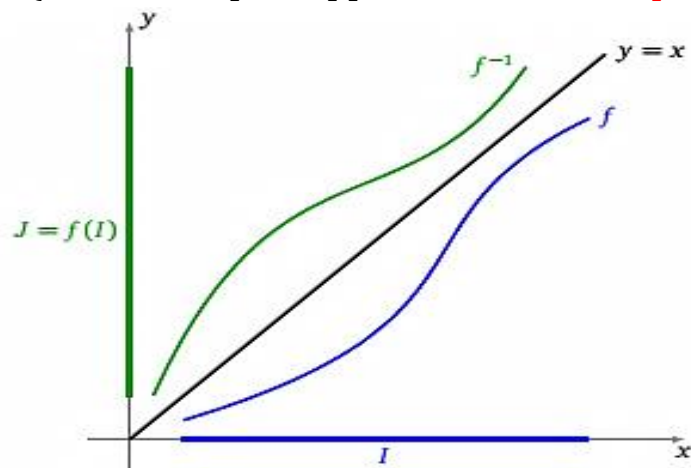
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un I alors :

$$5) \begin{cases} f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ x \in f(I) \end{cases} \end{cases}$$

6) f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que f

7) Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice

(c'est-à-dire par rapport à la droite **d'équation $y=x$**)



$$8) (\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad (\forall x \in J); f \circ f^{-1}(x) = x$$

5) Fonction racine n-ième

La fonction $x \rightarrow x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$

Cette fonction est appelée la fonction racine n-ième, et elle est notée par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

Soient x et y dans $[0; +\infty[$ et m et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$1) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$2) \sqrt[1]{x} = x \quad ; \quad \text{et} \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$4) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$5) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$$

$$6) \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$$

$$7) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$8) \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

6) Fonction arctangente

La fonction $x \rightarrow \tan x$ est continue et strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc il réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

• La fonction réciproque est appelée **arctangente**, notée $\arctan$

Propriétés :

$$1. \forall (x, y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x.$$

$$3. (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$$

4. La fonction $\arctan$ est impaire.

5. La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$