

**Niveau : Deuxième bac
sciences maths**

Résumé: Continuité

Niveau : Deuxième bac sciences maths

Plan de chapitre 1 : Continuité d'une fonction

- Cours détaillé
- **Résumé de cours**
- Série de 17 exercices
- Correction détaillée des exercices

Collection FMATHS



Prof fayssal

0681399067

www.elboutkhili.jimdofree.com

**1) Continuité d'une fonction en un point****Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0**

f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité d'une fonction à droite et à gauche d'un point a

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; a + r[; r > 0$

f est continue à droite de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

➤ f une fonction définie sur un intervalle $I =]a - r; a]; r > 0$

f est continue à gauche de $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche du point a

3. Fonction partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$;

$(\forall x \in \mathbb{R}): E(x) \leq x < E(x) + 1$

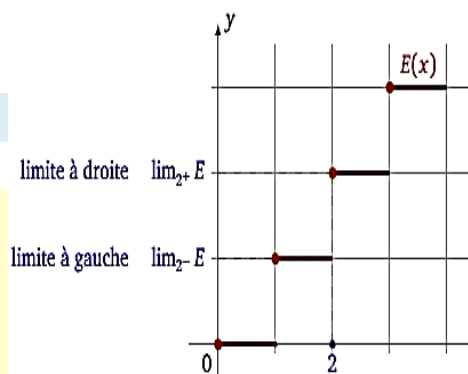
Propriétés : Soit $p \in \mathbb{Z}$

➤ $(\forall x \in I = [p; p + 1[); E(x) = p$

➤ $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}); E(x + p) = E(x) + p$

➤ $(\forall x \in \mathbb{R}): x - 1 < E(x) \leq x$

**3) Prolongement par continuité**

I un intervalle tel que $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$

La fonction f est dite prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 ; Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

- On définit alors la fonction $\bar{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :
$$\begin{cases} f(x); & x \neq x_0 \\ f(x_0) = l \end{cases}$$
- Alors $\bar{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0

2) Continuité sur un intervalle

f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

- La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ ssi f est continue en chaque point de l'intervalle $]a; b[$
- La fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ ssi f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b

Exemple des fonction usuelles continue sur un intervalle

- 1) Toute fonction polynomiale est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 2) Les fonctions rationnelles sont continus en tout intervalles inclus dans leurs domaines de définitions
- 3) La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur tout intervalles inclus dans $[0; +\infty[$
- 4) La fonction $x \rightarrow |x|$ est continue sur tout intervalles inclus dans $\mathbb{R}$
- 5) Les fonctions cos et sin sont continus sur $\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions continues**Somme -produit-quotient**

- La fonction $f = (u + v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = (\alpha \cdot u)$ est continue sur I ssi u est continue sur I
- La fonction $f = (u \cdot v)$ est continue sur I ssi u et v sont continue sur I
- La fonction $f = \left(\frac{u}{v}\right)$ est continue sur I ssi u est continue et v continue sur I et $\forall x \in I; v(x) \neq 0$



Continuité de la composée de deux fonctions

$$g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x)$$

f et g définies respectivement sur I et J

tel que $f(I) \subset J$; La **composée** des fonctions f et g notée gof est la fonction définie sur I par $\forall x \in I; gof(x) = g(f(x))$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

Si f est continue sur I et g continue sur J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction gof est continue sur J

Résultats :

Soit u est une fonction définie sur I et n un entier naturel

➤ Pour montrer que la fonction $f = \sqrt[n]{u}$ est continue sur I, il suffit de montrer que **u est continue** sur I et $\forall x \in I; u(x) \geq 0$

➤ Pour montrer que les fonctions $x \rightarrow \cos(u)$; $x \rightarrow \sin(u)$
 $x \rightarrow |u|$ et $x \rightarrow u^n$ sont continue sur I, il suffit de montrer que **u est continue** sur I

➤ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue en l
 alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(l)$

3) Image d'un intervalle -Théorème des valeurs intermédiaire

Image d'un intervalle par une fonctions continue

➤ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
 ➤ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

➤ Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$ et m est le minimum de f sur $[a, b]$.

$$\text{Alors } f([a, b]) = [m, M]$$

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

est **strictement croissante** sur I

f **strictement décroissante**

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)]$$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)]$$

$$f([a; +\infty[) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$$

$$f([a; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$$

$$f([a; b[) = \left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$$

$$f([a; b[) = \left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$$

$$f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$$

$$f(]a; b]) = \left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$$

$$f(]-\infty; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b) \right]$$

$$f(]-\infty; b]) = \left[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème :

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre **f(a) et f(b)**, **il existe** un réel **c** dans $[a; b]$ tel que **f(c) = k**

En **d'autres termes** : l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre f(a) et f(b)

Corollaire 01

Si f une **fonction continue** sur $[a; b]$ et **f(a) × f(b) < 0**; alors l'équation **f(x) = 0** admet **au moins** une solution α dans $]a; b[$

➤ De plus si f est **strictement monotone** sur $[a; b]$ alors α est unique

Corollaire 02

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I et **k ∈ f(I)**

Alors l'équation **f(x) = k** admet **une unique solution α** dans I



4) Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Si f une **fonction continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I

Alors la fonction f est une **bijection de I vers $J = f(I)$**

de plus la fonction f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} **défini** sur **$J = f(I)$** , par la relation suivantes

$$y = f^{-1}(x) \text{ et } x \in J \Leftrightarrow f(y) = x \text{ et } y \in I$$

2) Propriétés de fonction réciproque f^{-1}

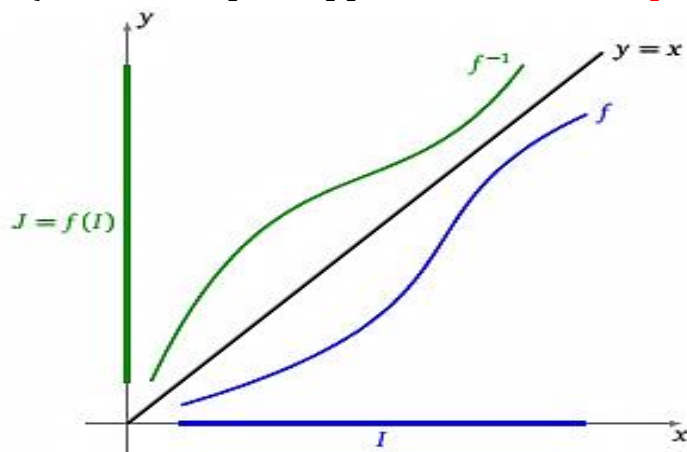
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un I alors :

$$1) \begin{cases} f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ x \in f(I) \end{cases} \end{cases}$$

2) f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que f

3) Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice

(c'est-à-dire par rapport à la droite **d'équation $y=x$**)



$$4) (\forall x \in I); f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad (\forall x \in J); f \circ f^{-1}(x) = x$$

5) Fonction racine n-ième

La fonction $x \rightarrow x^n$ est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ donc admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$

Cette fonction est appelée la fonction racine n-ième, et elle est notée par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

Soient x et y dans $[0; +\infty[$ et m et n dans $\mathbb{N}^*$:

$$1) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

$$2) \sqrt[1]{x} = x \quad ; \quad \text{et} \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$4) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$5) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times m]{x^m}$$

$$6) \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$$

$$7) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$8) \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

6) Fonction arctangente

La fonction $x \rightarrow \tan x$ est continue et strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc il réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$

• La fonction réciproque est appelée **arctangente**, notée $\arctan$

Propriétés :

$$1. \forall (x, y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}, \tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x.$$

$$3. (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y$$

4. La fonction $\arctan$ est impaire.

5. La fonction $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$