

AREF : Fès - Meknès
Direction Provinciale : Fès
Lycée Youssef Bno Tachafine

Résumé Maths : 2 BAC SM BIOF

Prof.
Karza Zouhair

Limites et continuité	3
Dérivabilité et étude de fonctions	7
Les suites numériques	14
Les fonctions logarithmiques	16
Les fonctions exponentielles	18
Les nombres complexes	20
Les équations différentielles	25
Le calcul intégral	26
L'arithmétique	30
Les probabilités	36
Les structures algébriques	41

Limites et continuité

1 la continuité en un point.

Définition 1

soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Définition 2

soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de type $[a, b]$.

★ On dit que f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

★ On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Proposition 3 :

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a

Remarque 4 :

la partie entière n'est pas continue en tout n de $\mathbb{Z}$.

2 la continuité sur un intervalle.

Définition 5

★ on dit que f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I s'elle est continue en tout point de I .

★ on dit que f est une fonction sur un intervalle $[a, b]$ s'elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Remarques 6 :

★ la partie entière est continue sur l'intervalle $[n, n+1[$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

★ si f est continue sur un intervalle I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Proposition 7 :

Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur leur domaine de définition.

3 Les opérations sur les fonctions continues.

Proposition 8 :

soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

★ les fonctions $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I .

★ si de plus g ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .

Proposition 9 :

★ si f et g sont deux fonctions continues sur I et J respectivement avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

★ soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une fonction définie sur I avec $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$.

4 L'image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 10 :

- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

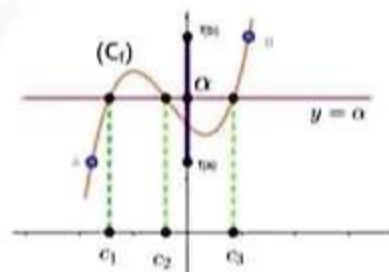
I	$f(I)$ si f est continue et str $\nearrow$	$f(I)$ si f est continue et str $\searrow$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$] f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)[$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)[$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 11 :

soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un c compris entre a et b tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution)



Corollaire 12 :

soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.
(autrement l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur $[a, b]$)

Corollaire 13 :

soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors :

- l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.
- si de plus f est strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]a, b[$.

La méthode de dichotomie

Le but de cette méthode est d'approcher la solution d'une équation de type $f(x) = 0$.

Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$, alors $\exists ! \alpha \in]a, b[/ f(\alpha) = 0$.

On a deux cas :

$$\bullet \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(b) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left] \frac{a+b}{2}, b \right[.$$

$$\bullet \text{ si } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times f(a) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left] a, \frac{a+b}{2} \right[.$$

On continue de cette manière jusqu'à l'encadrement demandé de α .

5 La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Définition 14 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$.

La fonction qui lie chaque élément y de J avec l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$ s'appelle la fonction réciproque de f notée f^{-1} .

Conséquences 15 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

$$\star \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \star (\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \star (\forall x \in f(I)) : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Proposition 16 :

soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et f^{-1} sa réciproque. On a :

$\star f^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

$\star f^{-1}$ est strictement monotone sur $f(I)$ avec f et f^{-1} ont la même monotonie.

$\star (C_{f^{-1}})$ est symétrique à (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

6 La fonction racine $n^{\text{ième}}$.

Proposition 17 :

soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté $\sqrt[n]{}$.

Conséquences 18 :

$$\star \sqrt[n]{} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ x & \rightarrow & \sqrt[n]{x} \end{array}$$

$$\star (\forall x, y \in [0, +\infty[) : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

$$\star (\forall x \in [0, +\infty[) : (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

Définition 19 :

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : x^r = \sqrt[q]{x^p}$$

Propriétés 20 :

$\star$ La fonction $x \mapsto x^r$ est continue sur $]0, +\infty[$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

$\star$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$ et pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ on a :

$$x^r > 0 \quad ; \quad x^{r+r'} = x^r \times x^{r'} \quad ; \quad x^{rr'} = (x^r)^{r'} \quad ; \quad \frac{1}{x^r} = x^{-r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (xy)^r = x^r y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad ;$$

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[n]{x^2} + \sqrt[n]{xy} + \sqrt[n]{y^2}}$$

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^2} + \sqrt[n]{y^2})}$$

7 La fonction arctan.

Proposition 21:

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors elle admet une fonction réciproque sera noté **arctan**.

Propriétés 22 :

★ La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

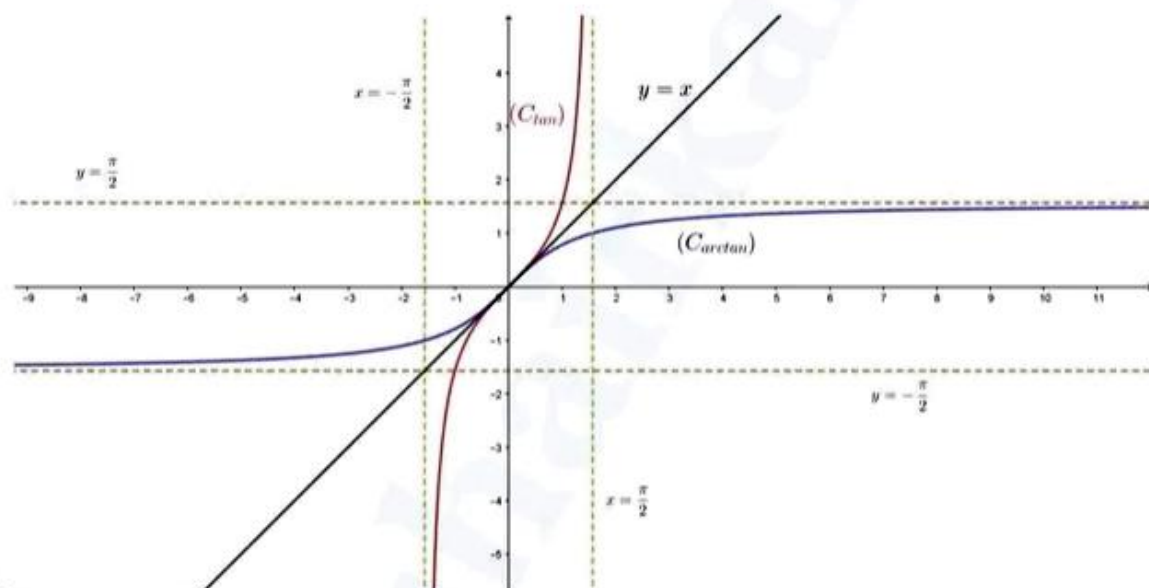
★ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan(x)) = x$

★ $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(\tan(x)) = x$

★ $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(x) = y \iff x = \tan(y)$

★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$

★ la courbe $(C_{\arctan})$:



Dérivabilité et étude de fonctions

1 Dérivabilité en un point et sur un intervalle

Définitions 23

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $a, b \in I$ tels que $a < b$.

★ On dit que f est dérivable au point a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

l s'appelle le nombre dérivé de f au point a et sera noté $f'(a)$. On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

★ On dit que f est dérivable à droite au point a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

l s'appelle le nombre dérivé à droite de f au point a et sera noté $f'_d(a)$. On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$.

★ On dit que f est dérivable à gauche au point a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

l s'appelle le nombre dérivé à gauche de f au point a et sera noté $f'_g(a)$. On écrit : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$.

★ On dit que f est dérivable sur I s'elle est dérivable en tout point de I .

★ On dit que f est dérivable sur $[a, b]$ s'elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b .

Proposition 24

$$f \text{ est dérivable au point } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite de } a \\ f \text{ est dérivable à gauche de } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

Conséquences 25 :

★ Si f est dérivable au point a alors (C_f) admet une tangente d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $(a, f(a))$.

★ Si f est dérivable à droite au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.

★ Si f est dérivable à gauche au point a alors (C_f) admet une demi-tangente d'équation $\begin{cases} y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$ au point $(a, f(a))$.

★ Si f est dérivable au point a , la fonction g définie par $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a et on a :

$$x \simeq a \implies f(x) \simeq g(x)$$

Exemple 26 :

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1 \implies g(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$1,01 \simeq 1 \implies f(1,01) \simeq g(1,01) \implies \sqrt{1,01} \simeq 1,005$$

★ Si $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ alors (C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$



2

Les opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 27

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

★ $f + g$ est dérivable sur I et on a : $(f + g)' = f' + g'$.

★ αf est dérivable sur I et on a : $(\alpha f)' = \alpha f'$.

★ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

★ Si de plus $g \neq 0$ sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Proposition 28

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement telles que $f(I) \subset J$, alors $f \circ g$ est dérivable et on a : $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.

Proposition 29

Soit f une fonction bijective et dérivable sur I telle que $f(I) = J$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$(\forall x \in J) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Conséquences 30 :

★ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

★ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n \sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

★ arctan est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et on :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

★ Si f est dérivable sur I alors $\arctan \circ f$ est dérivable sur I et on a : $(\arctan \circ f)' = \frac{f'}{1 + f^2}$

★ Si $f > 0$ et dérivable sur I alors f^r est dérivable sur I avec $r \in \mathbb{Q}^*$ et on a : $(f^r)' = r f' f^{r-1}$

3 Théorème d'accroissements finies (TAF) - théorème de Rolle

Théorème 31 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases} \xRightarrow{\text{TAF}} (\exists c \in]a, b[) : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Théorème 32 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On a :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \xRightarrow{\text{Rolle}} (\exists c \in]a, b[) : f'(c) = 0$$

4 Les primitives d'une fonction

Définition 33 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $(\forall x \in I) : F'(x) = f(x)$.

Proposition 34 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I .

Les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.

Proposition 35 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Si f admet une fonction primitive sur I alors il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Proposition 36 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$.

Si F et G sont deux fonctions primitives de f et g respectivement sur I , alors $F + kG$ est une primitive de $f + kg$ sur I .

Tableau des primitives des fonctions usuelles

la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$

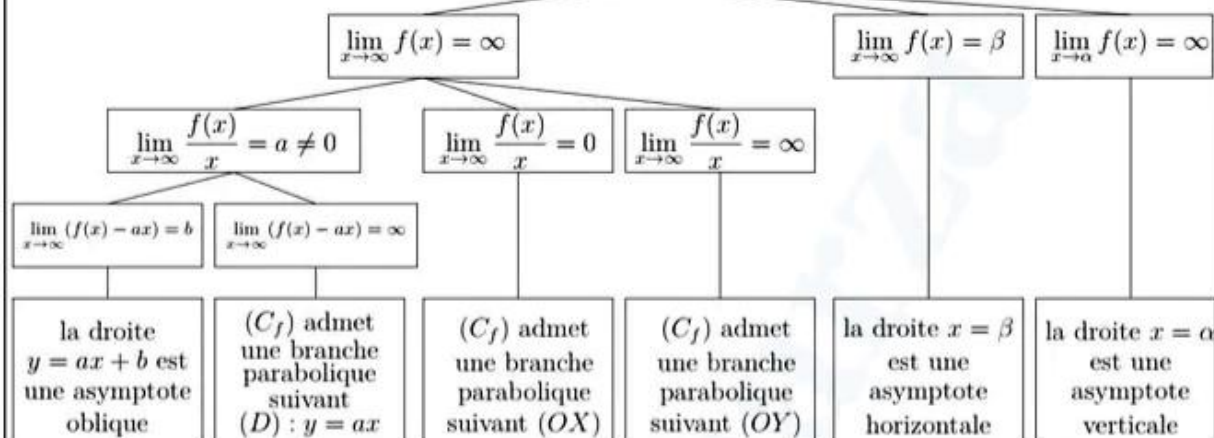
la fonction f	les primitives de f	intervalle
$x \mapsto x^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, c \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Tableau des primitives et les opérations .

la fonction f définie sur I	une primitive de f sur I	conditions
$u' + v'$	$u + v$	
$u'v + v'u$	uv	
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I
$u'u^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	$u > 0$ sur I
$u'u^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$u > 0$ sur I
$x \mapsto u'(ax+b), a \in \mathbb{R}^* \text{ et } a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)$	$]0, +\infty[$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$\frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)$	$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$

5 Les branches infinies

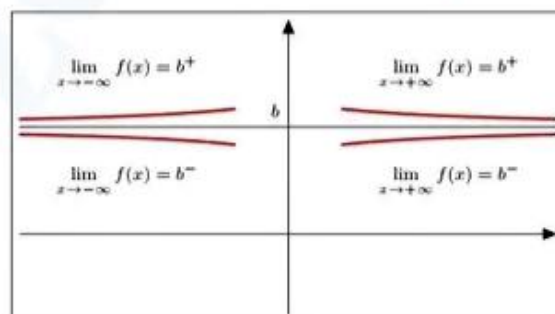
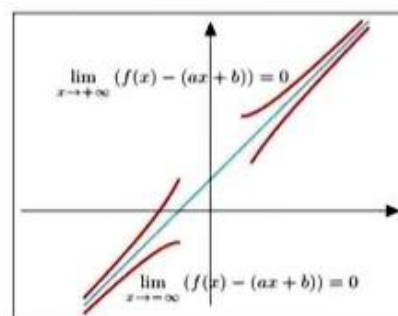
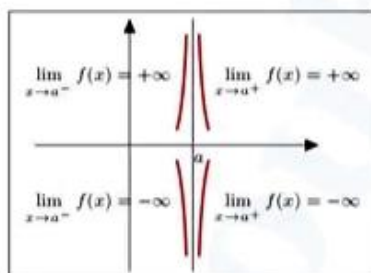
Les branches infinies



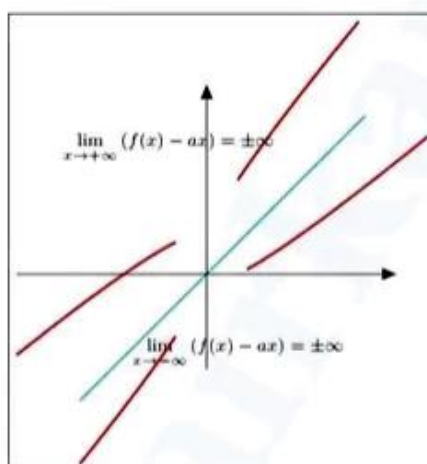
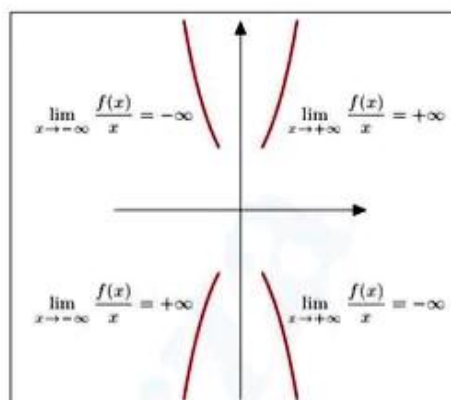
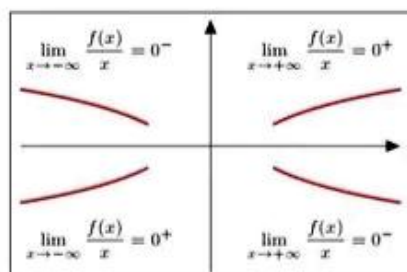
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty \nRightarrow (C_f)$ admet une branche parabolique suivant La droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Asymptotes :



Les branches paraboliques :



6 Concavité

x	a		
f''	-	0	+
(C_f)	concave		convexe

x	a		
f''	+	0	-
(C_f)	convexe		concave

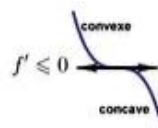
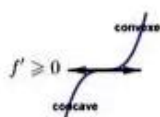
$M(a, f(a))$ est un point d'inflexion

Proposition 37

Si f'' s'annule en a de I et change de signes au voisinage de a , alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

Proposition 38

Si f' s'annule en a de I et ne change pas de signes au voisinage de a , alors le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) .



7

Parité - symétrie - périodicité
Parité - périodicité :

type de f	définition	conséquences
f est paire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	★ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ★ (C_f) est symétrique par % à (OY)
f est impaire	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	★ il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ★ (C_f) est symétrique par % à O
f est périodique de période T ($T > 0$)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} x+T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T

Symétrie :

propriété	équivalent à	conséquences
la droite $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$
la point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de (C_f)	$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$	il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [a, +\infty[$

Les suites numériques

1 La suite majorée, minorée et bornée

Définition 39 :

- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq M$.
- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq m$.
- ★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geq n_0) : |U_n| \leq C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques 40 :

- ★ Toute suite positive est minorée par 0.
- ★ Toute suite négative est majorée par 0.

2 La suite monotone

Définition 41 :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Proposition 42 :

- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} \geq U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \geq 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} \leq U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n \leq 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} < U_n \Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
- ★ $(U_n)_{n \geq n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Remarques 43 :

- ★ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \geq U_{n_0}$)
- ★ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geq n_0) : U_n \leq U_{n_0}$)

3 La suite arithmétique - la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geq n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geq n_0) : U_n = U_p + (n - p)r$	$(\forall n \geq n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + \dots + U_n$	$S_n = \left(\frac{n - p + 1}{2} \right) (U_p + U_n)$	$S_n = \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right) \times U_p ; (q \neq 1)$

Exemple 44 :

$$\star 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \star 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

4 Limite d'une suite

Définition 45

★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \rightarrow +\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

★ On dit qu'une suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proposition 46

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence :

★ Toute suite croissante et majorée est convergente.

★ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : |U_n - l| \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \end{array} \right\} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l \end{array} \right\} \implies (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \text{ et } (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est divergente}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : W_n \leq U_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty \text{ et } (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est divergente}$$

Ordre et convergence :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k) : U_n \geq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \end{array} \right\} \implies l \geq 0 \quad \star \left\{ \begin{array}{l} (\forall n \geq n_0) : U_n \leq V_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l' \end{array} \right\} \implies l \leq l'$$

Suites de type $f(U_n) = U_{n+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur un intervalle fermé } I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \end{array} \right\} \implies l \text{ est une solution de l'équation } f(x) = x \text{ sur } I$$

Les suites adjascentes :

Définition 47

On dit $(U_n)_{n \geq p}$ et $(V_n)_{n \geq q}$ sont deux suites adjascentes si :

$$\star (U_n)_{n \geq p} \text{ est croissante et } (V_n)_{n \geq q} \text{ est décroissante.} \quad \star \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

Proposition 48

$(U_n)_{n \geq p}$ et $(V_n)_{n \geq q}$ sont deux suites adjascentes $\implies$ elles sont convergentes et ont la même limite.

Les fonctions logarithmiques

1 Le logarithme népérien

Définition 49

Le logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note $\ln$.

Conséquences 50 :

- ★ Le domaine de définition de $\ln$ est $]0, +\infty[$.
- ★ $\ln(1) = 0$.
- ★ $\ln$ est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- ★ $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- ★ Pour tous a et b de $]0, +\infty[$: $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$ $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- ★ $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ $\ln(x) > 0 \iff x > 1$ $\ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

Une propriété fondamentale :

Pour tous a et b de $]0, +\infty[$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Proposition 51 :

Pour tous a et b de $]0, +\infty[$ et r de $\mathbb{Q}$ on a :

- ★ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ★ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ★ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$ ★ $\ln(a^r) = r \ln(a)$

Proposition 52 :

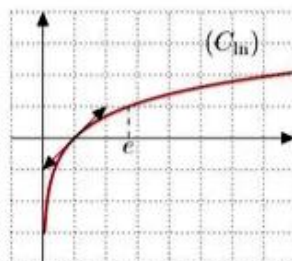
- ★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ ★ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- ★ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$
- ★ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ ★ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln(x) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

Proposition 53 :

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution noté e telle que $e = 2,718...$

T.v et $(C_{\ln})$:

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln$	$-\infty$	$+\infty$



Les fonctions exponentielles

1 La fonction exponentielle népérienne

Définition 61

La réciproque de la fonction $\ln$ s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

Autre expression de $\exp$:

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0, +\infty[$. On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$.

Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$. On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$$

Propriétés 62 :

* La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* $e^1 = e$

$e^0 = 1$

$e^x > 0, (\forall x \in \mathbb{R})$.

* $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$

$(\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$

* $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$

* Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$e^{rx} = (e^x)^r$$

* Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, +\infty[$, on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a)$$

$$e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

Proposition 63

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0, (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

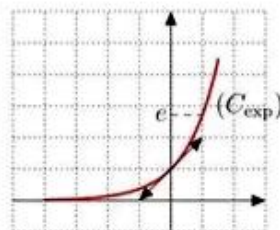
Proposition 64

* La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x, (\forall x \in \mathbb{R})$.

* Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}, (\forall x \in I)$.

T.v et $(C_{\exp})$:

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	+	
e^x	0 $\nearrow$ $+\infty$	



2 La dérivée logarithmique d'une fonction

Définition 54

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'appelle La dérivée logarithmique de u sur I .

Proposition 55

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'elle ne s'annule jamais sur I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et sa dérivée est La dérivée logarithmique de u .

càd $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Proposition 56

Soit u une fonction dérivable et ne s'annule jamais sur un intervalle I .

Les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln(|u(x)|) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3 Le logarithme à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition 57

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Le logarithme à base a est la fonction noté $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$.

Conséquences 58 :

$$\log_a(a) = 1 \qquad \log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)} \qquad \log_a(1) = 0 \qquad \log_e = \ln$$

Proposition 59

Soient $x, y \in]0, +\infty[$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y) & ; & \quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) & ; & \quad \log_a(x^r) = r \log_a(x), (\forall r \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Proposition 60

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0, +\infty[) : \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$0 < a < 1$			$a > 1$		
x	0	$+\infty$	x	0	$+\infty$
$\log'_a$		-	$\log'_a$		+
$\log_a$		$+\infty \rightarrow -\infty$	$\log_a$		$-\infty \rightarrow +\infty$

2 L'exponentielle à base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition 65

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a : x \mapsto e^{x \ln(a)} = a^x$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$$

Propriétés 66 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$\star \quad a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$\star$ La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' = \ln(a)a^x$.

$$\star \quad \begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x > y, & 0 < a < 1 \\ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, & a > 1 \end{cases}$$

$$\star \quad \begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, & a > 1 \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

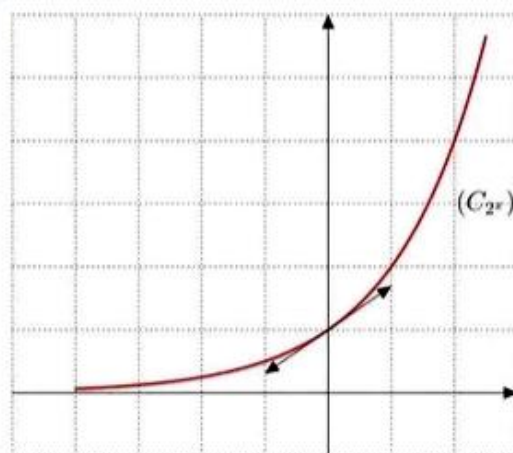
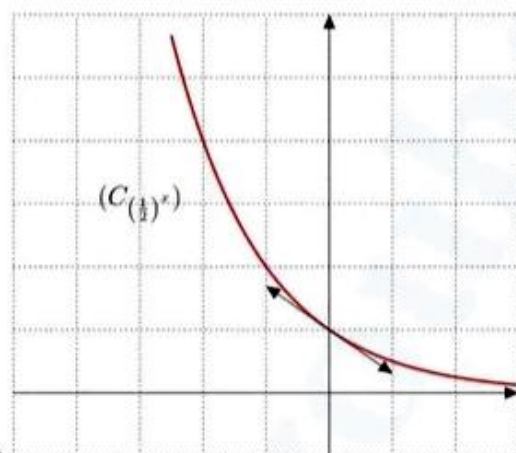
x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	-	
a^x	$+\infty$	0

$$a > 1$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	+	
a^x	0	$+\infty$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$a = 2$$



Les nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$. On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i , solution de cette équation.

On va construire un ensemble noté $\mathbb{C}$ plus grand que $\mathbb{R}$ qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élément de $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans $\mathbb{R}$).

Définition 67

L'ensemble $\mathbb{C}$ est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$.

* $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élément de $\mathbb{C}$) de z .

* a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\Re(z)$.

* b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\Im(z)$.

* L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Proposition 68

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$z = z' \iff \Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) = \Im(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0$$

La représentation graphique d'un nombre complexe :

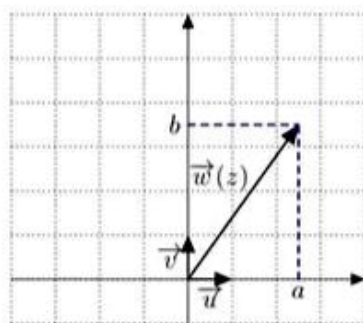
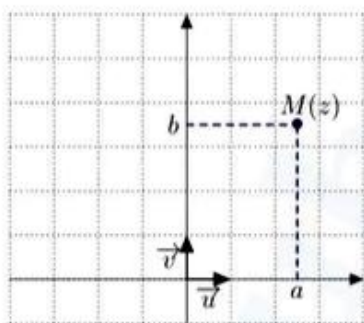
Le plan (P) (appelé après le plan complexe) muni d'un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

* Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$.

De plus z s'appelle l'afixe de M et on écrit $z = aff(M)$.

* Tout vecteur $\vec{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $\vec{w}(z)$.

De plus z s'appelle l'afixe de $\vec{w}$ et on écrit $z = aff(\vec{w})$.



Conséquences 69 :

* Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.

* Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé l'axe imaginaire.

Proposition 70

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $\vec{w}(z_w)$, $\vec{t}(z_t)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\vec{w} + \vec{t}) = aff(\vec{w}) + aff(\vec{t}) \quad ; \quad aff(\alpha \vec{w}) = \alpha \cdot aff(\vec{w})$$

Proposition 71

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $I(z_I)$ telle que I est le milieu de $[AB]$. On a :

$$* z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad * \text{ Si } A, B \text{ et } C \text{ sont distincts, alors : } A, B \text{ et } C \text{ sont rectilignes} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

Proposition 81

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :

- * Si $A \neq B$ on a : $(\vec{AB}, \vec{AB}) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$.
- * Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$.
- * Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

Remarques 82 :

- * $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*) : \arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
- * $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*) : \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- * $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*) : \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
- * $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*) : \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition 83

Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$.

Définition 84

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.

(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Proposition 85

Soient $z = [r, \alpha]$ et $z' = [r', \alpha']$ de $\mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} -z &= [r, \alpha + \pi] & \bar{z} &= [r, -\alpha] & zz' &= [rr', \alpha + \alpha'] & \frac{1}{z} &= \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right] \\ \frac{z}{z'} &= \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right] & z^n &= [r^n, n\alpha] \end{aligned}$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.

Remarque 86 :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

4 La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.**Définition 87**

- * Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
- * Pour tout nombre complexe non nul z , on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Proposition 88

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} * \overline{e^{i\alpha}} &= e^{-i\alpha} & * (e^{i\alpha})^n &= e^{ina} & * e^{i\alpha} e^{i\alpha'} &= e^{i(\alpha+\alpha')} & * \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} &= e^{i(\alpha-\alpha')} \end{aligned}$$

Proposition 89

Les formules d'Euler :

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition 72

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 73

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \star \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'} \text{ et en général : } \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k. & \star \overline{z \times z'} &= \bar{z} \times \bar{z'} \text{ et en général : } \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k. \\ \star \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \frac{1}{\bar{z'}} \text{ et } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}. & \star \overline{(z^n)} &= \bar{z}^n. \end{aligned}$$

Conséquences 74 :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) & ; & & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z) & ; & & \overline{\bar{z}} &= z & ; & & \bar{\bar{z}} &= 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ & & ; & & z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = z & ; & & z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = -z & ; & & \end{aligned}$$

Définition 75

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 76

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \star |z \times z'| &= |z| \times |z'| \text{ et en général : } \left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|. \\ \star \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \left| \frac{1}{z'} \right| &= \frac{1}{|z'|} \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}. & \star |z^n| &= |z|^n. & \star |z + z'| &\leq |z| + |z'|. \end{aligned}$$

Conséquences 77 :

$$\begin{aligned} \star z\bar{z} &= |z|^2 & \star |\bar{z}| &= |-z| = |z| & \star |z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0 & \star z = z' &\Leftrightarrow |z| = |z'|. \\ \star \text{ Soient } A(z_A) \text{ et } B(z_B) \text{ du plan complexe, on a : } & AB &= |z_B - z_A|. \end{aligned}$$

3 L'argument et la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 78

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, tel que $z \neq 0$.

On appelle argument de z qu'on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radian et on écrit $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

Remarque 79 :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Proposition 80

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \star \arg(zz') &\equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \text{ et en général : } \arg\left(\prod_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k). \\ \star \arg\left(\frac{1}{z'}\right) &\equiv -\arg(z')[2\pi] & \star \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi] & \star \arg(z^n) &\equiv n \arg(z)[2\pi] \end{aligned}$$

Remarque 90 :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx) + b\sin(kx)$ en développant $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples 91 :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

5 Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.**Définition 92**

Soient u un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On dit que le nombre complexe z est une racine n -ième (ou racine d'ordre n) du nombre complexe u si $z^n = u$.

Proposition 93 :

Tout nombre complexe non nul $z = re^{i\alpha}$ tel que $r > 0$, admet n racines n -ièmes qui sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Proposition 94 :

La somme des racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. $\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0\right)$

Conséquences 95 :

- * Les racines n -ièmes de l'unité sont : $u_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- * Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- * Les racines cubiques de l'unité sont : $1, j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.
- * Les racines 4-ièmes de l'unité sont $1, -1, i$ et $-i$.

Proposition 96 :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad ; \quad \bar{j} = j^2 \quad ; \quad j^3 = (\bar{j})^3 = 1 \quad ; \quad j\bar{j} = 1$$

Proposition 97 :

Toute équation $az^2 + bz + c = 0$ tels que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ admet :

- * une solution double $z = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
- * deux solutions différentes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$ avec δ est une racine carrée de Δ .

Conséquences 98 :

Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) alors :

- * $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
- * $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\vec{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ ($M \neq \Omega$)	$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} z' - w = z - w \\ \arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$

Les équations différentielles

1 L'équation $y' = ay + b$

L'équation différentielle sans ou avec une condition initiale	La solution générale
$y' = ay ; a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax} ; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ; a \neq 0$	$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$
$y' = ay + b ; a \neq 0$	$y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a} ; c \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} y' = ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ; a \neq 0$	$y(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

2 L'équation $y'' + ay' + by = 0$

L'équation différentielle	L'équation caractéristique	cas	Solutions de l'éq. car	La solution générale de l'équation différentielle
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$	$\Delta > 0$	deux solutions réelles différentes r_1 et r_2	$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
		$\Delta = 0$	une solution réelle double r	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{rx}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
		$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	$y(x) = (C_1 \cos(qx) + C_2 \sin(qx)) e^{px}$ telle que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Calcul intégral

1 L'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Definition 99

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F sa primitive sur $[a, b]$.

Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle l'intégrale de f de a à b noté $\int_a^b f(x)dx$ et se lit ' l'intégrale de a à b de $f(x)dx$ '.

Notation 100 :

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$ et on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque 101 :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la variable x par $t, s, \dots$ donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \dots$$

Conséquences 102 :

Si f est continue sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2 Relation de Chasles - la linéarité de l'intégrale

Proposition 103 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b et c de I et $k \in \mathbb{R}$.

★ La relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

★ La linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b (kf)(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.

3 Intégrale et ordre

Proposition 104

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b de I tels que $a \leq b$.

★ Si f est positive sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

★ Si $g(x) \leq f(x)$ pour tout x de $[a, b]$ alors : $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$.

★ $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

★ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ avec $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

4 La valeur moyenne

Proposition & **Définition** 105 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b de I tels que $a < b$.

★ Il existe au moins un c de $[a, b]$ tel que :
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

★ Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 106 :

$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ n'est que le T.A.F appliqué à F (primitive de f) exprimé à l'aide d'une intégrale.

5 Techniques de calcul intégral

1- Calcul direct se fait par trouver une primitive de la fonction à intégrer sur l'intervalle I .

Exemples 107 :

$$\int_1^5 k dx = \int_1^5 (kx)' dx = [kx]_1^5 = 5k - k = 4k; \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \int_1^e \ln'(x) dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

2- L'intégration par partie :

Proposition & **Définition** 108 :

Soient f et g deux fonctions dérivables et leurs dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

L'utilisation de cette relation s'appelle la technique d'intégration par partie.

Exemple 109 :

$$\int_1^e \ln(x) dx = \int_1^e (x)' \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e - (e - 1) = 1.$$

3- Changement de variables :

Proposition 110 :

Soit g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' une continue sur $[a, b]$. Soit f une fonction continue sur $g([a, b])$. Alors :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Exemple 111 :

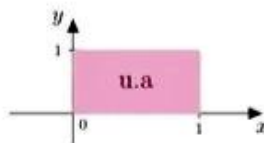
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \quad \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \quad \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \dots$$

6 Calcul des aires et volumes

1- Calcul des aires

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'unité de l'aire est $u.a = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$.



Proposition 112 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et (C_f) sa courbe. L'aire comprise entre (C_f) , (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.a.$$

Remarque 113 :

(1) Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A}(f, a, b) = \left(\int_a^b f(x) dx \right) u.a.$

(2) Si f est négative sur $[a, b]$, alors $\mathcal{A}(f, a, b) = - \left(\int_a^b f(x) dx \right) u.a.$

(3) Si f change de signe sur $[a, b]$, alors on utilise la relation de Chasles pour calculer $\mathcal{A}(f, a, b)$.

Proposition 114 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et (C_f) et (C_g) leurs courbes. L'aire comprise entre (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}(f, g, a, b) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a$$

2- Calcul des volumes

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'unité de volume est $u.v = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \times ||\vec{k}||$.

Proposition 115 :

Soient un solide compris entre deux plans parallèles d'équations $z = a$ et $z = b$.

On note par $S(t)$ l'aire d'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $z = t$ (la section du solide par dans le plan d'équation $z = t$).

Si la fonction $t \mapsto S(t)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors le volume V du solide, en u.v. est donné par :

$$V = \int_a^b S(t) dt.$$

Proposition 116 :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note D le domaine limité par (C_f) , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe (Ox) est

$$V = \pi \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right) u.v.$$

7 Calcul de quelques limites des suites à l'aide d'une intégrale

Théorème 117 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est strictement monotone sur $[a; b]$ ou f est dérivable et f' est bornée $[a; b]$, alors les suites (s_n) et (S_n) convergent et admettent $\int_a^b f(x)dx$ comme limite commune.

Exemple 118 :

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{i=n} f\left(0 + i \frac{1-0}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt = \ln(2),$$

avec $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ qu'est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

L'arithmétique

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 119 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

On dit que b divise a et on écrit $b|a$ s'il existe k de $\mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

$$\text{i.e } b|a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kb$$

Remarques 120 :

1. Si b divise a alors on dit que b est un diviseur de a ou a est un multiple de b .
2. L'ensemble des multiples de b est l'ensemble $b\mathbb{Z} = \{kb/k \in \mathbb{Z}\}$.
3. On a $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|, \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$.

Propriétés 121 :

1. On a $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}$. On dit que la relation "divise" est réflexive.
2. Si $b|a$ et $a|c$ alors $b|c$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. On dit que la relation "divise" est transitive.
3. Si $b|a$ et $a|b$ alors $|a| = |b|$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Théorème 122 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Alors $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que
$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

2 Congruence modulo n

Définition 123 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que a congrue b modulo n et on écrit $a \equiv b[n]$ si n divise $a - b$. C-à-d :

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|(a - b) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : a - b = kn$$

Propriétés 124 :

(de la relation "Congruence modulo n ")

1. **Réflexive** $a \equiv a[n], \forall a \in \mathbb{Z}$.
2. **Symétrique** $a \equiv b[n] \Rightarrow b \equiv a[n], \forall a, b \in \mathbb{Z}$.
3. **Transitive** $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n] \Rightarrow a \equiv c[n], \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

On dit que la relation "Congruence modulo n " est une relation d'équivalence.

Proposition 125 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$a \equiv b[n]$ est équivalente à dire que a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n .

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(n-1)}\}$ avec $\bar{r} = \{a \in \mathbb{Z} / a \equiv r[n]\}, \forall r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

On a : $\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \dots \cup \overline{(n-1)}$.

Homogénéité de la relation 'Congruence modulo n ' avec la somme et le produit :

Proposition 126 :

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.

Conséquences 127 :

1. $\overline{r + r'} = \overline{r} + \overline{r'}$ et $\overline{r \times r'} = \overline{r} \times \overline{r'}$.
2. $a \equiv b[n] \Rightarrow a^p \equiv b^p[n], \forall (a, b, n, p) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

3 Le plus grand commun diviseur

Définition 128 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b est le plus grand diviseur commun strictement positif de a et b noté $a \wedge b$.

$$\delta = a \wedge b \iff \begin{cases} \delta \in D_a \cap D_b \\ (\forall x \in D_a \cap D_b) : x \leq \delta \end{cases}$$

où D_a est l'ensemble des diviseurs de a .

Propriétés 129 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On a :

$$a \wedge b = b \wedge a$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \wedge a = |a|$$

Proposition 130 :

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que b ne divise pas a et $a \equiv r[b]$. On a : $a \wedge b = b \wedge r$.

Corollaire 131 :

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$a \wedge b$ est le dernier reste non nul dans la division successive de a sur b .

Théorème 132 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $\delta = a \wedge b$. Il existe (u, v) de $\mathbb{Z}$ tels que $\delta = ua + vb$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $\delta = a \wedge b$. On a : $D_a \cap D_b = D_\delta$.

Corollaire 133 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si $a \wedge b = \delta$ alors $ac \wedge bc = |c|\delta$.

Remarque 134 :

On peut définir le pgcd de plusieurs nombres entiers en nuls de même façon.

Si $\delta = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ alors il existe $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\delta = \sum_{k=1}^n u_k a_k$.

4 Les nombres premiers entre eux

Définition 135 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On dit que a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Théorème 136 :

(de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) : au + bv = 1$$

Corollaire 137 :

$$a \wedge b = \delta \Leftrightarrow \frac{a}{\delta} \wedge \frac{b}{\delta} = 1$$

Théorème 138 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} c|ab \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow c|b \quad (\text{Thm de Gauss}) \quad ; \quad \begin{cases} a|c \\ b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c \quad ; \quad \begin{cases} ab \equiv ac[n] \\ a \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow b \equiv c[n]$$

Conséquence 139 :

Si $a \wedge b = 1$ alors $(\forall x \in \mathbb{Z}), (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2) : x = au + bv$.

Propriétés 140 :

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} a \wedge c = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1 \quad ; \quad a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \quad ; \quad a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$$

Définition 141 :

On dit que $a_1, a_2, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux si $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$.

Remarque 142 :

les $a_1, a_2, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux n'implique pas qu'ils sont 2 à 2 premiers entre eux.

Théorème 143 :

$a_1, a_2, \dots, a_n$ de $\mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux $\Leftrightarrow (\exists (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n) : a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 1$.

Théorème 144 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\delta = a \wedge b$.

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions ssi $\delta|c$.

5 Le plus petit commun multiple

Définition 145 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Le plus petit commun multiple (ppcm) de a et b est le petit multiple commun positif strictement de a et b noté $a \vee b$.

Propriétés 146 :

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. On a :
 $a \vee b = b \vee a$; $(a \vee b)|c = ac \vee bc$; $a \vee a = |a|$; $b|a \Leftrightarrow a \vee b = |a|$
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $a \vee b = m$. Tout multiple commun de a et b est un multiple de m .

Théorème 147 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $a \vee b = m$ et $a \wedge b = \delta$. On a $m\delta = |ab|$.

Conséquence 148 :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. On a : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \vee b = |ab|$.

Définition 149 :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^*$.

Le petit multiple commun strictement positif de $a_1, a_2, \dots, a_n$ s'appelle le ppcm de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

6 Les nombres premiers

Définitions 150 :

Soient $a, d \in \mathbb{Z}^*$.

1. On dit que d est un diviseur effectif de a si $d|a$ et $d \notin \{-1, 1, -a, a\}$.
2. On dit que a est un nombre premier si a n'a pas des diviseurs effectifs et $|a| \neq 1$.

Propriétés 151 :

1. Si p et q sont deux nombres premiers tels que $|p| \neq |q|$ alors ils sont premiers entre eux. ($\neq$)
2. Si p est premier alors on a : $p|a \Rightarrow a$ et p sont premiers entre eux.
3. Si a non premier de $\mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ alors le petit diviseur effectif positif de a est un nombre premier.
4. L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 152 :

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Si n est non premier alors il existe un nombre premier p tel que $p|n$ et $p^2 \leq n$.

Conséquence 153 :

Pour vérifier qu'un entier $n \geq 2$ est premier ou non, on détermine tous les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$.

1. Si l'un de ces nombres divise n alors n est non premier.
2. Sinon, n est premier.

Proposition 154 :

Soient p un nombre premier et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$p|a_1a_2\dots a_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) / p|a_i$$

Conséquence 155 :

Soient $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ des nombres premiers positifs. Alors :

$$p|p_1p_2\dots p_n \Rightarrow (\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}) / p = p_i$$

Théorème 156 :

(Décomposition en facteurs premiers)

Chaque nombre $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ s'écrit d'une façon unique de la forme $n = \epsilon.p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ telle que $p_1, p_2, \dots, p_r$ des nombres premiers différents 2 à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des nombres entiers naturels non nuls et $\epsilon = \pm 1$.

Cette écriture s'appelle la Décomposition de n en facteurs premiers.

Corollaire 157 :

Soit $n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ tel que $n = \epsilon.p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers.

- $d|n \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}), (\exists \beta_i \in \mathbb{N}) / \begin{cases} d = \epsilon'.p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_r^{\beta_r} \\ 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \\ \epsilon' \in \{-1, 1\} \end{cases}$
- $n|m \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}), (\exists \lambda_i \in \mathbb{N}) / \begin{cases} m = \epsilon'.p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\dots p_r^{\lambda_r} \\ 0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i \\ \epsilon' \in \{-1, 1\} \end{cases}$

Corollaire 158 :

Soient $n = \epsilon.p_1^{\alpha_{p_1}}p_2^{\alpha_{p_2}}\dots p_r^{\alpha_{p_r}}$ et $m = \epsilon'.q_1^{\beta_{q_1}}q_2^{\beta_{q_2}}\dots q_{r'}^{\beta_{q_{r'}}}$.

Posons $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r'}\}$ et $\Delta = P \cap Q$. Alors :

- $a \wedge b = \prod_{t \in \Delta} t^{\inf(\alpha_t, \beta_t)}$
- $a \vee b = \prod_{t \in \Delta} t^{\sup(\alpha_t, \beta_t)} \times \prod_{p \in P \setminus \Delta} p^{\alpha_p} \times \prod_{q \in Q \setminus \Delta} q^{\beta_q}$

7 Les systèmes de numération**Définition 159 :**

une base d'un système de numération est le cardinal de l'ensemble des nombres utilisés pour représenter les nombres entiers naturels.

Exemples 160 :

- La base du système de numération **décimale** est 10 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
- La base du système de numération **binaire** est 2 et l'ensemble des nombres utilisés est $\{0, 1\}$.

Proposition 161 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a > 1$.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k, r_k, q_k \in \mathbb{N}) : \begin{cases} n = a^k q_k + r_k \\ 0 \leq r_k < a^k \\ 0 \leq q_k < a \end{cases}$$

Proposition 162 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a > 1$.

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\exists (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{N}^k) : \begin{cases} n = \sum_{i=1}^{i=k} r_i a^i \\ 0 \leq r_i < a, (\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}) \end{cases}$$

et on écrit : $n = \overline{r_k r_{(k-1)} \dots r_2 r_1}^{(a)}$.

De plus si $n > 0$ alors $r_k > 0$.

Méthode pratique

Si

$$\begin{array}{r|l} n & a \\ \hline \boxed{r_1} & q_1 \\ \boxed{r_2} & q_2 \\ & \vdots \\ & q_k \\ \boxed{r_k} & 0 \end{array}$$

alors $n = \overline{r_k r_{(k-1)} \dots r_2 r_1}^{(a)}$

Propriétés 163 :

Soient $n = \overline{r_k r_{(k-1)} \dots r_2 r_1}^{(a)}$ et $m = \overline{s_l s_{(l-1)} \dots s_2 s_1}^{(a)}$. Alors :

1. $k < l \Rightarrow n < m$.

2. si $l = k$ on compare les nombres à partir du gauche. Si

$$\begin{cases} r_k = s_k \\ r_{k-1} = s_{k-1} \\ \dots \\ r_{i+1} = s_{i+1} \\ r_i < s_i \end{cases} \quad \text{alors } n < m.$$

Les probabilités

1 Vocabulaire

Définition 164

Une expérience aléatoire est une expérience où on ne peut pas prévoir avec certitude ces résultats avant de l'effectuer comme le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé ... leurs résultats dépendent du **hasard**.

Vocabulaires :

1. Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle **une éventualité**.
2. L'ensemble de toutes les éventualités s'appelle **univers** et souvent noté Ω .
3. Toute partie de Ω s'appelle **un événement**.
4. Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
5. Etant donné un univers Ω , l'événement Ω est l'**événement certain**.
6. L'ensemble vide est l'**événement impossible**.
7. Etant donné un univers Ω , soient A et B deux événements.
 - (a) L'événement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté $A \cap B$.
 - (b) L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté $A \cup B$.
 - (c) L'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A , noté $\bar{A}$.
 - (d) A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

2 Espaces probablisés finis

Définition 165

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un ensemble non vide et fini.

1. Si on associe à chaque élément a_i de Ω un nombre $p_i \in [0, 1]$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tel que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, alors on dit qu'on a définie une probabilité p sur Ω .
2. On dit que la probabilité de l'événement élémentaire $\{a_i\}$ est le nombre p_i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on note $p(\{a_i\}) = p_i$ ou $p(a_i) = p_i$.
3. Le couple (Ω, p) s'appelle un **espace probablisé fini**.

Définition 166

Soient (Ω, p) un espace probablisé fini et A un événement.

La probabilité de A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A notée $p(A)$.

Remarques :

1. Toute probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.
2. $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.

Propriétés 167 :

Soient (Ω, p) un espace probablisé fini et A et B deux événements.

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
2. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
3. Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

1- Equiprobabilité

Définition 168

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Remarque 169 :

Dans les exercices, l'équiprobabilité peut être déclarée explicitement comme elle peut être déduite des conditions de l'expérience telles que : « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard », « boules indiscernables »...

Proposition 170 :

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini où il y a **équiprobabilité** et A un événement. Alors on :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}}$$

2- Probabilité conditionnelle

Définition 171

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de réalisation de B sachant que A est déjà réalisé est : $p_A(B) = p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Proposition 172 :

(1) Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

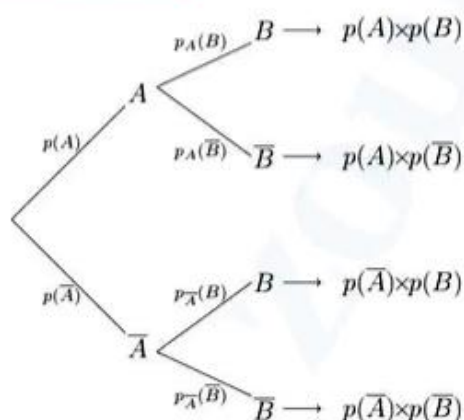
$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = p(B)p_B(A),$$

c'est la **formule des probabilités composées**.

(2) Si Ω est la réunion de deux événements non nuls et non homogènes A_1 et A_2 , alors pour tout événement B on a :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(A_1)p_{A_1}(B) + p(A_2)p_{A_2}(B).$$

Arbres pondérés



Règles de construction :

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

3- Indépendance**Définition 173 :**

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.

On dit que A et B sont indépendants si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Proposition 174 :

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) \neq 0$.

A et B sont indépendants si et seulement si $p_A(B) = p(B)$.

Remarques 175 :

(1) Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors :

$$p_B(A) = p(B) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

(2) A et B sont indépendants veut dire que la réalisation de chacun d'eux n'est pas influencée par la réalisation de l'autre.

3 Indépendance de deux épreuves.**Exemples 176 :**

Deux urnes u_1 et u_2 contiennent des boules de certains couleurs.

(1) Si on tire une boule de chaque urne, alors cette expérience contient deux épreuves indépendantes. Si $A = A_1$ et A_2 est un événement de cette expérience avec A_1 et A_2 sont deux événements des deux épreuves relatives aux urnes respectivement, alors :

$$p(A) = p(A_1) \times p(A_2).$$

Par exemple si $A =$ "obtenir une boule noire de u_1 et obtenir une boule jaune de u_2 ".

Alors $A_1 =$ "obtenir une boule noire de u_1 "

et $A_2 =$ "obtenir une boule jaune de u_2 ".

(2) On considère une expérience où on tire une boule de l'urne u_1 une boule. Si le résultat est une boule blanche, alors on tire deux boules de l'urne u_2 et sinon on tire trois boules. Les deux épreuves dans cette expérience sont dépendantes.

Epreuves répétées :**Proposition 177 :**

On considère dans une expérience une épreuve où on s'intéresse seulement à la réalisation ou pas d'un événement A avec $p = p(A)$.

On répète cette épreuve indépendamment n fois dans les mêmes conditions. Alors la probabilité que l'événement A soit réalisé k fois exactement, avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ est :

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

4 Variables aléatoires - Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définitions 178

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- (1) Une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle une **variable aléatoire**.
- (2) Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, alors déterminer la **la loi de probabilité de la variable aléatoire X** veut dire calculer, pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, la probabilité de la réunion de tous les événements d'images x_i par X . Cette réunion sera notée $(X = x_i)$.
On résume cette loi dans la tableau :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- (3) Si $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, alors :

$$p(X \leq \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha < x_1 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_i & , \text{ si } x_i \leq \alpha < x_{i+1} \\ 1 & , \text{ si } \alpha > x_n \end{cases}$$

5 Espérance mathématique - variance - écart type d'une variable aléatoire.

Définitions 179

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω .

On pose $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $p_i = p(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

- (1) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre réel noté $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

- (2) La variance de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $V(X)$ définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 p_i = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n.$$

- (3) L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 180

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n$.

6 La loi binomiale.**Définition 181**

On considère une expérience aléatoire composée de n épreuves répétées et indépendantes deux à deux. Soit A un événement de probabilité p de cette épreuve.

On appelle une variable aléatoire binomiale X de paramètres p et n la variable aléatoire qu'est égale au nombre de fois la réalisation de A .

Proposition 182

Sous les mêmes hypothèses de la définition, on a :

- (1) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$.
- (2) Pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on a $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.
- (3) $E(X) = np$.
- (4) $V(X) = np(1 - p)$.

Loi de composition interne

Soit E un ensemble.

1 Loi de composition interne (LCI)

Définition 183

On appelle LCI toute application f de $E \times E$ dans E .

$f(x, y)$ s'appelle le composé de x et y dans cet ordre pour tout x, y de E .

Notation 184 :

On note $f(x, y)$ souvent par $x + y$, $x \times y$, $x \text{Ty}$, $x \perp y$ ou $x * y$... et si E est muni d'une LCI $*$ on note $(E, *)$.

Exemples 185 :

1. La somme et le produit usuels sont des LCI dans chaque ensemble des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
On note $(E, +)$ et $(E, \times)$ pour $E \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles.
La somme et le produit dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sont des LCI telles que Pour tous x de I et f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on a :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

On note $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +)$ et $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \times)$.

$\circ$ est une LCI dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. On note par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes, alors on a $(\mathcal{P}, +)$, $(\mathcal{P}, \times)$ et $(\mathcal{P}, \circ)$.
Soit n de $\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} / \deg(P) \leq n\}$. On a $(\mathcal{P}_n, +)$ mais $\times$ et $\circ$ ne sont pas des LCI.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$ telles que :

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \quad \text{et} \quad \overline{x} \times \overline{y} = \overline{xy}$$

5. Les matrices carrées

Définition 186

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle matrice carrée réelle d'ordre n tout tableau de dimensions $n \times n$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

En particulier :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} ; (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

On définit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \\ e = e' \\ f = f' \\ g = g' \\ h = h' \\ i = i' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\ \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \\ g+g' & h+h' & i+i' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bd'+cg' & ab'+be'+ch' & ac'+bf'+ci' \\ da'+ed'+fg' & db'+ee'+fh' & dc'+ef'+fi' \\ ga'+hd'+ig' & gb'+he'+ih' & gc'+hf'+ii' \end{pmatrix} \quad (HP)$$

+ et $\times$ sont des LCI dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2 Partie stable pour une LCI - Loi induite

Définition 187

Soient $(E, *)$ et H une partie de E .

On dit que H est une partie stable pour $*$ si pour tous x et y de H on a : $x * y \in H$.

Définition 188

Soit H une partie stable de $(E, *)$.

L'application $g : H \times H \rightarrow H, (x, y) \mapsto x * y$ est une LCI dans H s'appelle la loi induite de $*$ qui définie sur E .

3 Propriétés d'une LCI

Définition 189

Soit $(E, *)$.

Associativité : on dit que $*$ est associative ssi $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in E$.

Commutativité : on dit que $*$ est commutative ssi $x * y = y * x, \forall x, y \in E$.

L'élément neutre : on dit que $*$ possède un élément neutre e ssi $x * e = e * x = x, \forall x \in E$. (unicité)

Le symétrique d'un élément : on suppose que $*$ possède un élément neutre e dans E . On dit que x de E a un symétrique dans $(E, *)$ ssi il existe x' de E tel que $x * x' = x' * x = e$. (unicité si $*$ est associative)

Un élt. simplifiable : on dit que a est régulier dans $(E, *)$ ssi $\forall (x, y) \in E^2 : \begin{cases} x * a = y * a \Rightarrow x = y \\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \end{cases}$.

Un élt. absorbant : on dit que a est absorbant dans $(E, *)$ ssi $\forall x \in E : x * a = e$ et $a * x = e$.

4 Morphisme

Définitions 190

Soient $(E, *)$ et $(F, \otimes)$.

- (1) Toute application $f : E \rightarrow F$ telle que : $f(x * y) = f(x) \otimes f(y)$ pour tout (x, y) de E^2 s'appelle un **morphisme** de $(E, *)$ dans $(F, \otimes)$ (aussi appelé **homomorphisme**).
- (2) Si de plus f est bijective alors f s'appelle un **isomorphisme** de $(E, *)$ dans $(F, \otimes)$.
- (3) Tout morphisme de $(E, *)$ dans $(E, *)$ s'appelle un **endomorphisme**.
- (4) Tout endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme**.

Propriétés 191 :

Soit f un morphisme de $(E, *)$ dans $(F, \otimes)$.

1. $f(E)$ est une partie stable de $(F, \otimes)$.
2. Si $*$ est associative dans E alors $\otimes$ est associative dans $f(E)$.
3. Si $*$ est commutative dans E alors $\otimes$ est commutative dans $f(E)$.
4. Si e est l'élément neutre de $(E, *)$ alors $f(e)$ est l'élément neutre de $(f(E), \otimes)$.
5. Si $*$ admet un élément neutre dans E et x' est le symétrique de x dans $(E, *)$ alors $f(x)$ est symétrisable dans $(f(E), \otimes)$ et son symétrique est $f(x')$.

Remarques 192 :

Soit f un morphisme de $(E, *)$ dans $(F, \otimes)$.

1. f transmet les propriétés de $*$ dans E à $\otimes$ dans $f(E)$.
2. Si f est surjectif alors $f(E) = F$. Donc f transmet les propriétés de $*$ dans E à $\otimes$ dans F .

Groupe - Anneau - Corps

1 Le groupe

Soit G un ensemble non vide.

Définition 193

Soit $(G, *)$. On dit que $(G, *)$ est un groupe si :

1. La loi $*$ est associative.
2. La loi $*$ admet un élément neutre dans G .
3. Tout élément de G a un symétrique dans $(G, *)$.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien).

Si G contient un nombre fini d'éléments on dit que $(G, *)$ est un groupe fini.

Propriétés 194 :

Soit $(G, *)$ un groupe et e son élément neutre.

1. Chaque élément de G a un unique symétrique x' dans $(G, *)$.
2. Pour tous x et y de G on a : $(x * y)' = y' * x'$.
3. Tout élément de G est simplifiable.
4. Soient $a, b \in G$. L'équation $a * x = b$ admet une unique solution dans G . Cette solution est $x = a' * b$.

Proposition 195

Soit $(G, *)$ un groupe et e son élément neutre.

Pour tout $(a, b) \in G^2$, l'équation $a * x = b$ admet une unique solution dans G qu'est $x = a' * b$.

Sous groupe

Définition 196

Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie non vide de G .

On dit que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si $(H, *)$ est un groupe.

Proposition 197

$$\begin{aligned}
 (H, *) \text{ est un sous-groupe de } (G, *) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1. H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ 2. H \text{ est stable par } * \\ 3. H \text{ est stable par passage au symétrique} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1. H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ 2. x * y \in H, \forall (x, y) \in H^2 \\ 3. x' \in H, \forall x \in H \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1. H \neq \emptyset \text{ et } H \subset G \\ 2. x * y' \in H, \forall (x, y) \in H^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Morphismes de groupes

Proposition 198

Soient $(G, *)$ et $(K, \otimes)$ deux groupes et f est un morphisme de $(G, *)$ dans $(K, \otimes)$.

1. Si e est l'élément neutre de $(G, *)$ alors $f(e) = e'$ est l'élément neutre de $(K, \otimes)$.
2. $(f(G), \otimes)$ est groupe.
3. Si de plus $(G, *)$ est un groupe abélien alors $(f(G), \otimes)$ est groupe abélien.

2 Anneau.

Soit A un ensemble non vide.

Définition 199

Supposons que A est muni de deux LCI $*$ et $\otimes$.

On dit que $\otimes$ est distributive sur $*$ ssi $\begin{cases} (1) : x \otimes (y * z) = (x \otimes y) * (x \otimes z) \\ (2) : (y * z) \otimes x = (y \otimes x) * (z \otimes x) \end{cases} ; \forall (x, y, z) \in A^3.$

Remarque 200 :

Si $\otimes$ est commutative alors l'une des (1) et (2) suffit.

Définition 201

Supposons que A est muni de deux LCI $*$ et $\otimes$.

1. On dit que $(A, *, \otimes)$ est un anneau ssi $\begin{cases} 1. (A, *) \text{ est une groupe abélien.} \\ 2. \otimes \text{ est associative dans } A. \\ 3. \otimes \text{ est distributive sur } * \end{cases}$.
2. On dit que $(A, *, \otimes)$ est un anneau unitaire si $(A, *, \otimes)$ est un anneau et $\otimes$ possède un élément neutre.
3. On dit que $(A, *, \otimes)$ est un anneau commutatif si $(A, *, \otimes)$ est un anneau et $\otimes$ est commutative.

Exemple 202 :

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Proposition 203

Soit $(A, *, \otimes)$ un anneau unitaire. On a, pour tout $(x, y) \in A$, les propriétés suivantes :

- (1) $0_A \otimes x = x \otimes 0_A = 0_A$.
- (2) $(-1_A) \otimes x = x \otimes (-1_A) = -x$.
- (3) $(-x) \otimes y = x \otimes (-y) = -(x \otimes y)$.
- (4) $(-x) \otimes (-y) = x \otimes y$.

Définition 204

Soit $(A, *, \otimes)$ un anneau et $x \in A \setminus \{0_A\}$.

On dit que x est un diviseur de zéro dans l'anneau A si il existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tel que :

$$x \otimes y = 0_A \quad \text{ou} \quad y \otimes x = 0_A.$$

Remarque 205 :

Un anneau $(A, *, \otimes)$ n'admet aucun diviseur de zéro veut dire que :

$$(\forall (x, y) \in {}^2 A) : \quad x \otimes y = 0_A \Leftrightarrow x = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Définition 206

On dit qu'un anneau $(A, *, \otimes)$ est intègre s'il n'est pas réduit à zéro et n'admet aucun diviseur de zéro.

Proposition 207 :

Soit $(A, *, \otimes)$ un anneau et $x \in A$.

Si x est inversible dans $(A, \otimes)$, alors x n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $(A, *, \otimes)$.

3 Corps.

Définition 208

On appelle **corps** tout anneau unitaire $(K, *, \otimes)$ non réduit à zéro tel que tout élément autre que zéro est inversible pour la loi $\otimes$.

Un corps est dit commutatif si la deuxième loi est commutative.

Exemples 209 :

$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

Proposition 210

Soit $(K, *, \otimes)$ un ensemble muni de deux LCI.

$(K, *, \otimes)$ est un corps ssi on a les trois axiomes :

- $$\begin{cases} (1) (K, *) \text{ est un groupe commutatif.} \\ (2) (K \setminus \{0_K\}, \otimes) \text{ est un groupe.} \\ (3) \text{ La loi } \otimes \text{ est distributive par rapport à la loi } *. \end{cases}$$

Proposition 211

Soit $(K, *, \otimes)$ un corps. On a les propriétés suivantes :

- (1) Tout élément de $K \setminus \{0_K\}$ est régulier pour $\otimes$.
- (2) $(K, *, \otimes)$ est un anneau intègre.
- (3) Pour tous $(a, b) \in K \setminus \{0_K\} \times K$, on a :

$$a \otimes x = b \Leftrightarrow x = a' \otimes b \quad \text{et} \quad x \otimes a = b \Leftrightarrow x = b \otimes a'.$$

Espace vectoriel

1 Loi de composition externe - Espace vectoriel.

Définition 212

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.

Toute application de $\mathbb{K} \times E$ dans E s'appelle une **loi de composition externe (L.C.E)** de $\mathbb{K}$ sur E .

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on note en général l'image de (λ, x) par $\lambda \cdot x$ ou λx .

Remarque 213 :

Dans de nombreux cas on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dans la suite on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 214

Un **espace vectoriel réel** (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) est un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

- (1) d'une LCI notée '+', telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre 0_E .
- (2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé **produit externe** ou **le produit par un scalaire** notée ' $\cdot$ ' et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall (x, y) \in E^2)$
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
 - (b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
 - (c) $(\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
 - (d) $1 \cdot x = x$.

Notation 215 :

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des vecteurs. En absence d'informations sur la nature de ces éléments, on les note par $\vec{x}$ ($\vec{x}, \vec{y}, \dots$). Avec cette notation la définition précédente devient :

Définition 216

Un **espace vectoriel réel** (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) est un triplet $(E, +, \cdot)$ dans le quel E est un ensemble non vide muni :

- (1) d'une LCI notée '+', telle que $(E, +)$ est groupe commutatif d'élément neutre $\vec{0}_E$.
- (2) d'une L.C.E de $\mathbb{R}$ sur E appelé **produit externe** ou **le produit par un scalaire** notée ' $\cdot$ ' et possèdent les propriétés suivantes : $(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2)$
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$.
 - (b) $\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$.
 - (c) $(\lambda \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$.
 - (d) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Proposition 217 :

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -e.v. Alors :

- (1) Tout vecteur de E est un élément régulier (simplifiable) dans $(E, +)$.
- (2) Pour tout $\vec{x} \in E$, on a : $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
- (3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- (4) Pour tout $(\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E$, on a : $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}$.

Proposition 218 :

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -e.v. Alors :

- (1) Pour tout $(\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times E$, on a : $(-\lambda) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (-\vec{x}) = -(\lambda \cdot \vec{x})$.
 (2) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, l'équation $\vec{x} + \vec{u} = \vec{v}$ admet une unique solution qu'est

$$x = \vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u}.$$

- (3) Pour tout $(\lambda, \mu), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^2 \times E^2$, on a

$$\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{y} \quad \text{et} \quad (\lambda - \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} - \mu \cdot \vec{x}.$$

2 Sous-Espace vectoriel.**Définition 219 :**

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -e.v. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- (1) $F \neq \emptyset$ et $F \subset E$.
 (2) F est stable par l'addition.
 (3) F est stable par le produit externe.
 (4) $(F, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -e.v.

Exemples 220 :

- (1) $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces de E . $\{\vec{0}\}$ est appelé le **sous-espace nul** de E .
 (2) Si $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, alors $\mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda \cdot \vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé la **droite vectorielle** dirigé par $\vec{u}$.

Proposition 221 :

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -e.v. et F une partie de E . On a :

$$(F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E) \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ (\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) : \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y} \in F. \end{cases}$$

3 Familles libres ou génératrices - Bases**Combinaisons linéaires.****Définition 222 :**

Soient $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

on appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (ou combinaison linéaire de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$) tout vecteur de la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les **coefficients** de cette combinaison linéaire.

Familles libres - Familles liées.**Définition 223**

Soient $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) On dit que la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est **libre** de E si pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ sont **linéairement indépendants**.

(2) Toute famille, qui n'est pas libre, est dite une famille **liée**.

Autrement, il existe une combinaison linéaire de cette famille de coefficients non tous nuls qui vaut $\vec{0}$.

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ sont **linéairement dépendants**.

Proposition 224

Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v.

(1) La famille $(\vec{x})$ est libre si et seulement si $\vec{x} \neq \vec{0}$.

(2) Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Toute famille contenant une sous famille liée est liée.

(5) Une famille est liée si et seulement si l'un de ces vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Familles génératrices.**Définition 225**

Soient $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) On dit que $(\vec{x})$ est **engendré** par la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ s'il peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette famille.

(2) On dit que la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est **génératrice** si :

$$(\forall \vec{x} \in E)(\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) : \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i.$$

Dans ce cas, on dit que cette famille engendre E .

Bases.**Définition 226**

Soient $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

La famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est dite **base** de E s'elle est libre et génératrice. i.e

$$(\forall \vec{x} \in E)(\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n) : \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{x}_i.$$

Dans ce cas, on note cette famille $\mathcal{B}$ et on écrit $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'appellent les **composantes** (ou **coordonnées**) de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\vec{x}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$.

Remarque 227 :

Si un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel admet une base $\mathcal{B}$, alors cette base n'est pas unique ($2\mathcal{B}$ est aussi une base).

Proposition 228

Soient $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ et $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ une base de E .

(1) Si $\vec{x}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{y}(\mu_1, \dots, \mu_n)_{\mathcal{B}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\vec{x} + \vec{y}(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \alpha \cdot \vec{x}(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

(2) Toutes les bases de E ont le même cardinal qu'on appelle la **dimension** de E noté $\dim E$ et on écrit $\dim E = n$.

Proposition 229

Soit $\mathbb{R}$ -e.v. $(E, +, \cdot)$ et $\mathcal{B}$ une base de E .

(1) Si $\dim E = 2$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$:

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}(a, b)_{\mathcal{B}}, \vec{v}(a', b')_{\mathcal{B}})$. Alors on a :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathcal{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathcal{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) Si $\dim E = 3$ et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u}(a, b, c)_{\mathcal{B}}, \vec{v}(a', b', c')_{\mathcal{B}}, \vec{w}(a'', b'', c'')_{\mathcal{B}})$. Alors on a :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \mathcal{B}' \text{ est génératrice de } E \Leftrightarrow \mathcal{B}' \text{ est libre de } E \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$