

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Ensemble des nombres complexes

Soit i le nombre tel que $i^2 = -1$

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, à tout point M de coordonnées (a, b) , on associe le nombre complexe z tel que $z = a + ib$. On dit que M est l'image du nombre complexe z et que le nombre z est l'**affixe** du point M .

De même, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z et z est l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.

L'écriture $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z

L'abscisse du point M est la partie réelle de z notée $\text{Re}(z)$.

L'ordonnée du point M est la partie imaginaire de z notée $\text{Im}(z)$.

Remarque : Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des nombres réels.

3. Conséquences

$M(a, b)$ et $M'(a', b')$ confondus



$a = a'$ et $b = b'$



$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ égaux

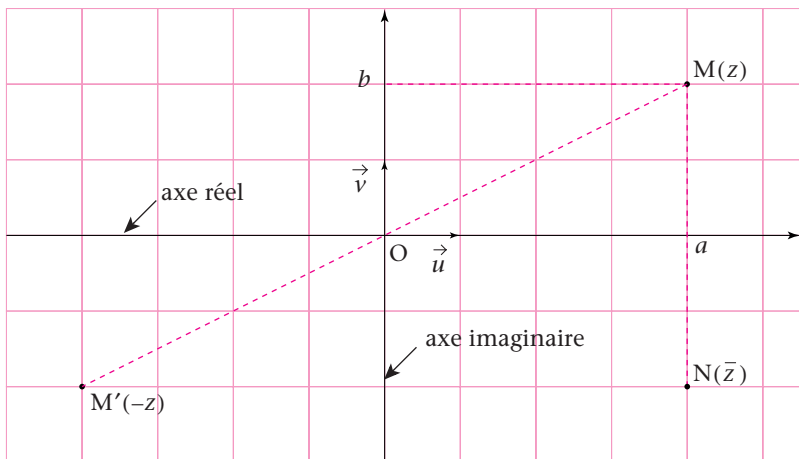
- $M = O \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $M \in (O, \vec{u}) \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

L'axe $(O, \vec{u})$ est appelé l'axe réel.

- $M \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Dans ce cas on dit que z est un imaginaire pur et que l'axe $(O, \vec{v})$ est l'axe des imaginaires ou l'axe des imaginaires purs.

- Les points $M(a, b)$ et $M'(-a, -b)$ sont symétriques par rapport à O , leurs affixes sont opposées.
- Le point $N(a, -b)$ est l'image du nombre complexe appelé **conjugué** de z et noté $\bar{z}$.
- Les points $M(a, b)$ et $N(a, -b)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemple d'application

1. Écrire les nombres complexes, affixes respectives des points : $A(0; -2)$; $B(-2; 0)$; $C(3; -2)$; $D(3; 2)$ et $E(0; 2)$.
2. Reconnaître s'il y a lieu des nombres conjugués.

Corrigé commenté

1. L'affixe du point A est $z_A = -2i$; l'affixe du point B est $z_B = -2$;
celle de C est $z_C = 3 - 2i$; celle de D est $z_D = 3 + 2i$
et celle de E est $z_E = 2i$.
2. $z_A = \bar{z}_E$ et $z_C = \bar{z}_D$.

2 Formes trigonométriques

1. Formes trigonométriques

- Soit un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé du plan.

Un point M distinct de O est repéré de deux façons, soit par ses **coordonnées cartésiennes** (a, b) soit par ses **coordonnées polaires** (r, θ) .

- Soit M l'image du nombre complexe z tel que $z = a + ib$. On pose $OM = r$ avec $r \geq 0$.

Le nombre positif r est appelé **module** de z et noté $|z|$.

Le nombre réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et est appelée **argument** de z et on écrit : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

Remarque : La notion d'angle de vecteurs nécessite une orientation du plan (l'orientation trigonométrique est la plus souvent utilisée.)

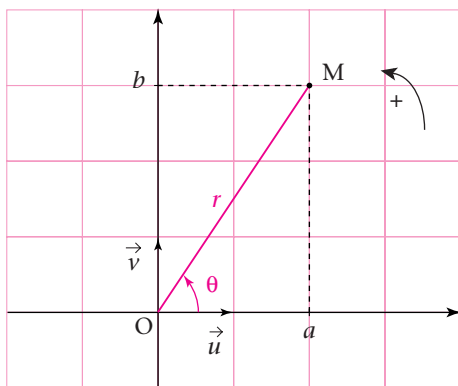
- En projetant M sur chacun des axes, on obtient :

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta$$

d'où $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et d'après le théorème de

Pythagore $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$(r = OM = \|\vec{OM}\| = |z|).$$



Sachant que $r > 0$, on appelle **forme trigonométrique** du nombre complexe z l'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

2. Propriétés du module et d'un argument d'un nombre complexe

- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, quel que soit z .
- L'argument de zéro n'est pas déterminé.
- Si $z \neq 0$, $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$.
- Si $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg z$.
- $z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases} \pmod{2\pi}$.

3. Passage de l'écriture algébrique à une forme trigonométrique

$$z = a + ib \text{ avec } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ d'où } z = |z| \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Soit θ le nombre exprimé en radians tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \text{ alors } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Remarque : Il est nécessaire d'avoir en tête les sinus et cosinus des valeurs particulières des angles.

Exemple d'application

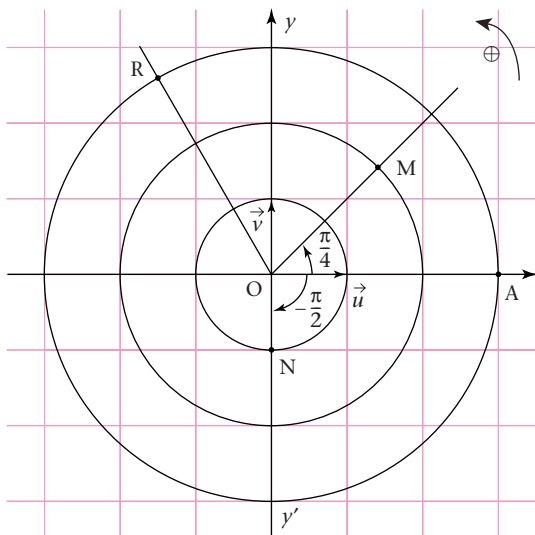
Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points M, N et R définis par $OM = 2$ et $(\vec{u}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$; $ON = 1$ et $(\vec{u}, \vec{ON}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $OR = 3$ et $(\vec{u}, \vec{OR}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

Corrigé commenté

- Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 et à la bissectrice du premier quadrant.

- Le point N appartient au cercle trigonométrique et à la demi-droite (Oy') .

- Sur le cercle de centre O et de rayon 3, on reporte deux fois le rayon à partir de A(3; 0) dans le sens trigonométrique, on obtient ainsi le point R.



3 Opérations dans $\mathbb{C}$

1. Addition des nombres complexes

- L'addition des nombres complexes possède les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$.

Tout nombre réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

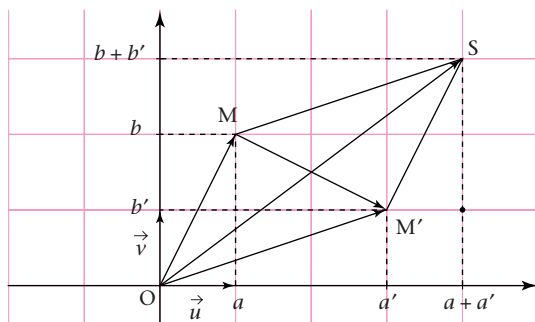
Soit les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ d'affixes respectives $a + ib$ et $a' + ib'$.

Le vecteur $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$ a pour coordonnées $(a + a', b + b')$ donc si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, le nombre complexe $z + z'$ est tel que

$$\operatorname{Re}(z + z') = a + a' \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = b + b' \text{ d'où } z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

$\overrightarrow{OS}$ est l'image de $z + z'$.

$\overrightarrow{MM'}$ est l'image de $z' - z$.



$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \quad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z); \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z).$$

2. Multiplication des nombres complexes

- La multiplication des nombres complexes possède les mêmes propriétés que la multiplication dans $\mathbb{R}$.

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ba' + ab').$$

Remarque : ayez toujours à l'esprit que $i^2 = -1$ et que i^2 ne doit pas figurer dans un résultat ni aucune autre puissance de i .

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}; \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ et $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, alors $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$.

Donc : $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

3. Division de deux nombres complexes

La division de deux nombres complexes a les mêmes propriétés que la division dans $\mathbb{R}$.

- Tout nombre complexe non nul admet un inverse $\frac{1}{z}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Remarque : cette écriture algébrique s'obtient en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

- Si $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i \left(\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2} \right)$

$$\text{Si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}, \quad \left(\frac{\bar{z}}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{z'}$$

$$\text{donc, si } z \neq 0, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \pmod{2\pi}.$$

Exemple d'application

Soit Z le nombre complexe tel que $Z = \frac{4-3i}{2-2i}$.

Calculer $|Z|$ et donner l'écriture algébrique de $\bar{Z}$.

Corrigé commenté

Indication : On applique la propriété $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

$$|Z| = \frac{|4-3i|}{|2-2i|} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \quad \text{d'où : } |Z| = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Indication : On applique la propriété $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{z'}$.

$$\bar{Z} = \frac{\overline{4-3i}}{\overline{2-2i}} = \frac{4+3i}{2+2i} = \frac{4+3i}{2(1+i)} = \frac{(4+3i)(1-i)}{2 \times 2} \quad \text{d'où : } \bar{Z} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}i.$$

Conseil : N'oubliez pas que $z\bar{z} = |z|^2$ donc que $(1+i)(1-i)$ s'écrit sans calcul 2. On pouvait aussi mettre Z sous forme algébrique et écrire ensuite $\bar{Z}$.

4 Formes exponentielles

1. Formes exponentielles

● Soit la fonction $f: \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$.

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta').$$

$$\text{Donc } f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta').$$

Cette relation fonctionnelle étant caractéristique des fonctions exponentielles on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Tout nombre complexe non nul z de module r est tel que $z = r(\sin \theta + i \cos \theta)$.

● L'écriture $re^{i\theta}$ est une **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Remarques :

– Cette écriture est à privilégier dans des calculs de quotients ou de puissances de nombres complexes.

– Tous les nombres complexes $e^{i\theta}$ ont pour module un et pour images des points du cercle trigonométrique.

● De part l'introduction de l'écriture exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}; \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$

● Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$$\bullet \quad re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases} \quad (2\pi).$$

2. Résolution d'une équation de type $z^n = a$

Si $n > 2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle.

Soit $z = re^{i\theta}$ et $a = \rho e^{i\alpha}$.

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'équation admet alors n solutions en donnant à k , n valeurs consécutives.

Exemple d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$.

Donner les solutions sous forme algébrique.

Corrigé commenté

On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pour $k = 0$, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$;

pour $k = 1$, $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$;

pour $k = 2$, $z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -2i$.

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2i ; \sqrt{3} + i ; -\sqrt{3} + i\}.$$

5 Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Équations du premier degré

Toute équation du premier degré d'inconnue z se ramène à $az + b = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Cette équation a pour solution $z = -\frac{b}{a}$.

Remarque : Il est souvent inutile de poser $z = x + iy$ et de déterminer ensuite x et y par identification des parties réelles et imaginaires.

Donner la solution sous une des trois formes algébrique, trigonométrique ou exponentielle.

2. Équations du second degré à coefficients réels

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Discriminant Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions	$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$	$x' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques :

- Si $\Delta < 0$, les solutions sont des nombres complexes conjugués non réels.
- Veillez à ne pas introduire le nombre complexe i sous un radical.
- $\sqrt{-\Delta}$ existe si $\Delta < 0$, on peut aussi écrire $\sqrt{|\Delta|}$.

3. Équations dont le degré est strictement supérieur à 2

Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans $\mathbb{R}$: il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente.

On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.

Remarque : il faut penser que $1 = -i^2$ et donc que $z^2 + 1$ est factorisable dans $\mathbb{C}$ alors qu'il ne l'est pas dans $\mathbb{R}$.

Exemples d'application

- ❶ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1-i)z + 3 = -z + i$.

Corrigé commenté

On regroupe les termes faisant intervenir z :

$$(1-i)z + z = -3 + i \quad \text{soit} \quad (2-i)z = -3 + i$$

$$\text{d'où} \quad z = \frac{-3+i}{2-i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \right\}.$$

- ❷ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

Corrigé commenté

Indication : on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 1 - 4 = -3, \quad \Delta < 0;$$

on peut écrire $\Delta = 3i^2$.

Indication : on sait alors que les solutions de l'équation sont deux nombres complexes conjugués.

Conseil : ne pas oublier la valeur absolue.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

6 Transformations ponctuelles

1. Transformation et application associée

Soit f une application définie par : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z).$$

Le point M étant l'image de z et M' l'image de z' tel que $z' = f(z)$, on définit dans le plan la transformation T associée à f , qui à M fait correspondre M' .

2. Transformations usuelles

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

Transformation T	Éléments caractéristiques	Définitions de T avec $M' = T(M)$	Écritures complexes de T avec $M(z)$ et $M'(z')$
Translation	Un vecteur $\vec{u}$ non nul d'affixe u	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$
Homothétie	Un point Ω d'affixe ω et un réel $k \neq 0$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $b \in \mathbb{C}$
Rotation	Un point Ω d'affixe ω et un angle de mesure θ à 2π près	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = e^{i\theta}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.
Symétrie d'axe réel	L'axe réel	$\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$

Exemple d'application

Parmi les écritures complexes suivantes, reconnaître les transformations et donner pour chacune d'elles les éléments caractéristiques.

1. $z' = -6z + 2 - 3i$.

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

Corrigé commenté

1. **Indication** : comme le coefficient de z est -6 , alors la transformation associée est une homothétie de rapport -6 . Pour trouver son centre, qui est le seul point invariant de la transformation, on résout « l'équation aux points fixes » c'est-à-dire celle traduisant $M' = M$ donc $z' = z$.

Par suite $z = -6z + 2 - 3i$ soit $7z = 2 - 3i$,

d'où $z = \frac{2}{7} - \frac{3}{7}i$.

L'homothétie est celle de rapport -6 et de centre Ω d'affixe $\frac{2}{7} - \frac{3}{7}i$.

2. **Indication** : comme le coefficient de z est le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ dont l'écriture exponentielle est $e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la transformation associée à l'écriture complexe est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Pour trouver son centre, on résout « l'équation aux points fixes ».

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2i \quad \text{soit} \quad z\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -4 + 2i \quad \text{d'où} \quad z = \frac{-4 + 2i}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i},$$

$$\text{soit} \quad z = \frac{(-4 + 2i)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + i\frac{-\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}},$$

d'où $z = -4 - \sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 3)$.

La rotation est celle de centre Ω d'affixe $-4 - \sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 3)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

7 Interprétations géométriques

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Interprétation géométrique d'une égalité de modules

Soit A, B et M trois points d'affixes respectives a , b et m .

- Si $|m - a| = |m - b|$, alors $AM = MB$ ce qui signifie que le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
- Si $|m - a| = r$, avec $r \in \mathbb{R}_+$, $AM = r$ donc le point M appartient au cercle de centre A et de rayon r .

2. Interprétation géométrique du quotient de deux nombres complexes

Les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' .

- Soit $Z = \frac{z}{z'}$ avec $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

$$\arg Z = \arg z - \arg z' = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \quad (2\pi)$$

$$\arg Z = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM'}, \vec{u}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi).$$

Remarque : un argument d'un quotient de deux nombres complexes non nuls est un angle de vecteurs.

- Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)$$

3. Figures particulières

- (ABC est un triangle rectangle et isocèle direct en B) $\Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- (ABC est un triangle équilatéral) $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$.
- (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{3}$ et $\arg \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\pi}{3}$.
- (ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

Exemples d'application

❶ Quelle est la nature du triangle ABO sachant que les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $2i$?

Corrigé commenté

Indication : on explicite le complexe Z tel que $Z = \frac{z_0 - z_A}{z_B - z_A}$, puis on en détermine son module et un argument.

$$Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{2i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + i}.$$

Indication : les nombres complexes $-\sqrt{3} - i$ et $-\sqrt{3} + i$ sont conjugués donc leurs modules sont égaux et leurs arguments opposés, donc $|Z| = 1$ soit :

$$|z_0 - z_A| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow \text{OA} = \text{OB}.$$

$$\arg(-\sqrt{3} - i) = \arg\left[2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right] = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi),$$

$$\text{or } \arg Z = \arg(-\sqrt{3} - i) - \arg(-\sqrt{3} + i) = 2 \arg(-\sqrt{3} - i),$$

$$\text{soit } \arg Z = -2 \times \frac{5\pi}{6} \quad (2\pi) \quad \text{d'où } \arg Z = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

$$\text{De plus } \arg Z = \arg\left(\frac{\overrightarrow{z_{AO}}}{\overrightarrow{z_{AB}}}\right) = \arg(z_{AO}) - \arg(z_{AB})$$

$$\text{soit } \arg Z = (\vec{u}, \overrightarrow{AO}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

$$\text{d'où } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Par suite le triangle AOB est équilatéral.

❷ Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + 2i$, $-2 + i$ et $-1 - 2i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Corrigé commenté

Il est souhaitable de placer les points dans un repère pour bien poser le problème.

On calcule le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{\overrightarrow{z_{BA}}}{\overrightarrow{z_{BC}}}$.

$$Z = \frac{1 + 2i - (-2 + i)}{-1 - 2i - (-2 + i)} = \frac{3 + i}{1 - 3i} = \frac{(3 + i)(1 + 3i)}{10},$$

$$\text{d'où } z = \frac{10i}{10} = i; \text{ on en déduit que } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

$$\text{De plus } |i| = 1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Leftrightarrow \text{BA} = \text{BC}.$$

Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en B.

1 Ensemble de définition et réductions éventuelles

1. Ensemble de définition

• Dans $\mathbb{R}$, les **intervalles** sont les ensembles suivants où $a < b$:

- intervalles ouverts : $] -\infty ; a[$; $] a ; b[$; $] b ; +\infty[$;
- intervalles fermés : $] -\infty ; a]$; $[a ; b]$; $[b ; +\infty[$;
- intervalles semi-ouverts ou semi-fermés : $[a ; b[$; $] a ; b]$;
- intervalles particuliers :

$$\mathbb{R} =] -\infty ; +\infty[\text{ et } \emptyset =] a ; a[= [a ; a[=] a ; a[.$$

• L'**ensemble de définition** D_f d'une fonction f est l'ensemble des éléments ayant une image par f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}.$$

Remarque : D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

2. Parité d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à zéro**, c'est-à-dire que pour tout x de D , $-x$ appartient à D .

Parité de f	Définition	Élément de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$
Paire	$f(-x) = f(x)$	axe des ordonnées
Impaire	$f(-x) = -f(x)$	origine du repère

Conséquence : si f est paire ou impaire, alors on peut réduire l'étude de f à $\mathbb{R}_+ \cap D$.

3. Périodicité d'une fonction

Soit un réel T strictement positif et une fonction f d'ensemble de définition D .

Le nombre T est une période de f si, et seulement si pour tout réel x de D , $(x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

Conséquence : on peut réduire D à un intervalle d'étude d'amplitude T contenu dans D .

On peut représenter f sur cet intervalle, puis on obtient toute la courbe en utilisant des translations de vecteur $kT \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples d'application

- 1 Réduire l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin x \cos^2 x.$$

Corrigé commenté

Indication : on commence par chercher une période pour la fonction f : pour cela on sait que les fonctions sinus et cosinus sont de période 2π .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cos^2(x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = \sin x \cos^2 x = f(x).$$

Donc 2π est une période de f , ce qui permet de choisir un intervalle d'amplitude 2π pour étudier f .

Conseil : en cas de parité de la fonction f , il est préférable de choisir un intervalle centré en zéro donc, ici, l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

$$\forall x \in [-\pi; \pi], \quad -x \in [-\pi; \pi] \text{ et } f(-x) = \sin(-x) \cos^2(-x)$$

$$\text{soit } f(-x) = -\sin x \cos^2 x = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

On peut en définitive **réduire l'intervalle d'étude de f à $[0; \pi]$.**

Conséquences : si on appelle Γ_1 la représentation de f pour $x \in [0; \pi]$, par symétrie de Γ_1 par rapport à l'origine O du repère on obtient Γ_2 . La courbe $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est donc la représentation de f pour $x \in [-\pi; \pi]$.

La représentation de f , sur $\mathbb{R}$ s'obtient par des translations de vecteurs $(k2\pi) \vec{i}$ de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

- 2 Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$.

Étudier la parité de f et réduire si possible son ensemble d'étude.

Corrigé commenté

Indication : il faut commencer par déterminer l'ensemble de définition de f .

$f(x)$ existe si et seulement si $x^3 - x \neq 0$ soit $(x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0)$ donc :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

On remarque que D_f est symétrique par rapport à 0, donc on peut étudier la parité de f .

$$(\forall x \in D_f) \quad (-x \in D_f) \text{ et } f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{x^2 + 1}{-(x^3 - x)} = -f(x); \text{ donc la fonction } f \text{ est impaire.}$$

On peut réduire l'ensemble d'étude à $]0; 1[\cup]1; +\infty[.$

2 Variations et opérations sur les fonctions

1. Variations d'une fonction sur un intervalle

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de son ensemble de définition.

Variations de f	Définitions ($\forall x \in I$) ($\forall x' \in I$)
f croissante sur I	$x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
f décroissante sur I	$x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$

2. Extrema d'une fonction

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de son ensemble de définition D .

Extrema de f sur I	Définitions ($\forall x \in I$)
M est le maximum de f sur I	$f(x) \leq M$
m est le minimum de f sur I	$f(x) \geq m$

Remarques : si $I = D$, alors l'extremum est absolu, sinon il est relatif ou local.
Si M ou m existe, alors il existe un réel x_0 de I tel que $f(x_0) = M$ ou $f(x_0) = m$.

3. Opérations sur les fonctions

Opérations	Les fonctions f et g sont définies sur I	Définitions ($\forall x \in I$)
Addition	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Multiplication par un réel non nul	kf	$(kf)(x) = kf(x)$
Multiplication	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Composition	$h \circ f$	$f(x) \in J$ $(h \circ f)(x) = h[f(x)]$

4. Variations et opérations sur les fonctions

- Si les fonctions f et g ont même variation, alors leur composée est croissante, sinon elle est décroissante.
- Si les fonctions f et g ont même variation sur un intervalle I , alors leur somme a même variation que chacune d'elles.
- Si les fonctions f et g ont même variation et sont strictement positives sur un intervalle I , alors leur produit a même variation que chacune d'elles.

$k \in \mathbb{R}$	$f \nearrow$ et $k > 0$	$f \searrow$ et $k > 0$	$f \searrow$ et $k < 0$	$f \nearrow$ et $k < 0$
kf	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin^2 x$.

Décomposer f en fonctions usuelles pour étudier ses variations.

Corrigé commenté

On peut écrire $f = f_2 \circ f_1$ avec $\begin{cases} f_1(x) = \sin x ; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ f_2(x) = x^2 ; x \in [-1; 1] \end{cases}$.

f_1 est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$; f_2 est définie sur $[-1; 1]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f_1	-1	0	1

Or sur $[-1; 0]$, f_2 est décroissante donc $f_2 \circ f_1$ est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; et f_2 croissante sur $[0; 1]$ donc $f_2 \circ f_1$ est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	-1	0	1
f_2	1	0	1

3 Comparaisons et positions relatives de deux courbes

1. Majoration et minoration de fonctions

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de son ensemble de définition.

	Définitions ($\forall x \in I$)
M est un majorant de f	$f(x) \leq M$
m est un minorant de f	$f(x) \geq m$

Remarque : tout extremum est majorant ou minorant d'une fonction sur un intervalle, mais la réciproque est fausse.

Autrement dit, un majorant ou un minorant n'est pas nécessairement atteint.

Une fonction f est **bornée** sur un intervalle I , si elle est à la fois majorée et minorée.

2. Positions relatives de deux courbes

On appelle **représentation graphique** de la fonction f , l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ quand x décrit D .

Étudier la position relative de deux courbes représentant deux fonctions f et g revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Si $f(x) - g(x) > 0$, alors $f(x) > g(x)$ ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Si $f(x) - g(x) < 0$, alors $f(x) < g(x)$ ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Si $f(x) = g(x)$ pour certaines valeurs de x , alors $\mathcal{C}_f$ est $\mathcal{C}_g$ ont des points communs pour chacune de ces valeurs.

3. Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence

Soit f une fonction de référence définie sur un ensemble D et représentée dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_g$
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b\vec{j}$.
$g(x) = f(x - a)$	$(x - a) \in D$	Translation de vecteur $a\vec{i}$.
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O; \vec{i})$.
$g(x) = f(x) $	$x \in D$	Sur $D \cap \mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f$; sur $D \cap \mathbb{R}_-$, symétrie d'axe $(O; \vec{i})$.
$g(x) = f(x)$	$ x \in D$	g est paire, donc : sur $D \cap \mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f = \Gamma$; sur $D \cap \mathbb{R}_-$, symétrique de Γ par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Étudier les positions relatives de la droite Δ d'équation $y = -2x + 5$ et de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f .

Corrigé commenté

Indication : étudier les positions relatives de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}$ revient à étudier le signe de $f(x) - (-2x + 5) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Le signe de cette différence est celui de $x - 1$ car $x^2 + 1 > 0$.

- Si $x - 1 > 0$ c'est-à-dire si $x \in]1; +\infty[$, alors $f(x) - (-2x + 5) > 0$, donc $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Δ pour $x \in]1; +\infty[$.
- Si $x - 1 < 0$ c'est-à-dire si $x \in]-\infty; 1[$, alors $f(x) - (-2x + 5) < 0$, donc $\mathcal{C}$ est strictement en dessous de Δ pour $x \in]-\infty; 1[$.
- Si $x = 1$, alors $\mathcal{C}$ et Δ ont le point $A(1; 3)$ en commun.

4 Symétries de la courbe représentative d'une fonction

1. Centre de symétrie d'une courbe

Soit $\Omega(a; b)$ un point situé dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On veut prouver que Ω est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f .

● Première méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ \bullet h \in \mathbb{R}, (a+h) \in D_f, (a-h) \in D_f \\ \bullet \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b \end{array} \right\}$$

Alors Ω est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

● Deuxième méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet M(x, y) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ et } M(X; Y) \text{ dans } (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \\ \bullet \begin{cases} x = a + X \\ y = a + Y \end{cases} \\ \bullet \mathcal{C} \text{ a pour équation } y = f(x) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{ et } \mathcal{C} \text{ a pour équation } Y = g(X) \text{ dans } (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \end{array} \right\}$$

Si g est impaire, alors Ω est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

2. Axe de symétrie d'une courbe

Soit la droite Δ d'équation $x = a$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On veut prouver que Δ est l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f dont l'ensemble de définition est D_f .

● Première méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ \bullet h \in \mathbb{R}, (a+h) \in D_f, (a-h) \in D_f \\ \bullet f(a+h) = f(a-h) \end{array} \right\}$$

Alors Δ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

● Deuxième méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet M(x, y) \text{ dans } (O ; \vec{i}, \vec{j}) \text{ et } M(X ; Y) \text{ dans } (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{avec par exemple } \Omega(a ; 0) \\ \bullet \begin{cases} x = a + X \\ y = Y \end{cases} \\ \bullet \mathcal{C} \text{ a pour équation } y = f(x) \text{ dans } (O ; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{et } \mathcal{C} \text{ a pour équation } Y = g(X) \text{ dans } (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}) \end{array} \right\}$$

Si g est paire, alors Δ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

Exemple d'application

Montrer que la droite d'équation $x = -2$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 6}$.

Corrigé commenté

Indication : soit $\Omega(-2 ; 0)$ l'origine du repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point $M(x ; y)$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et $M(X ; Y)$ dans $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les formules de changement de repère sont :

$$\begin{cases} x = -2 + X \\ y = Y. \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 6} = y$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, elle a pour

$$\text{équation dans } (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}) : Y = \frac{(-2 + X)^2 + 4(-2 + X) + 3}{(-2 + X)^2 + 4(-2 + X) + 6},$$

$$\text{soit } Y = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2}.$$

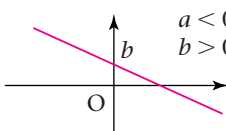
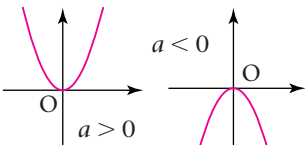
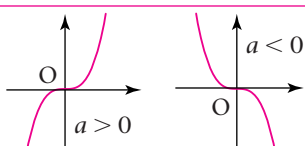
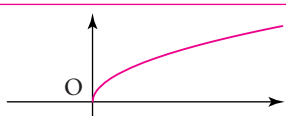
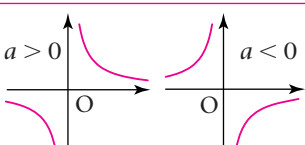
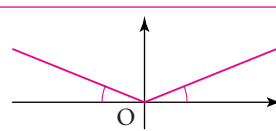
$$Y = g(X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2}, \text{ } g \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ car } X^2 + 2 > 0.$$

$$\text{Pour tout réel } X, -X \in \mathbb{R} \text{ et } g(-X) = \frac{(-X)^2 - 1}{(-X)^2 + 2};$$

$$\text{soit } g(-X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2} = g(X).$$

La fonction g est paire, donc la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $(\Omega ; \vec{j})$; c'est-à-dire que la droite Δ d'équation $x = -2$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

5 Fonctions usuelles

Fonctions	Noms et variations	Courbes représentatives
$x \mapsto ax + b$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$	fonction affine	
	sur $\mathbb{R}$	
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto ax^2$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^*$	fonction carrée	
	sur $\mathbb{R}_+$	
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto ax^3$ $a \in \mathbb{R}^*$ $x \in \mathbb{R}$	fonction cube	
	sur $\mathbb{R}$	
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{R}_+$	fonction racine carrée strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$	
$x \mapsto \frac{a}{x}$	fonction inverse	
	sur $\mathbb{R}_+^*$	
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto x $ $x \in \mathbb{R}$	fonction valeur absolue	
	sur $\mathbb{R}_-$	
	sur $\mathbb{R}_+$	
$x \mapsto \ln x$ $x \in \mathbb{R}_+^*$	voir page 148	voir page 148
$x \mapsto \exp x$ $x \in \mathbb{R}$	voir page 184	voir page 184

Fonctions	Noms et variations	Courbes représentatives
$x \mapsto \cos x$ $x \in \mathbb{R}$	fonction cosinus de période 2π , paire sur $[-\pi ; \pi]$, décroissante sur $[0 ; \pi]$	
$x \mapsto \sin x$ $x \in \mathbb{R}$	fonction sinus de période 2π , impaire sur $[-\pi ; \pi]$, croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$	

Exemple d'application

Donner, pour chaque proposition une justification, qui soit relative à la variation d'une fonction usuelle.

- Si $a < b \leq 0$, alors $a^2 > b^2 \geq 0$.
- Si $a < b$, alors $a^3 < b^3$.
- Si $a < b < 0$, alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.
- Si $0 \leq a < b$, alors $0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Si $0 < a < b$, alors $\ln a < \ln b$.
- Si $a < b$, alors $e^a < e^b$.
- Si $a < b$, alors $-2a + 3 > -2b + 3$.

Corrigé commenté

- La fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction affine $x \mapsto -2x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

1 Produit scalaire dans le plan ou dans l'espace

1. Définition

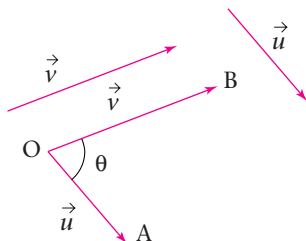
• Soit $\mathcal{E}$ le plan ou l'espace.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$, et trois points O, A et B tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{OB}.$$

On note θ l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$.



$$\text{Soit } \vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \theta.$$

Remarque : Le signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dépend du signe de $\cos \theta$:

$$(\theta \text{ aigu}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$

$$(\theta \text{ obtus}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

$$(\theta \text{ droit}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

2. Conséquences

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\theta = 0$ donc $\cos \theta = 1$.

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\theta = \pi$ donc $\cos \theta = -1$.

• Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u})^2 = (\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$.

$(\vec{u})^2$ est appelé carré scalaire, c'est un nombre positif.

$\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; cette égalité traduit la symétrie du produit scalaire.

3. Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{E}$ et deux réels α et β :

$$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = (\alpha \beta) \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

4. Propriété fondamentale

Si on projette orthogonalement les vecteurs $\vec{u}$ en $\vec{u}'$ sur la direction de $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}$ (les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

De même si on projette orthogonalement le vecteur $\vec{v}$ en $\vec{v}'$ sur la direction de $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{u}$.

Donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{u}$$

Exemple d'application

Démontrer que dans un triangle quelconque ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \widehat{ABC}.$$

Ce théorème est celui d'Al-Kashi (généralisation à un triangle quelconque du théorème de Pythagore).

Corrigé commenté

D'après la relation de Chasles, quels que soient les points A, B et C :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

d'où $(\vec{AC})^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 = AB^2 + BC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Soit $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ d'où :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos \widehat{ABC}.$$

2 Produit scalaire en géométrie analytique

Dans le plan	Dans l'espace
Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère ortho-normé du plan	Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère ortho-normé de l'espace
Représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$	
Passant par $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$	Passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(a, b, c)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{v} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$
Équations cartésiennes de $\mathcal{D}$	
$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \text{ avec } ab \neq 0$ soit $Ax + By + C = 0$	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ avec $abc \neq 0$
Produit scalaire	
des vecteurs $\vec{v}(x, y)$ et $\vec{v}'(x', y')$ $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$	des vecteurs $\vec{v}(x, y, z)$ et $\vec{v}'(x', y', z')$ $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$
Équation cartésienne et vecteur normal	
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A(x_0, y_0)$ et orthogonale à un vecteur $\vec{v}(a, b)$ $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ $ax + by + c = 0.$	Soit P un plan passant un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orthogonal à un vecteur $\vec{v}(a, b, c)$ $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$ $ax + by + cz + d = 0.$
Distance d'un point B	
$B(x_1, y_1)$ à une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ $d(B, (\mathcal{D})) = \frac{ ax_1 + by_1 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}.$	$B(x_1, y_1, z_1)$ à un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ $d(B, (P)) = \frac{ ax_1 + by_1 + cz_1 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

Cercle

Équation d'un cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
 soit $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
 avec $c = a^2 + b^2 - R^2$.

Sphère

Équation d'une sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon R
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
 soit $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$
 avec $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Équation paramétrique d'un plan P contenant $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{v}(a, b, c)$ et $\vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}$ et $\vec{v}_1$ non colinéaires.

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}_1 \text{ avec } \lambda \mu \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a_1 \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b_1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Remarque : Si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes de deux plans P et P' sécants, alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une représentation de leur droite d'intersection dans l'espace.

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $ax + by + cz + d < 0$ est le demi-espace ouvert de frontière le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et contenant le point O si $d < 0$.

Exemple d'application

Soit les points $A(0 ; 6)$ et $B(-2 ; 10)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer la distance du point $C(4 ; -3)$ à la droite (AB) .

Corrigé commenté

Conseil : On rappelle que les vecteurs $\vec{u}(X, Y)$ et $\vec{v}(X', Y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $XY' - X'Y = 0$.

$N(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AN}(x ; y-6)$ et $\overrightarrow{AB}(-2 ; 4)$.

$N(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow 4x - (-2)(y-6) = 0$ soit

$4x + 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

$$d(C, (AB)) = \frac{|2 \times 4 - 3 \times 1 - 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} \text{ soit } d(C, (AB)) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3 Barycentres dans l'espace et caractérisations barycentriques

1. Définition du barycentre de n points pondérés

Soit les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de pondérations respectives $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Ce point est appelé barycentre des n points pondérés.

2. Propriétés

- On ne change pas le barycentre de n points en multipliant les pondérations par un même nombre non nul.
- On ne change pas le barycentre de n points pondérés, en remplaçant p de ces points ($p \leq n$) par leur barycentre, s'il existe, affecté de la somme des leurs pondérations (théorème du barycentre partiel).
- Coordonnées du barycentre dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Un point A_i a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) et pour pondération a_i .

Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, soit $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre des n points pondérés alors :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\sum_{i=1}^n a_i},$$

3. Caractérisations barycentriques

- La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$.
- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha\beta > 0$.
- Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
- La surface intérieure au triangle ABC est l'ensemble des barycentres des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$.

Exemples d'application

❶ Soit un tétraèdre ABCD et C' le symétrique de C par rapport à A et G le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 4); (C, -1); (D, 3)\}$. Les points G, B, C' et D sont-ils coplanaires ?

Corrigé commenté

Indication : La coplanéarité des points G, B, C' et D revient à démontrer que l'un d'entre eux est barycentre des trois autres points pondérés.

Le point C' est le symétrique de C par rapport à A ce qui signifie que $2\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$ donc C' est le barycentre des points (A, 2) et (C, -1).

Par associativité, le point G est alors le barycentre des points (C' , 1), (B, 4) et (D, 3), on en déduit donc que les points G, B, C' et D sont coplanaires.

❷ Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Montrer que le point A est barycentre des points B, C, D affectés de coefficients que l'on déterminera.

Corrigé commenté

En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire :

$$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\text{soit } -2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 6\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Or, $-2 - 3 + 6 \neq 0$, donc :

A est le barycentre du système $\{(B, -2); (C, -3); (D, 6)\}$.

4 Positions relatives dans l'espace

On considère un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Intersection de deux plans

Soit deux plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et le plan P' a pour vecteur normal $\vec{n}'(a', b', c')$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, alors les plans P et P' sont parallèles.

Remarque : Dans l'espace, deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\vec{n}' = k\vec{n}$.

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P' sont sécants selon une droite.

2. Intersection d'une droite et d'un plan

Soit une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{v}$ et un plan P défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- Si $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont coplanaires, alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan P .
- Si $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas coplanaires, alors la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan en un point.

Si $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$$

et si P a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors $\mathcal{D}$ et P ont un point commun si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) + d = 0.$$

3. Intersection de trois plans

- Les plans P , P' et P'' peuvent être sécants deux à deux et n'avoir aucun point commun et alors le système (S) :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{n'a aucune solution.}$$

- Si les trois plans sont strictement parallèles, alors le système (S) n'a aucune solution.
- Si les trois plans sont sécants selon une droite, alors le système (S) admet une infinité de solutions. Ces solutions sont les triplets de coordonnées des points de la droite d'intersection.
- Si les trois plans sont sécants selon un point, alors le système (S) admet une seule solution. Cette solution est le triplet de coordonnées du point commun à ces trois plans.

Exemple d'application

Déterminer les positions relatives des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 3t + 5 \\ z = 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = t' + 4 \\ y = -t' + 1 \\ z = 2t' - 1 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Corrigé commenté

Les vecteurs directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont $\vec{u}(-2; 3; 0)$ et $\vec{u}'(1; -1; 2)$; les coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Si ces droites sont sécantes, alors il existe un couple (t, t') vérifiant les deux représentations paramétriques.

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} -2t + 3 = t' + 4 \\ 3t + 5 = -t' + 1 \\ 4 = 2t' - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7}{4} \\ t = -\frac{13}{6} \\ t' = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Les résultats ne sont pas compatibles, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas sécantes.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, n'ont pas de point commun, donc elles ne sont pas coplanaires.

1 Limite d'une suite

1. Limite d'une suite

● **Rappel** : toute application de A dans $\mathbb{R}$ où A est une partie de $\mathbb{N}$, est une **suite numérique**.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette application.

• Une suite u a une limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Si la suite u a une limite L finie, on dit que la suite u est **convergente**.

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ou bien $\lim(u_n) = L$.

Remarque : toute suite non convergente est **divergente**.

• Une suite u a une limite égale à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle $[B ; +\infty[$ (resp. $]-\infty ; C]$) avec B et C deux réels quelconques, contient tous les u_n à partir d'un certain rang.

2. Limite de suites particulières

• Les suites usuelles $n \mapsto \frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes de limite zéro.

• Toute suite stationnaire $n \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) est convergente de limite a .

Soit une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur un intervalle $[b ; +\infty[$.

Si la limite de f est L , alors la limite de u est L .

3. Théorèmes de comparaison

• Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes telles que, à partir d'un certain n_0 , pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Si $|u_n| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.

● **Théorème des gendarmes**

Soit trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) , telles que u et w convergent vers L .

S'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim v_n = L$.

Exemples d'application

- ❶ Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+3}{n+2}$.

Pour un entier naturel p donné, déterminer un entier naturel n tel que :

$$1 - 10^{-p} < u_n < 1 + 10^{-p}.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé commenté

Comme $n+3 > n+2$, alors $u_n > 1$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $1 - 10^{-p} < u_n$.

Déterminons n tel que $u_n < 1 + 10^{-p}$

$$\text{soit } \frac{n+3}{n+2} < 1 + 10^{-p} \quad \text{soit } \frac{n+3}{n+2} - 1 < 10^{-p} \quad \text{soit } \frac{1}{n+2} < 10^{-p}$$

c'est-à-dire $10^p < n+2$ car $n+2 > 0$ d'où $n > 10^p - 2$.

Donc si on pose $N = 10^{p+1} - 2$, tous les termes de la suite à partir de u_n sont dans l'intervalle ouvert $]1 - 10^{-p}; 1 + 10^{-p}[$.

Indication : quel que soit l'entier p choisi, donc quel que soit l'intervalle ouvert de centre 1, cet intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est 1.

- ❷ Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Déterminer par deux méthodes différentes la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

$$\bullet \text{ Comme } u_n = \frac{n^2+3}{n+1}, \text{ alors } u_n = f(n) \text{ avec } f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{x\left(x+\frac{3}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}$$

car $x \neq 0$ dans un voisinage de $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + x \right) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc, par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La suite u étant la restriction de f à $\mathbb{N}$, (u_n) est divergente.

$$\bullet u_n = \frac{n^2-1+4}{n+1} = n-1 + \frac{4}{n+1}.$$

Or, sur $\mathbb{N}$, $n+1 > 0$ donc $\frac{4}{n+1} > 0$ et par suite $n-1 + \frac{4}{n+1} > n-1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty \text{ donc par comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty.$$

2 Monotonie et propriétés des suites

1. Monotonie d'une suite

Soit une suite réelle (u_n) et A l'intersection d'un intervalle de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{N}$.

- La suite (u_n) est **croissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **monotone** sur A , si quel que soit n de A , elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est **stationnaire**, s'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

2. Suites majorées, minorées, bornées

Suite majorée	Suite minorée	Suite bornée
Soit $A \subset \mathbb{N}$, pour tout n de A , il existe un réel M ou un réel m		
$u_n \leq M$	$u_n \geq m$	$m \leq u_n \leq M$

Théorème : toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

3. Suites adjacentes

● Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in A} \text{ est croissante ;} \\ (v_n)_{n \in A} \text{ est décroissante ;} \\ \text{pour tout } n \text{ de } A, u_n \leq v_n ; \\ \lim(u_n - v_n) = 0. \end{array} \right.$$

● Théorème

Deux suites adjacentes sont convergentes vers une même limite.

Exemples d'application

- ❶ Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$. Étudier sa monotonie sur $\mathbb{N}$.

Corrigé commenté

Il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n = f(n)$ avec :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}.$$

Cette fonction f est rationnelle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ a le même signe que $(x-1)(x+3)$ lequel est positif pour :

$$x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[.$$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [1; +\infty[$,

par suite la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$, sa restriction à $\mathbb{N}^*$ est croissante.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante pour tout entier naturel non nul.

Remarque : $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{7}{3}$, ...

$u_0 > u_1$ et $u_1 < u_2$, ..., $u_n < u_{n+1}$ donc u_0 a un comportement à part dans la suite. La monotonie d'une suite est donnée par le comportement de la majorité des éléments de (u_n) .

- ❷ Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Corrigé commenté

Indication : les u_n sont strictement positifs et se présentent sous la forme d'un quotient donc on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!}; \text{ or } (n+1)! = (n+1)n! \quad (n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1)$$

$$\text{donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n \times (n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Or, $n < n+1$ soit $\frac{n}{n+1} < 1$ d'où $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$ car la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout entier naturel non nul, ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

3 Récurrence

1. Raisonnement par récurrence

Soit un nombre entier naturel n_0 et P_n une propriété.

Démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$ se fait en trois étapes.

- **Initialisation** : on vérifie que P_{n_0} est vraie.
- **Hérédité** : on suppose pour un entier $n \geq n_0$, que la propriété P_n est vraie (hypothèse de récurrence), puis on démontre, compte tenu de cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : pour tout $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.

Remarque : on pense à ce raisonnement par récurrence, dès que l'on veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$,

2. Suites récurrentes

Soit une fonction f définie sur un intervalle I tel que pour tout x de I , $f(x)$ est aussi dans I .

On peut définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 avec $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si u_n converge, alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Remarque : les suites arithmétiques et géométriques sont des suites récurrentes.

Exemples d'application

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases}$$

Déterminer la monotonie de cette suite à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 3} \end{cases}$$

Déterminer de même la monotonie de cette suite.

Corrigé commenté

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

$f'(x) > 0$, donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On calcule u_1, u_2 : $u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = \sqrt{6 + 3} = 3$; $u_2 = \sqrt{u_1 + 3} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6}$.

On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et on démontre par récurrence cette propriété.

On pose P_n : $u_n > u_{n+1}$.

• **Initialisation** : P_0 est vraie car $u_0 > u_1$.

• **Hérédité** : on suppose que pour $n \geq 0$, $u_n > u_{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} > u_{n+2}$.

On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$.

Soit $u_{n+1} > u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion** : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

2. On remarque cette fois que $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$, on conjecture que la suite (v_n) est croissante.

En utilisant la même fonction f car $v_{n+1} = f(v_n)$, on démontre par récurrence que la suite (v_n) est croissante.

2 Démontrer par récurrence que, quel que soit n de $\mathbb{N}$, le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

Corrigé commenté

Soit P_n la propriété : $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$: $5^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$, or zéro est multiple de 22, donc P_0 est vraie.

• **Hérédité**

On suppose que pour un entier quelconque $n \geq 0$, la propriété est vraie (hypothèse de récurrence), puis on démontre compte tenu de cette hypothèse que P_{n+1} est vraie.

Or $5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = 5^{2n} \times 5^2 - 3 \times 3^n$ soit :

$$5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = (22 + 3) \times 5^{2n} - 3 \times 3^n = 22 \times 5^{2n} + 3(5^{2n} - 3^n).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22, le nombre $5^{2(n+1)} - 3^{n+1}$ étant la somme de deux multiples de 22, est un multiple de 22 d'où la véracité de P_{n+1} .

• **Conclusion**

On a vérifié que P_0 est vraie, on a montré que P_{n+1} est vraie sous l'hypothèse de récurrence que P_n était vraie pour un $n \geq 0$, donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}), 5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

4 Suites particulières

1. Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques		Suites géométriques		
$n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + r$ $r \in \mathbb{R}$, r : raison de la suite	Relation de récurrence		$n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = qu_n$ $q \in \mathbb{R}$, q : raison de la suite	
$n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$	Terme général		$n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 q^n$	
$n \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$ $u_n = u_p + (n - p)r$	Relation entre deux termes		$n \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$ $u_n = u_p (q)^{n - p}$	
Somme de termes consécutifs				
$\sum_{i=0}^n u_i = \frac{(u_0 + u_n)(n + 1)}{2}$		$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ et } q \neq 1$ Si $q = 1$, alors $\sum_{i=0}^n u_i = (n + 1)u_0$		
Sommes particulières				
$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$		$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ avec $q \neq 1$		
$n \mapsto u_0 + nr$	Limites et monotonie		$n \mapsto q^n$	
Si $r < 0$, la suite est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. Si $r > 0$, la suite est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	$q < -1$	$-1 < q < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$
	Suite alternée divergente (pas de limite).	Suite alternée convergente de limite nulle.	Suite décroissante convergente de limite nulle.	Suite croissante divergente de limite infinie.

2. Suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$

- Si $a = 1$, il s'agit de suites arithmétiques de raison b .
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, il s'agit de suites géométriques de raison a .
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$, on considère la fonction affine f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = ax + b$.

La représentation graphique de f est une droite $\mathcal{D}$.

Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes en $I\left(\frac{b}{1-a}; \frac{b}{1-a}\right)$ si $a \neq 1$.

Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est telle que $\ell = \frac{b}{1-a}$.

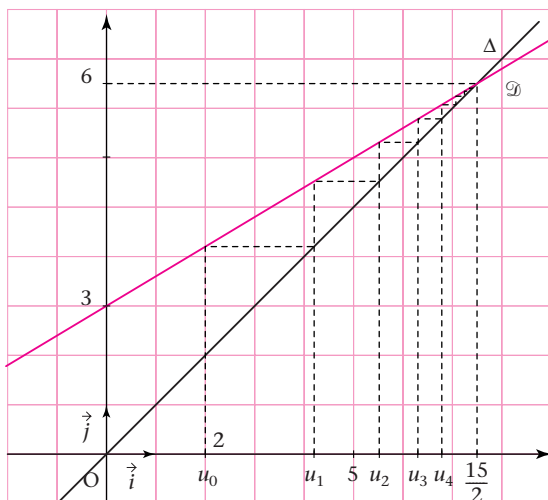
Exemple d'application

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 3$.

Représenter graphiquement la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{5}x + 3$ et tracer la droite Δ d'équation $y = x$. Émettre une conjecture concernant la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

Les droites $\mathcal{D}$ (représentative de f) et Δ sont sécantes au point d'abscisse $\frac{15}{2}$. On conjecture que la limite de (u_n) est $\frac{15}{2}$.



1 Rappels sur les probabilités et conditionnement

1. Rappels sur l'équiprobabilité

● Le résultat d'une expérience aléatoire est une issue ou une éventualité. L'ensemble de ces issues est E .

● Un événement est une partie de E .

● Les événements A et B sont disjoints ou incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

● Les événements A et B sont contraires si $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B = E$. On note $B = \bar{A}$.

● L'univers E est probabilisé si à chaque événement élémentaire $\{x\}$ on associe un nombre $p_i \in [0 ; 1]$ par une application p qui satisfait à $p(E) = 1$ et $\sum p_i = 1$.

Conséquences :

si $A \subset E$, la probabilité de A notée $p(A)$ est telle que $p(A) = \sum_{x_i \in A} p_i$.

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ donc $p(\emptyset) = 0$.

Si $A \cap B = \emptyset$, alors $p(A \cup B) = p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$.

Si $A \subset E$ et $B \subset E$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

● Univers équiprobable : ensemble E dont tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Si l'ensemble E contient N éléments, alors :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}.$$

Si $A \subset E$ et si A contient n éventualités, alors :

$$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

2. Probabilités conditionnelles

Soit une expérience aléatoire et deux événements A et B de l'univers probabilisé par cette expérience.

Si $p(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé s'écrit $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ et est telle que $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Remarque : comme $A \cap B = B \cap A$, alors

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A) \quad (p(A) \neq 0 \text{ et } p(B) \neq 0).$$

$$p_B(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

3. Formule des probabilités totales

$\{B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_n\}$ est une partition de E si :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, B_i \neq \emptyset \\ \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset \\ B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_i \cup \dots \cup B_n = E. \end{cases}$$

Si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de E et si $p(B_i)$ est non nul pour tout i , alors :

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n).$$

Exemple d'application

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que la carte soit un carreau sachant que c'est une carte rouge qui a été tirée.

Corrigé commenté

Soit A l'événement « tirer une carte rouge » : $p(A) = \frac{1}{2}$.

Soit B l'événement « tirer un carreau ».

$$A \cap B = B \text{ car } B \subset A \text{ d'où } P(A \cap B) = P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ soit } P_A(B) = \frac{1}{2}.$$

Sachant que la carte tirée est rouge, il y a une chance sur deux que ce soit un carreau.

2 Indépendance et modélisation

1. Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Conséquence : $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

2. Modélisation

Définitions : Une loi de probabilité, ou distribution de probabilité, est une fonction P qui à tout événement A associe un nombre $p(A)$, sa probabilité appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.

Modéliser une expérience aléatoire c'est lui associer une loi de probabilité.

3. Liens entre statistiques et probabilités

- Une fréquence calculée à partir de données expérimentales est empirique, mais la probabilité d'un événement est un nombre théorique.

Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques ou indépendantes fluctuent, alors que la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience.

- Si on choisit n éléments indépendamment les uns des autres selon une loi de probabilité P , alors la distribution des fréquences est voisine de P pour n grand.

- Si des expériences sont répétées de façons identiques et indépendantes et si p est la probabilité associée à un événement A , alors la probabilité d'obtenir n fois l'événement A est égale à p^n .

- On appelle variable aléatoire X l'application d'un ensemble E muni d'une loi P et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La variable aléatoire X prend les valeurs x_i ($i \in \mathbb{N}$), avec les probabilités p_i définies par $p_i = P(X = x_i)$.

Distribution de fréquences sur $E = \{x_1, \dots, x_n\}$	Loi de probabilité sur $E = \{x_1, \dots, x_n\}$
$(f_1, \dots, f_n)$ $f_i \geq 0, \quad \sum f_i = 1$ $A \subset E$, fréquence de A , $f(A) = \sum_{x_i \in A} f_i.$	$(p_1, \dots, p_n)$ $p_i \geq 0, \quad \sum p_i = 1$ $A \subset E$, probabilité de A , $P(A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$

Cas numérique :

Moyenne empirique : $\bar{x} = \sum f_i x_i$.

Variance empirique :

$$S^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2.$$

Écart type empirique :

$$s = \sqrt{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}.$$

Cas numérique :

Espérance d'une loi P : $\mu = \sum p_i x_i$.

Variance d'une loi P :

$$\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2.$$

Écart type d'une loi P :

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i (x_i - \mu)^2}.$$

Exemple d'application

On lance 4 fois de suite un dé équilibré.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le 5 à chaque lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le 5 avec 4 lancers ?

Corrigé commenté

1. Soit A l'événement obtenir le 5 à 1 lancer.

$$p(A) = \frac{1}{6}.$$

Soit B l'événement obtenir le 5 à chaque lancer.

On répète 4 fois l'expérience aléatoire de façons identiques et indépendamment les unes des autres.

$$\text{Donc } p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \quad \text{d'où} \quad p(B) = \frac{1}{1\,296}$$

2. Soit C l'événement obtenir au moins une fois le 5 après 4 lancers.

Le plus simple est de calculer la probabilité de l'événement $\bar{C}$ qui consiste à obtenir zéro fois le nombre 5 après 4 lancers.

$$p(\bar{C}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{d'où} \quad p(C) = 1 - p(\bar{C}),$$

$$\text{soit } p(C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \text{soit} \quad p(C) = \frac{671}{1\,296}$$

3 Combinatoire et lois discrètes

1. Combinatoire

- On appelle factorielle n le nombre qui s'écrit $n!$ et qui est égal à : $n(n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ pour $n \geq 2$, avec $0! = 1$ et $1! = 1$.
- Toute partie de E est une combinaison de E .

Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté $\binom{n}{p}$ et est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ où $0 \leq p \leq n$.

- Cas particuliers

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

- Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \text{relation de Pascal : } \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

- Formule du binôme de Newton

Pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tout nombre a et b :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}.$$

Remarque : Si $a = b = 1$, alors $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ ceci traduit le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments.

2. Lois discrètes

- Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a seulement deux issues contraires A et $\bar{A}$ de probabilités respectives p et $q = 1-p$.

Le schéma de Bernoulli est la répétition n fois et de façons identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

La probabilité d'obtenir k réalisations de A sur n épreuves est donnée par la

loi de Bernoulli : $k \mapsto p_k$ avec $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Remarque : $\sum_{p=0}^n p^k q^{n-k} = 1$.

• Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre k de réalisations de A dans un schéma de Bernoulli.

La variable X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , elle a pour loi de probabilité $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Dans ce cas $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Exemple d'application

Démontrer les formules : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
 $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ où $0 \leq p \leq n$.

Corrigé commenté

$$A = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

$$A = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!p}{(p-1)!p(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)}.$$

Le dénominateur commun est $p!(n-p)!$

car $(p-1)!p = p!$ et $(n-p-1)!(n-p) = (n-p)!$

$$\text{d'où } A = \frac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p};$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}, \text{ d'où } \boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}}$$

4 Lois continues

1. Définitions

• On appelle densité de probabilité f sur un intervalle I une fonction satisfaisant aux conditions suivantes : f est continue sur I , f est positive sur I et

$$\int_I f(x) dx = 1.$$

• Étant donnée une densité de probabilité, la loi de probabilité correspondante continue associe à tout intervalle l'intégrale de la densité sur cet intervalle.

• Soit X une variable aléatoire définie dans un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une densité de probabilité.

La variable X est une variable aléatoire de densité f si quels que soient a et

$$b \text{ de } I \text{ on a } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Les événements sont des réunions finis d'intervalles.

Remarques : $P(X = a) = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$; $P(X \geq b) = 1 - P(X \leq b)$.

En pratique la donnée de f suffit pour étudier les propriétés de X , en particulier f joue le rôle de loi pour X .

L'espérance de X est donnée par $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$ et la variance de X est telle que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

2. Lois continues à densité

• **Lois uniformes sur $[a ; b]$**

On appelle loi uniforme sur un intervalle $[a ; b]$, la loi continue de probabilité dont la densité f est telle que $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour tout x de $[a ; b]$.

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[c ; d]$ inclus dans $[a ; b]$ est

$$\text{égale à } P(c \leq X \leq d) \text{ telle que } P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{dx}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Cas particulier : la loi uniforme sur $[0 ; 1]$ a une densité f telle que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) = 1$.

Dans ce cas la probabilité d'un intervalle connu dans $[0 ; 1]$ est la longueur de cet intervalle.

• **Lois exponentielles (lois de durée de vie sans vieillissement)**

On appelle loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), une loi de densité f telle que $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

$$\text{Pour cette loi, } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt,$$

donc $P(a \leq X \leq b) = [-e^{-\lambda t}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

3. Adéquation à une loi équirépartie

Il s'agit de comparer les fréquences obtenues pour une expérience aléatoire sur un échantillon, avec un modèle d'équiprobabilité.

Pour cela on considère la distance d entre la distribution des fréquences $(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$ avec les probabilités théoriques $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ si on répète l'épreuve n fois.

$$d^2 = (f_1 - p_1)^2 + \dots + (f_i - p_i)^2 + \dots + (f_n - p_n)^2.$$

Le nombre d^2 doit être « petit » pour qu'il y ait compatibilité entre les données empiriques et celles théoriques.

Plus le nombre de tirages est grand, plus la distribution des fréquences est adéquate avec la loi de probabilité et plus d^2 sera faible.

Si $d^2 \leq \frac{2}{n}$, alors il y a adéquation à une loi équirépartie.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Représenter graphiquement f et montrer que f détermine une loi de probabilité P , puis calculer $P\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right)$.

Corrigé commenté

La fonction f est définie, positive et continue sur $\mathbb{R}$.

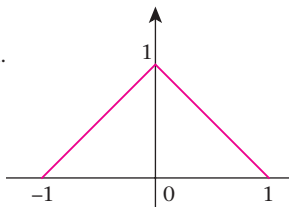
Sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = 0$

et $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$ car f est paire donc,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \left[\frac{-x^2}{2} + x \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1.$$

f détermine donc une loi de probabilité P et :

$$P\left(\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\right) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{8}.$$



1 Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie d'une fonction à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; +\infty[$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

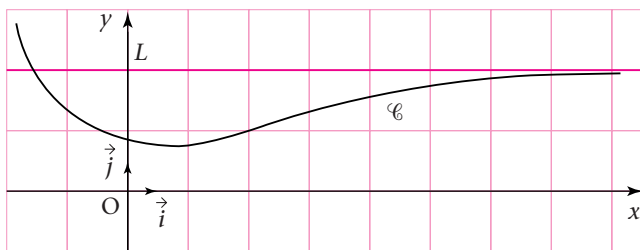
La fonction f tend vers L quand x tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{+\infty} f = L$.

On définit de même la limite en $-\infty$ d'une fonction f définie sur un intervalle $]-\infty ; b]$.

● Interprétation géométrique

Si $\lim_{+\infty} f = L$, alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ dans un voisinage de l'infini.



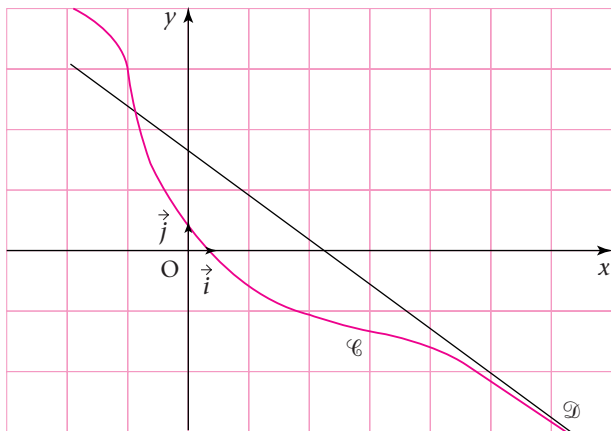
2. Limite infinie d'une fonction à l'infini

Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, on a $f(x) > A$ pour x assez grand.

On définit de même la limite en $-\infty$.

● Interprétation géométrique

Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et si f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim_{+\infty} h = 0$, alors la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ dans un voisinage de $+\infty$.



Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par $f(x) = x - 4 + \frac{4x-9}{x^2-4}$.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la représentation graphique de f .

Corrigé commenté

$f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = x - 4 + h(x)$ avec $h(x) = \frac{4x-9}{x^2-4}$.

Montrons que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$.

$$h(x) = \frac{x\left(4 - \frac{9}{x}\right)}{x\left(x - \frac{4}{x}\right)} = \frac{4 - \frac{9}{x}}{x - \frac{4}{x}} \text{ car } x \neq 0.$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{4}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{9}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{9}{x}\right) = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x}\right) = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0.$$

Donc la droite d'équation $y = x - 4$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ dans un voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2 Limite d'une fonction en a

1. Limite finie d'une fonction en a

Soit un réel a .

Une fonction f admet une limite L en a si, tout intervalle ouvert contenant L , contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou bien $\lim_a f = L$.

2. Limite infinie d'une fonction en a

Soit un réel a .

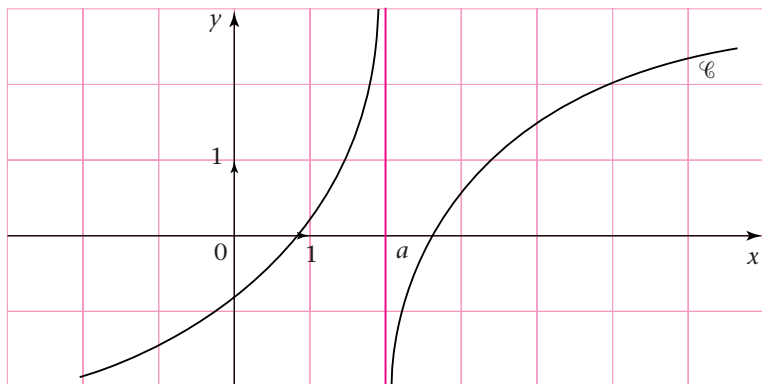
Une fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si, quel que soit un réel $A > 0$, tout intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim_a f = +\infty$.

On définit de même $\lim_a f = -\infty$.

3. Interprétation géométrique

Si $\lim_a f = \infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f .



Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f = +\infty$ en utilisant les définitions précédentes.

Corrigé commenté

Soit un réel A strictement positif et quelconque.

Indication : on cherche un nombre $h > 0$ tel que, pour $1 - h < x < 1 + h$ on ait $f(x) > A$.

Pour que $f(x) > A$, il suffit que $\frac{1}{(x-1)^2} > A$,

soit $(x-1)^2 < \frac{1}{A}$ car $(x-1)^2 > 0$. Donc $|x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}$.

On peut prendre h tel que $h = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et alors pour $1 - \frac{1}{\sqrt{A}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{A}}$ on a

$f(x) > A$. Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{3x^3 - 4x + 1}{x^2 - 1}$.

Déterminer, si elles existent, les limites en -1 et en 1 de la fonction f .

Corrigé commenté

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ < -1}} (x^2 - 1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > -1}} (x^2 - 1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc par quotient } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ < -1}} f(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > -1}} f(x) = -\infty.$$

La fonction f n'a pas de limite en -1 , mais elle a une limite à gauche de -1 égale à $+\infty$ et une limite à droite de -1 égale à $-\infty$.

• Pour la valeur 1 , le numérateur et le dénominateur s'annulent, donc 1 est racine de chacun des polynômes.

D'où, $3x^3 - 4x + 1 = (x-1)(3x^2 + 3x - 1)$ et $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Après simplification, on obtient $f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 1}{x+1}$ car $x \neq 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 3x - 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{2}.$$

La fonction f a une limite en 1 égale à $\frac{5}{2}$.

3 Continuité d'une fonction

1. Définitions

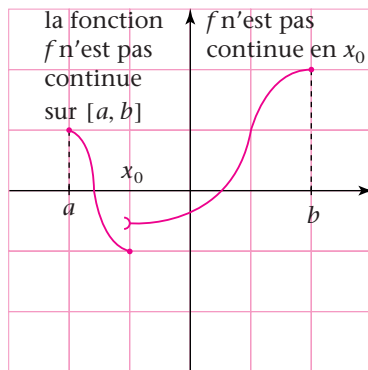
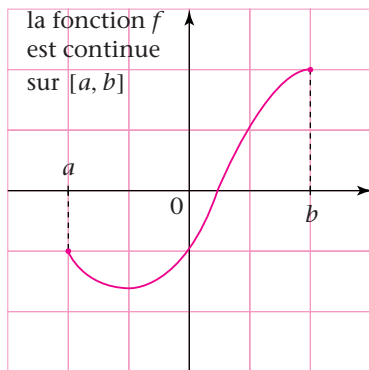
- Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

La fonction f est continue en a si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.

f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ ou bien } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

La fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de I . Graphiquement cela se traduit par la possibilité de tracer une courbe sans lever le crayon de la feuille.



2. Propriétés

- Toutes les fonctions construites comme somme, produit, quotient ou composées de fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues.
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque : si f est définie sur $[a, b]$, si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, alors f est continue sur $[a, b]$.

Exemple d'application

Étudier et représenter graphiquement la fonction partie entière de x sur $[-2 ; 3]$ notée $E : x \mapsto E(x)$.

Corrigé commenté

Conseil : la partie entière d'un nombre est le plus grand entier inférieur à ce nombre.

$$E(3,7) = 3 ; E(2) = 2 ; E(-3,7) = -4.$$

Pour tout $x \in [n ; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) = n$.

Donc sur $[-2 ; 3]$, $\forall x \in [-2 ; -1[; E(x) = -2$

$$\forall x \in [-1 ; 0[; E(x) = -1$$

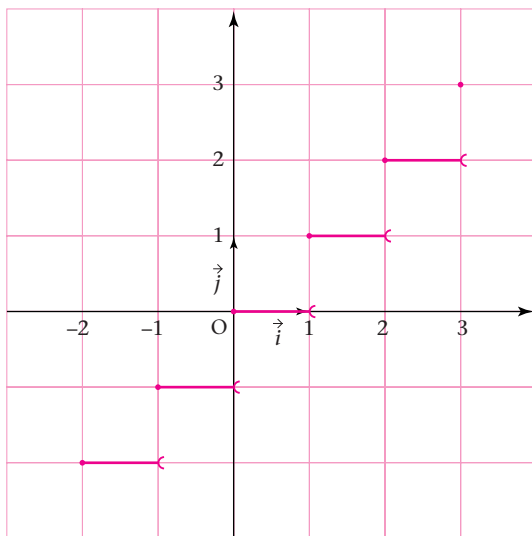
$$\forall x \in [0 ; 1[; E(x) = 0$$

$$\forall x \in [1 ; 2[; E(x) = 1$$

$$\forall x \in [2 ; 3[; E(x) = 2$$

$$E(3) = 3.$$

La fonction partie entière est donc une fonction constante par intervalle, discontinue pour chaque valeur entière de x donc discontinue sur $[-2 ; 3]$.



Remarque : la discontinuité de la fonction partie entière est traduite par le fait qu'en la représentant, le crayon quitte le papier pour chaque valeur entière. La courbe n'est pas tracée d'un seul trait.

4 Opérations sur les limites

1. Limite de la somme de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	ℓ	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	ℓ'	∞	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de $f+g$	$\ell+\ell'$	∞	∞	$+\infty$	$-\infty$		

Il y a une indétermination mise en évidence par la case bleue.

2. Limite du produit d'une fonction par un réel α non nul

Les nombres ℓ et α sont des réels.

Limite de f		ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$	Limite de αf	$\alpha \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$	Limite de αf	$\alpha \ell$	$-\infty$	$+\infty$

3. Limite du produit de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	0
Limite de g	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
Limite de fg	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

4. Limite du quotient de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	$\ell' \neq 0$	0	$\ell' \neq 0$	∞	0	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	0	∞			

Il y a deux cas d'indétermination si le numérateur et le dénominateur ont une limite infinie, ou bien s'ils ont tous les deux une limite nulle.

5. Limite de la composée de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et si $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1; -2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 5x - 3}{-x^2 - x + 2}.$$

Déterminer la limite de f en 1.

Corrigé commenté

Conseil : le numérateur et le dénominateur s'annulent pour $x = 1$. Cela signifie que 1 est racine des polynômes $-2x^3 + 5x - 3$ et $-x^2 - x + 2$, donc chacun d'eux est factorisable par $(x - 1)$.

La division euclidienne de $-2x^3 + 5x - 3$ par $x - 1$ s'écrit :

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 + 5x - 3 & x - 1 \\ -(-2x^3 + 2x^2) & -2x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2x^2 + 5x - 3 & \\ -(-2x^2 + 2x) & \\ \hline 3x - 3 & \\ -(3x - 3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

d'où $-2x^3 + 5x - 3 = (x - 1)(-2x^2 - 2x + 3)$,

de même $-x^2 - x + 2 = (x - 1)(-x - 2)$, or $x \neq 1$ d'où $f(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 3}{-x - 2}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 - 2x + 3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (-x - 2) = -3$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{3}.$$

5 Théorème des valeurs intermédiaires

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f , définie et continue sur un intervalle I et deux réels a et b de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b , tel que $f(c) = k$.

Autre énoncé : si la fonction f est définie et continue sur un intervalle I , l'image de l'intervalle I par f est un intervalle.

2. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Remarque : on peut étendre ce corollaire à une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. On déterminera alors les intervalles images en calculant les limites aux bornes des intervalles.

3. Intervalles images

On note J l'intervalle image par f de I .

I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$J = [f(a), \lim_b f[$	$J =]\lim_b f, f(a)]$
$]a, b]$	$J =]\lim_a f, f(b)]$	$J = [f(b), \lim_a f[$
$]a, b[$	$J =]\lim_a f, \lim_b f[$	$J =]\lim_b f, \lim_a f[$

Exemples d'application

❶ Soit la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Déterminer l'image J par f de l'ensemble $] -1 ; +\infty[$.

Corrigé commenté

Indication : pour étudier les variations de f et ses limites aux bornes de son ensemble de définition on peut écrire f sous la forme $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$.

$$\forall x \in]-1 ; +\infty[, f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$(x+1)^2 > 0 \text{ donc } f'(x) > 0.$$

Donc sur $]-1 ; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante.

- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > -1}} (x+1) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ > 0}} \frac{-2}{X} = -\infty$, donc par composition et par addition :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ > -1}} f(x) = -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{X} = 0$, donc par composition et par addition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

L'ensemble J image de I par f est tel que f étant strictement croissante et continue sur $]-1 ; +\infty[$ on ait $J = \left] \lim_{x \rightarrow -1} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$ soit $J =]-\infty ; 2[$.

- 2 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 7x - 1 = 0$.

Corrigé commenté

Conseil : avant de faire tout calcul, il faut voir s'il y a des racines évidentes, si l'expression est factorisable et si enfin on reconnaît une identité remarquable.

Cet inventaire étant négatif, on appelle f la fonction telle que :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 7. \quad \Delta = 64 - 84 = -20 \text{ donc } \Delta < 0, \text{ par suite } f'(x) > 0$$

(signe du coefficient 3 de x^2).

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$(x^3 - 4x^2 + 7x - 1) = x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \text{ car } x \neq 0 \text{ au voisinage de } +\infty \text{ et } -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et zéro appartient à $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

6 Théorèmes de comparaison

Les résultats ci-dessous restent valables si les fonctions sont des suites.

Si on connaît le comportement de certaines fonctions, on peut en déduire par comparaison le comportement d'autres fonctions.

Dans le tableau ci-dessous, la notation a représente aussi bien un réel que l'infini.

Relations liant les fonctions dans un voisinage de a	Comportement de $g(x)$ et de $h(x)$	Comportement de $f(x)$
$f(x) \leq g(x)$	$\lim_a g = -\infty$	$\lim_a f = -\infty$
$f(x) \geq g(x)$	$\lim_a g = +\infty$	$\lim_a f = +\infty$
$ f(x) - \ell \leq g(x)$ ℓ est un réel	$\lim_a g = 0$	$\lim_a f = \ell$
$f(x) \leq g(x)$	$\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$	$\lim_a f \leq \lim_a g$ $\ell \leq \ell'$
$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$	$\lim_a h = \lim_a g = \ell$ ℓ est un réel	Théorème des gendarmes $\lim_a f = \ell$

Exemples d'application

❶ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Corrigé commenté

Conseil : la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, et pourtant la fonction f en a une.

En effet : $f(x) - 1 = \frac{\sin x}{x}$ d'où $|f(x) - 1| = \frac{|\sin x|}{|x|}$.

Or $|\sin x| \leq 1$ donc $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, donc par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

- 2 Montrer que pour tout réel strictement positif :

$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-\sin x}{x+1} \leq 1.$$

En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x-\sin x}{x+1}$.

Corrigé commenté

$$\text{Soit } \alpha = \frac{x-\sin x}{x+1} - 1 = \frac{x-\sin x - x - 1}{x+1} = \frac{-\sin x - 1}{x+1}.$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x+1 > 0$ et $-2 \leq -\sin x - 1 \leq 0$ donc $\alpha \leq 0$ soit $\frac{x-\sin x}{x+1} \leq 1$.

$$\text{Soit } \beta = \frac{x-\sin x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{-\sin x + 1}{x+1}.$$

Or, $0 \leq -\sin x + 1 \leq 2$ et $x+1 > 0$ d'où $\beta \geq 0$ soit $0 \leq \frac{x-\sin x}{x+1} - \frac{x-1}{x+1}$

$$\text{donc } \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x-\sin x}{x+1} \leq 1.$$

$$\text{Or } \frac{x-1}{x+1} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ car } x \neq 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$.

- 3 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{\sin n + n^2}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n^2-1}{n+1}$.

2. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

Corrigé commenté

1. $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $n^2 - 1 \leq \sin n + n^2 \leq n^2 + 1$

or $n+1 > 0$ sur $\mathbb{N}$, donc $\frac{n^2-1}{n+1} \leq \frac{\sin n + n^2}{n+1} \leq \frac{n^2+1}{n+1}$.

Par suite pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{n^2-1}{n+1}$.

$$2. \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{1}{n}} \text{ car } n \neq 0 \text{ dans un voisinage de } +\infty.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty,$$

donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-1}{n+1}\right) = +\infty$.

Par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

1 Nombre dérivé, interprétations géométrique et cinématique

1. Nombre dérivé

- Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, dont a est un élément.

Le nombre dérivé en a de f est la limite finie, si elle existe, du taux d'accroissement de f en a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ ou bien en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Remarque : si la limite du taux d'accroissement en a est infinie ou n'existe pas, alors la fonction f n'est pas dérivable en a .

- Dire que la fonction f est dérivable en a , de nombre dérivé $f'(a)$ signifie que pour tout h suffisamment proche de zéro, on peut écrire :

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$$

où φ est une fonction telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$.

On en déduit une approximation de $f(a + h)$ appelée **approximation affine tangente** : $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$.

2. Interprétation géométrique

• Interprétation du nombre dérivé

Soit $A(a ; f(a))$ un point de la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f , dérivable en a .

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A en A à la courbe $\mathcal{C}$.

La tangente T_A a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

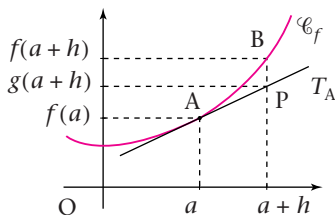
• Interprétation de l'approximation affine tangente

Soit g la fonction affine dont la représentation graphique est T_A :

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ d'où } g(a + h) = hf'(a) + f(a).$$

Le réel $g(a + h)$ est l'approximation affine tangente de f en a .

L'approximation affine tangente consiste à approcher $f(a+h)$ (ordonnée de B) par $g(a+h)$ (ordonnée de P), quand h est voisin de zéro, donc lorsque le point B sur $\mathcal{C}_f$ est voisin de P sur T_A .



3. Interprétation cinématique du nombre dérivé

Un mobile se déplace sur un axe. On note $x(t)$ la distance qu'il a parcourue à l'instant t .

La vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est la limite des vitesses moyennes $\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

Cette limite est donc le nombre dérivé de la fonction x en t_0 .

Exemple d'application

1. La fonction $f: x \mapsto x\sqrt{x} + x + 1$, est-elle dérivable en zéro ?
2. En déduire une approximation affine tangente de $f(0,002)$.

Corrigé commenté

1. **Indication :** on commence par expliciter le taux d'accroissement de f en zéro et on simplifie cette écriture si possible.

$$h \neq 0; \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(h\sqrt{h} + h + 1) - 1}{h} = \frac{h\sqrt{h} + h}{h} = \sqrt{h} + 1.$$

Indication : ensuite on calcule la limite de ce taux quand h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{h} + 1) = 1, \text{ on en déduit que } f \text{ est dérivable en zéro et que } f'(0) = 1.$$

2. $f(0+h) \approx f(0) + hf'(0)$ soit $f(h) \approx 1 + h \times 1$; or $h = 0,002$,
donc $f(0,002) \approx 1 + 0,002$ soit $f(0,002) \approx 1,002$.

Remarque : la calculatrice donne $f(0,002) \approx 1,002089$ l'approximation trouvée par le calcul est très bonne, facile à trouver sans faire beaucoup de calculs.

2 Différentielle d'une fonction en un point

1. Lien entre dérivabilité et accroissements de x et de y

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

Si f est dérivable en a , alors $f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0$.

On pose $h = x - a = \Delta x$ et $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a)$.

Donc $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0$,

soit

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x\varphi(\Delta x)$$

2. Application et notation différentielles

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I contenant un réel a :

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0$.

On appelle différentielle de f en a l'application : $h \mapsto hf'(a)$.

On note $dy = f'(a)dx$.

3. Lien entre dérivation et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a . Si f est dérivable en a , il existe donc un nombre dérivé $f'(a)$ et une fonction φ tels que :

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0$ donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

Cela signifie que la fonction f est continue en a .

Toute fonction dérivable en a est continue en a .

Si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

Exemples d'application

- ① Quelle est l'application différentielle de la fonction $f: x \mapsto x^3 - x + 2$ en 3 ?

Corrigé commenté

Indication : on commence par expliciter le taux d'accroissement de f en 3 et on simplifie cette écriture si possible.

$$\text{Si } h \neq 0; \quad \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^3 - (3+h) + 2 - (27 - 3 + 2)}{h}$$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{27 + 9h^2 + 27h + h^3 - 3 - h + 2 - 26}{h}$$

$$\text{soit} \quad \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{h^3 + 9h^2 + 26h}{h} = h^2 + 9h + 26.$$

Indication : ensuite on calcule la limite de ce taux quand h tend vers zéro :

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 9h + 26) = 26.$$

Donc la fonction différentielle de f en 3 est telle que $dy = 26dx$.

2 Quelle est l'application différentielle de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ en 1 ?

Corrigé commenté

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1 > 0$.

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2 + 1} - \sqrt{2}}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + 2h + 2} - \sqrt{2}}{h} \text{ avec } h \neq 0.$$

Indication : il y a indétermination de la limite en zéro, donc on change la forme en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur.

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{h^2 + 2h + 2 - 2}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 2} + \sqrt{2})} = \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2 + 2h + 2} + \sqrt{2})}$$

$$\text{soit} \quad \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 2} + \sqrt{2}} \text{ car } h \neq 0,$$

$$\text{or} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{\sqrt{h^2 + 2h + 2} + \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{\sqrt{2}}{2} dx.$$

3 Soit la fonction f affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 3[\\ f(x) = -x + 8 & \text{si } x \in [3; +\infty[. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 3 ?

Corrigé commenté

$$f(x) = -3 + 8 = 5 \text{ et } f(3+h) = 2(3+h) - 1 = 5 + 2h \text{ où } h < 0.$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ < 0}} f(3+h) = 5.$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ < 0}} f(3+h) = f(3) = 5 \text{ donc la fonction } f \text{ est continue en 3.}$$

3 Fonction dérivée et fonctions primitives

1. Fonction dérivée

Si une fonction f est définie et dérivable pour tout réel a d'un intervalle I , alors f est dérivable sur cet intervalle.

La fonction qui à tout réel a associe, s'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ est la fonction dérivée notée f' de la fonction f .

La fonction f' est telle que : $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f'(x)$$

La fonction f' est aussi appelée dérivée première de f .

Si la fonction f' est dérivable sur un intervalle I , sa dérivée est la dérivée seconde de f notée f'' et ainsi de suite ; on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f .

2. Fonctions primitives

● Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F , dérivable sur I , telle que pour tout réel x de I on ait $F'(x) = f(x)$.

● Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

● Deux de ces primitives diffèrent d'une constante.

Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I :

$$(F' = G' = f) \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

● Si F est une primitive de f sur un intervalle I , l'ensemble des primitives est l'ensemble des fonctions : $I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto F(x) + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

● Si la fonction f est la fonction nulle sur I , alors les primitives de f sur I sont des fonctions constantes.

● Il existe une et une seule primitive F , d'une fonction f continue sur un intervalle I , telle que pour un réel a donné on ait $F(a) = b$.

Théorème : Si la fonction f est continue sur un intervalle I , et si a et un réel de I , la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

Exemples d'application

- 1 Montrer, sans calcul de dérivées, que les fonctions f et g , définies sur l'intervalle $] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ et $g(x) = \frac{x^2-x-3}{x+2}$, sont deux primitives d'une même fonction.

Corrigé commenté

Indication : sans calculer les dérivées f' et g' , pour montrer que f et g sont deux primitives d'une même fonction, il suffit de montrer que $f(x) - g(x)$ est une constante.

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2-x-3}{x+2} = \frac{x^2-1-x^2+x+3}{x+2}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{x+2}{x+2}, \text{ or } x \neq -2 \text{ donc } f(x) - g(x) = 1.$$

Les fonctions f et g sont bien des primitives d'une même fonction.

En effet $f'(x) - g'(x) = 0$ soit $f'(x) = g'(x)$ pour tout réel x de $] -2 ; +\infty[$.

- 2 Parmi les fonctions F , G et H suivantes, quelles sont les primitives d'une même fonction sur $] -\infty ; -1[$?

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1}; G(x) = 4 - \frac{2}{x+1} \text{ et } H(x) = \frac{5x-3}{2x+2}.$$

Corrigé commenté

En calculant les dérivées des fonctions F , G et H , celles qui ont la même dérivée sont des primitives d'une même fonction sur un même intervalle (voir le tableau des dérivées page 114).

$$\bullet F'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\bullet G'(x) = -2 \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\bullet H(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{5x-3}{x+1} \right) \text{ d'où } H'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{5(x+1) - (5x-3)}{(x+1)^2} \right) = \frac{8}{2(x+1)^2}$$

$$\text{donc } H'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}.$$

Les fonctions F et G ont la même dérivée sur $] -\infty ; -1[$, donc elles sont des primitives de $x \mapsto \frac{2}{(x+1)^2}$.

4 Dérivées et primitives des fonctions usuelles

Tableau des dérivées et primitives usuelles :

	Intervalle I	
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$I = \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + b \quad (a \in \mathbb{R}), (b \in \mathbb{R})$	$I = \mathbb{R}$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^n$	$n \in \mathbb{Z}^* \begin{cases} I = \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ I = \mathbb{R}_-^* \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*, I = \mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} - \{-1\} \begin{cases} I = \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ I = \mathbb{R}_-^* \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}, I = \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$I = \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \ln x $	$I = \mathbb{R}_+^* \text{ ou } I = \mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$I = \mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \cos x$	$I = \mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \tan x$	$I =]k\frac{\pi}{2}; (k+1)\frac{\pi}{2}[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ou } x \mapsto 1 + \tan^2 x$

Remarque : à l'aide du tableau, on obtient pour chaque fonction une primitive ; celle pour laquelle la constante est nulle.

Exemples d'application

❶ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \sin x + \frac{1}{2}$.

1. Sachant que la dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des fonctions dérivées, calculer la dérivée de la fonction f .

2. Sachant que U , V et W sont des primitives de u , v et w sur I , alors $U + V + W$ est une primitive de $u + v + w$ sur I ; calculer la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Corrigé commenté

1. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - \cos x$.

2. **Indication** : pour déterminer la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, on commence par écrire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Ce sont toutes les fonctions : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \cos x + \frac{1}{2}x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Indication : la détermination de F revient à trouver la valeur de C telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

soit $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + C = -1$ d'où $C = -\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} - 1$;

donc $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} - 1$.

❷ Calculer les dérivées respectives des fonctions f et g suivantes définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} - 2\cos x + x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^4 - 5x^2 + 3x}{x}.$$

Corrigé commenté

Conseil : Avant d'entreprendre des calculs il faut voir si un changement d'écriture permet des calculs plus faciles.

$f(x) = x^{-3} + 2\sqrt{x} - 2\cos x + x^3$ et $g(x) = 2x^3 - 5x + 3$ d'où :

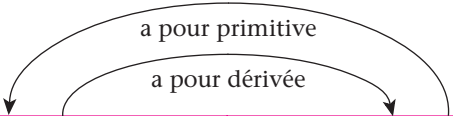
$f'(x) = -3x^{-4} + \frac{2}{2\sqrt{x}} + 2\sin x + 3x^2$ et $g'(x) = 6x^2 - 5$ donc :

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sin x + 3x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = 6x^2 - 5.$$

5 Opérations sur les fonctions dérivables

Tableau des dérivées et des primitives des fonctions dérivables.

Soit deux fonctions u et v définies et dérivables sur un même intervalle I , dont les dérivées sont continues sur I .



$u + v$	$u' + v'$
kf $k \in \mathbb{R}^*$	kf'
uv	$u'v + uv'$
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*, u(x) \neq 0 \text{ si } n < 0)$	$nu^{n-1} \times u'$
$\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z} - \{-1\}, u(x) \neq 0 \text{ si } n < -1)$	$u' \times u^n$
$\frac{u}{v}$ $(v(x) \neq 0)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$(u' \circ v) \times v'$
e^u	$u'e^u$
$\frac{u'}{u}$ $(u(x) \neq 0)$	$\ln u $

Remarque : à l'aide du tableau on obtient pour chaque fonction une primitive ; celle pour laquelle la constante est nulle.

Exemples d'application

- 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 3)^4.$$

- Calculer la dérivée de f .
- Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé commenté

1. **Indication :** avant d'effectuer des calculs, il faut reconnaître une des formes « types » permettant de dériver.

$f = u^4$ avec $u(x) = 2x - 3$ donc $f' = 4u^3u'$ avec $u'(x) = 2$; par suite pour tout réel x on a $f'(x) = 4(2x - 3)^3 \times 2$ soit $f'(x) = 8(2x - 3)^3$.

2. **Indication :** de même on doit reconnaître une forme « type » pour chercher une primitive.

On pose $u(x) = 2x - 3$ donc $u'(x) = 2$ d'où $f = \frac{1}{2}u'u^4$ donc les primitives de f sont de la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u^5}{5} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ donc pour tout réel x $F(x) = \frac{1}{10}(2x - 3)^5 + C$.

- 2 Calculer la fonction dérivée de la fonction g définie et dérivable pour tout $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) par $g(x) = \tan(4x + 2)$.

Corrigé commenté

Indication : on reconnaît l'écriture d'une fonction composée $u \circ v$ avec $u(x) = \tan x$ et $v(x) = 4x + 2$.

Or, $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$ avec $u'(x) = \tan^2 x + 1$ et $v'(x) = 4$,
donc $g'(x) = [\tan^2(4x + 2) + 1] \times 4$,

soit $g'(x) = 4 \tan^2(4x + 2) + 4$.

6 Applications de la dérivation

1. Sens de variation

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée f' est (strictement) positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points isolés où elle s'annule, alors f est (strictement) croissante sur I .
- Si la dérivée f' est (strictement) négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de points isolés où elle s'annule, alors f est (strictement) décroissante sur I .
- Si la dérivée f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

Remarque : ces résultats deviennent faux si I n'est pas un intervalle.

2. Extremum d'une fonction

- Si la fonction f est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si f' s'annule et change de signe en x_0 , alors f admet un extremum (maximum ou minimum) en x_0 . Cet extremum est égal à $f(x_0)$.
- Si la fonction f est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si f' admet un extremum en x_0 , alors f' s'annule en x_0 .

Remarque : si la dérivée s'annule en x_0 , sans changer de signe, alors la fonction n'admet pas d'extremum en x_0 .

Toutefois la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale.

Exemples d'application

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^3(x+3)$.

Corrigé commenté

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Indication : pour étudier le sens de variation de f , on calcule sa dérivée f' .

La fonction f est le produit de deux fonctions :

$$f = uv \text{ avec } u(x) = (x+1)^3 \text{ et } v(x) = x+3.$$

$$f' = u'v + uv', \text{ or } u = w^3 \text{ donc } u' = 3w^2w'.$$

$$\text{avec } w(x) = x+1 \text{ et } w'(x) = 1. \text{ De plus, } v'(x) = 1,$$

d'où $f' = 3w^2w'v + w^3$.

Pour tout réel x , $f'(x) = 3(x+1)^2(x+3) + (x+1)^3$.

Indication : on veut étudier le signe de $f'(x)$ donc il faut factoriser $f'(x)$;

$$f'(x) = (x+1)^2[3(x+3) + (x+1)]$$

donc $f'(x) = (x+1)^2(3x+9+x+1)$

soit $f'(x) = (x+1)^2(4x+10) = 2(x+1)^2(2x+5)$.

Indication : on remarque que $2(x+1)^2 \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x+5$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+5 = 0 \text{ ou } x+1 = 0) \Leftrightarrow \left(x = -\frac{5}{2} \text{ ou } x = -1\right)$$

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]-\infty ; -\frac{5}{2}[\text{ et } f'\left(-\frac{5}{2}\right) = 0 \text{ donc :}$$

f est strictement décroissante sur $] -\infty ; -\frac{5}{2}]$.

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]-\frac{5}{2} ; -1[\cup]-1 ; +\infty[\text{ et } f'(-1) = 0 = f'\left(-\frac{5}{2}\right) \text{ donc la fonction}$$

f est strictement croissante sur $[-\frac{5}{2} ; +\infty[$.

La dérivée f' s'annule et change de signe en $-\frac{5}{2}$ donc f admet un minimum égal à $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ soit $-\frac{27}{16}$.

La dérivée f' s'annule sans changer de signe en -1 , donc f n'admet pas d'extremum en -1 .

La courbe admet deux tangentes horizontales d'équations respectives :

$$y = -\frac{27}{16} \text{ et } y = 0.$$

7 Résolution de l'équation $f(x) = k$

1. Tableau de variation

Après avoir étudié les variations d'une fonction f et avoir calculé les limites aux bornes de son ensemble de définition, on regroupe ces résultats dans un tableau de variation.

On conviendra que dans ces tableaux, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

2. Corollaire ou théorème dit des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue, strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$.

Remarque : on étendra ce corollaire aux cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant connues.

On pourra approcher la solution de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou par balayage à l'aide de la calculatrice.

Exemple d'application

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

Corrigé commenté

Indication : on vérifie que l'expression proposée n'est pas factorisable, qu'elle n'est pas le développement d'une identité remarquable, que l'équation n'a pas de solutions évidentes $(-2; -1; 0; 1; 2)$. Si toutes ces investigations sont négatives, alors on considère la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$.

Résoudre l'équation proposée revient à résoudre $f(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3.$$

Indication : le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.

Le discriminant est $\Delta = 64$ et les racines sont $x_1 = \frac{10+8}{6} = 3$ et $x_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$.

Le signe d'un trinôme du second degré est celui du coefficient de x^2 sauf entre les racines.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]3; +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{3}[$ et sur $]3; +\infty[$.

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{3}; 3]$, donc la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle car elle ne s'annule qu'en deux points isolés, $\frac{1}{3}$ et 3.

On détermine sans difficulté que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$.

On dresse le tableau des variations de f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{67}{27}$	$\searrow -7$	$\nearrow +\infty$	

Indication : les flèches obliques dans le tableau traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur chacun des intervalles $]-\infty; \frac{1}{3}]; [\frac{1}{3}; 3]$ et $]3; +\infty[$.

Nous utilisons le corollaire du théorème dit des valeurs intermédiaires.

Or, zéro appartient à chacun des intervalles images $]-\infty; \frac{67}{27}]; [-7; \frac{67}{27}]$ et $[-7; +\infty[$. Donc $f(x) = 0$ a trois solutions :

α dans $]-\infty; \frac{1}{3}]$, β dans $[\frac{1}{3}; 3]$ et γ dans $]3; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice on trouve que :

$$-0,4 < \alpha < -0,3; \quad 1,2 < \beta < 1,3 \quad \text{et} \quad 4,1 < \gamma < 4,2.$$

1 Définition et représentation graphique de la fonction logarithme népérien

1. Définition

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie, continue sur $]0 ; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est la primitive, définie sur $]0 ; +\infty[$, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

2. Conséquences

- La fonction logarithme népérien, dont la dérivée est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$, est strictement croissante. Elle est continue et bijective.

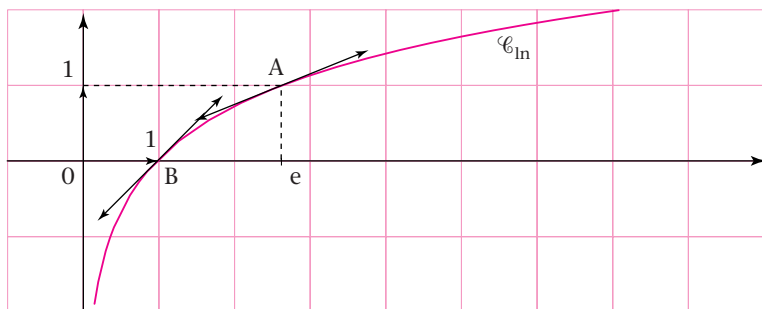
$$\bullet \ln'(x) = \frac{1}{x};$$

$$\ln 1 = 0.$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$			
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$



- On appelle e le nombre réel tel que $\ln e = 1$.

Au point $A(e; 1)$, la tangente a pour équation $y = \frac{1}{e}x$ et au point $B(1; 0)$ la tangente a pour coefficient directeur 1.

Exemple d'application

Déterminer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction :

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right).$$

Corrigé commenté

Indication : on commence par déterminer l'ensemble D de définition de la fonction f .

$f(x)$ existe si, et seulement si, $\frac{x+3}{x-1} > 0$; le signe de ce quotient est celui d'un trinôme du second degré de racines 1 et -3 .

Par suite, $\frac{x+3}{x-1} > 0$ si, et seulement si, $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

Donc $D =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

Indication : on étudie ensuite les limites de f aux bornes de D .

$$\bullet \frac{x+3}{x-1} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \text{ pour } x \neq 0 \text{ d'où } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ donc par}$$

composition $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ dans un voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ < -3}} \frac{x+3}{x-1} = 0^+ \text{ et } \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ > 0}} \ln X = -\infty, \text{ donc par composition } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ < -3}} f(x) = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} (x-1) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4 \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} \left(\frac{x+3}{x-1} \right) = +\infty \text{ et}$$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc par composition $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ > 1}} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à D .

En définitive, il y a 3 asymptotes d'équations respectives :

$$y = 0; x = -3 \text{ et } x = 1.$$

2 Propriétés et autres fonctions

1. Propriétés de la fonction logarithme népérien

Conditions	Propriétés
$a > 0$ $b > 0$	$\ln ab = \ln a + \ln b$ (propriété caractéristique des fonctions logarithmes) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ $\ln a^\alpha = \alpha \ln a$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (fonction « $\ln$ » bijective) $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (fonction « $\ln$ » strictement croissante) $\ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$; $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
$0 < x < 1$	$\ln x < 0$
$x > 1$	$\ln x > 0$

2. Dérivées et primitives

• Soit une fonction u , définie et dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout x de I , $u(x)$ soit strictement positif :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u} \quad . \quad \text{Si } u(x) \neq 0 \quad (\ln \circ |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

• Soit une fonction u telle que $u(x) \neq 0$ sur un intervalle I dont la dérivée u' est dérivable sur I .

Les primitives sur I de $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions $\ln |u| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Cette fonction a la même variation et les mêmes propriétés opératoires que la fonction logarithme népérien.

$$\log 1 = 0 ; \quad \log 10 = 1 ; \quad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}.$$

Cette fonction est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir des puissances de 10.

4. Autres limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad (\text{à redémontrer à chaque fois}).$$

$\ln(1+h) \approx h$ au voisinage de zéro.

5. Résolution de l'équation $\ln x = a$

Pour chaque réel a , l'équation $\ln x = a$ admet une solution unique dans $]0 ; +\infty[$.

Cette solution est e^a et se lit exponentielle de a ou e exposant a .

Exemple d'application

Soit la fonction $f: x \mapsto \ln \frac{x^2+3}{x-1}$ définie sur $]1 ; +\infty[$.

Déterminer les variations de f .

Corrigé commenté

La fonction f est telle que $f = \ln \circ u$ avec $u(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

$$\text{D'où } f' = \frac{u'}{u} \text{ avec } u'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}{\frac{x^2+3}{x-1}} = \frac{(x^2-2x-3)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+3)}.$$

Or sur $]1 ; +\infty[$; $x-1 > 0$; $(x-1)^2 > 0$ et $x^2+3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que le trinôme x^2-2x-3 dont les racines sont -1 et 3 .

Par suite $f'(x) > 0$ si, et seulement si, $x \in]3 ; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ si, et seulement si, $x \in]1 ; 3]$.

Or $f'(3) = 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]3 ; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]1 ; 3]$.

Remarque : ne pas oublier que f n'est définie que sur un ensemble contenu dans D_f . Dans ce cas, $D_{f'} = D_f =]1 ; +\infty[$.

1 Introduction à la fonction exponentielle

1. Équation différentielle

● On appelle **équation différentielle** une égalité dans laquelle figurent une fonction et ses dérivées successives. Les solutions d'une telle équation sont des fonctions.

● Théorème

Il existe une unique fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, qui soit solution de l'équation différentielle $f' = kf$. Cette fonction est la fonction exponentielle notée $\exp$.

● **Conséquences :** $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp' x = \exp x$
 $\exp 0 = 1$

On note : $\exp x = e^x$.

2. Propriétés

● Propriété fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}) \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

soit $\exp(x+y) = (\exp x) \times (\exp y)$

ou bien $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

● Quels que soient les réels x et y :

$$\exp x > 0 \Leftrightarrow e^x > 0$$

$$\frac{\exp x}{\exp y} = \exp(x-y) \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$\frac{1}{\exp y} = \exp(-y) \Leftrightarrow e^{-y} = \frac{1}{e^y}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad (\exp x)^n = \exp(nx) \Leftrightarrow (e^x)^n = e^{nx}.$$

3. Conséquences

La fonction exponentielle base e , dont la dérivée est elle-même, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue et bijective.

$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}), \quad \exp x = \exp y \Leftrightarrow x = y$ (bijection)

$\exp x < \exp y \Leftrightarrow x < y$ (stricte croissance).

Exemples d'application

❶ En utilisant la définition de la fonction exponentielle et la propriété caractéristique, démontrer que pour tout réel x : $\exp x > 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

Corrigé commenté

• Pour montrer que $\exp x > 0$, il est nécessaire de prouver qu'il n'existe pas de réel x_0 tel que $\exp x_0 = 0$.

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $\exp x_0 = 0$, alors pour tout réel x :
 $\exp x = \exp(x_0 + (x - x_0)) = \exp x_0 \times \exp(x - x_0) = 0$ donc la fonction « exp » serait la fonction nulle, ce qui contredit la définition.

Par ailleurs $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right)$.

Soit $\exp(x) = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2$ d'où $\exp x > 0$.

• $\exp 0 = 1 \Leftrightarrow \exp(x + (-x)) = 1 \Leftrightarrow \exp x \times \exp(-x) = 1$
 soit :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \quad \text{car } \exp x \neq 0.$$

❷ Simplifier les écritures des nombres a et b suivants :

$$a = \frac{\exp(-3) \times (\exp(3))}{(\exp 1)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\exp(-x) \times (\exp x)^2}{\exp x}.$$

Corrigé commenté

Il est souvent plus facile d'utiliser la notation e^x pour $\exp x$.

$$a = \frac{e^{-3} \times e^3}{(e^1)^2} = \frac{e^0}{e^2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{1}{e^2}.$$

$$b = \frac{e^{-x} \times (e^x)^2}{e^x} = e^{-x} \times e^{2x} \times e^{-x} = e^0 \quad \text{d'où} \quad b = 1.$$

2 Étude de la fonction exponentielle base e

1. Étude et représentation graphique

● La fonction exponentielle base e est continue et bijective et elle admet la fonction logarithme népérien pour fonction réciproque.

• $x \in \mathbb{R}$ et $\exp x = y \Leftrightarrow x = \ln y$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$

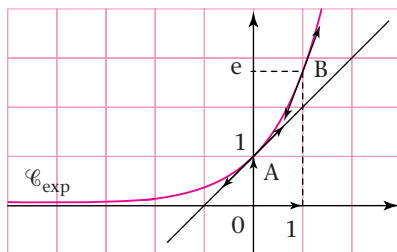
d'où $\ln(\exp x) = x$ et $\exp(\ln x) = x$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction « exp ».

• $e \approx 2,718$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	+	+	+
$\exp$	0	1	e	$+\infty$



Remarques

La tangente en A à $\mathcal{C}_{\exp}$ a pour équation $y = x + 1$ et la tangente en B a pour équation $y = ex$.

Les courbes représentant $\mathcal{C}_{\ln}$ et $\mathcal{C}_{\exp}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Limites remarquables et croissances comparées

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\exp x \approx 1 + x$ dans un voisinage de zéro.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = 0$; avec $\alpha > 0$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$; avec $\alpha > 0$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$; avec $\alpha > 0$.

• Si $\alpha > 0$ et $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.

Exemples d'application

- 1 Soit f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = e^{\ln|x|} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{|\ln x|}.$$

- Indiquer les ensembles de définition de f et g .
- Suivant les valeurs de x , donner une écriture de $f(x)$ et $g(x)$ sans barre de valeur absolue.

Corrigé commenté

1. La fonction « $\ln$ » est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, or $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$.

2. Si $x > 0$, alors $|x| = x$, donc $f(x) = e^{\ln x} = x$.

Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, donc $f(x) = e^{\ln(-x)} = -x$.

Rappel : la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

- $|\ln x| = \ln x \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$|\ln x| = -\ln x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \text{ donc :}$$

$$\text{si } x \geq 1, g(x) = e^{\ln x} = x;$$

$$\text{si } 0 < x \leq 1, g(x) = e^{(-\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

- 2 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Corrigé commenté

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ donc $f(x)$ existe bien.

$$\bullet \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}, \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\bullet \text{ D'après le cours, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3 Autres fonctions

1. Dérivées et primitives

- Soit une fonction u , définie et dérivable sur un intervalle I .

$$(\exp \circ u)' = u' \times (\exp \circ u).$$

- Les primitives des fonctions $u' \exp(u)$ sont les fonctions $(\exp \circ u) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. Fonctions exponentielles base a

- Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base « a » est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ qui admet pour réciproque la fonction exponentielle de base a notée $x \mapsto a^x$.

Rappel : $\ln_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ avec $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

• Propriétés

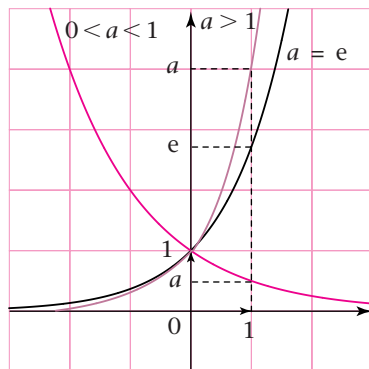
- $a^0 = 1$; $a^1 = a$; $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad a^{x+y} = a^x \times a^y$.
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx} = (a^x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- Pour $x > 0$ et $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$.

$a > 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto a^x$	0	1	a	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x \mapsto a^x$	$+\infty$	1	a	0



3. Fonctions puissances

- Pour $x > 0$ et pour tout réel α , on appelle **fonctions puissances** les fonctions $x \mapsto x^\alpha$.

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Remarque : on définit la fonction racine $n^{\text{ième}}$, noté $\sqrt[n]{}$, comme la réciproque sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto x^n$ avec $n \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

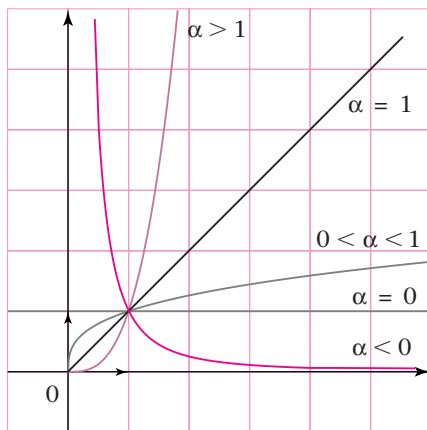
● Propriétés

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$ et $y > 0$:

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha; \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}; \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

$\alpha < 0$		
x	0	$+\infty$
$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$		-
$x \mapsto x^\alpha$	$+\infty$	$\rightarrow 0$

$\alpha > 0$		
x	0	$+\infty$
$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$		+
$x \mapsto x^\alpha$	$0 \rightarrow$	$+\infty$



Exemple d'application

Simplifier les nombres suivants : $\frac{e^3 \sqrt[4]{e}}{\sqrt[3]{e^2}}$; $(\sqrt[5]{e})^{\frac{5}{3}}$.

Corrigé commenté

Indication : on utilise les propriétés des racines nièmes.

$$\bullet \frac{e^3 \sqrt[4]{e}}{\sqrt[3]{e^2}} = \frac{e^3 e^{\frac{1}{4}}}{(e^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{e^{3+\frac{1}{4}}}{e^{\frac{2}{3}}} = e^{\frac{13}{4} - \frac{2}{3}} = e^{\frac{31}{12}} = \sqrt[12]{e^{31}}.$$

$$\bullet (\sqrt[5]{e})^{\frac{5}{3}} = \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

4 Équations différentielles du premier ordre

1. Équations différentielles du premier ordre sans second membre

Ce sont les équations différentielles dont le second membre est nul et qui lient une fonction et sa dérivée première.

Ces équations sont de type $y' - ay = 0 \Leftrightarrow y' = ay$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : il existe une unique solution s'il y a une condition initiale $y_0 = f(x_0)$. Cette condition permet de déterminer la constante C .

2. Équations différentielles du premier ordre avec second membre

Ce sont des équations différentielles dont le second membre est une fonction quelconque.

Pour résoudre une telle équation, on cherche une solution particulière de même forme que le second membre, puis on la résout en suivant toutes les indications du texte.

Exemple d'application

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2x^3 - 4x + 7$.

- Déterminer un polynôme P du troisième degré solution de (E).
- Soit (E') l'équation différentielle sans second membre telle que $y' + 2y = 0$. Résoudre l'équation (E').
- Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si, et seulement si, $g - P$ est solution de (E').
Écrire les solutions g de (E).
- Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = -\frac{1}{4}$.

Corrigé commenté

- Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ avec } a \neq 0.$$

P est solution de (E) si, et seulement si, $P' + 2P = 2x^3 - 4x + 7$.

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

P est solution de (E) si, et seulement si, quel que soit x de $\mathbb{R}$:

$$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c)x + c + 2d = 2x^3 - 4x + 7.$$

Par identification des deux polynômes, quel que soit x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + 2b = 0 \\ 2b + 2c = -4 \\ c + 2d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{15}{4} \end{cases}$$

d'où :

$$P(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}.$$

2. (E') : $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$.

Les solutions de (E') sont les fonctions :

$$x \mapsto Ce^{-2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. • La fonction $(g - P)$ est solution de (E') si, et seulement si,

$$(g - P)' + 2(g - P) = 0 \text{ soit } g' + 2g - (P' + 2P) = 0 ;$$

$$\text{soit } (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (g' + 2g)(x) - \left(3x^2 - 3x - \frac{1}{2} + 2x^3 - 3x^2 - x + \frac{15}{2}\right) = 0 ;$$

soit $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (g' + 2g)(x) = 2x^3 - 4x + 7$ ce qui signifie que g est solution de l'équation (E).

• La fonction $g - P$ est solution de (E') signifie que $g(x) - P(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ soit :

$$g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} + Ce^{-2x}.$$

4. Soit f la fonction g particulière telle que

$$f(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad \frac{15}{4} + Ce^0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow C = -4.$$

Par suite :

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4} - 4e^{-2x}.$$

1 Définition et approche géométrique

1. Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

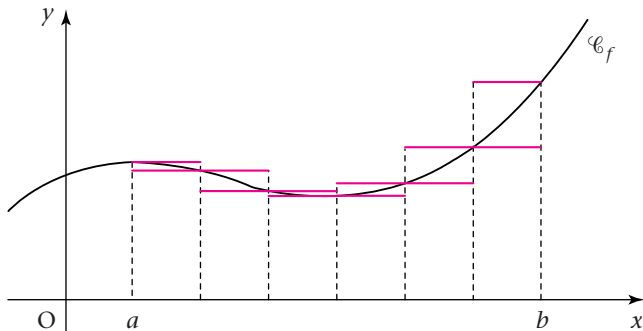
On considère le domaine délimité par la courbe représentant f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'aire de ce domaine, en unités d'aire, est le nombre réel noté $\int_a^b f(x) dx$ et appelé **intégrale de a à b de la fonction f** .

2. Approche géométrique

La fonction f peut être encadrée par deux fonctions en escalier, l'une majorant f et l'autre la minorant.

L'aire du domaine sous la courbe est donc encadrée par deux suites adjacentes d'aires de rectangles associés à une subdivision de $[a, b]$. Si on subdivise de plus en plus finement, ces deux suites convergent vers un même nombre, ce nombre est **l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$** .



3. Généralisation

Si f est continue et négative sur un intervalle $[a, b]$, l'opposée de cette fonction est positive et on peut revenir à la définition précédente.

Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ et $\int_a^b f(x) dx$ représente une aire.

Si $f \leq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ et $\int_a^b f(x) dx$ représente l'opposé d'une aire.

Exemple d'application

On considère la fonction $f: x \mapsto x^2$ sur $[0; 1]$.

On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en segments d'amplitude $\frac{1}{n}$. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$ en utilisant la définition.

Corrigé commenté

Sur $[0; \frac{1}{n}]$, l'aire sous la courbe est encadrée par celle d'un rectangle d'aire nulle associée à $x \mapsto 0$ et par celle d'un rectangle d'aire égale à $\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2$ associée à $x \mapsto \left(\frac{1}{n}\right)^2$.

Et ainsi de suite jusqu'au dernier intervalle $[\frac{n-1}{n}; 1]$, où l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ associée à

$x \mapsto \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ et l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur 1 associée à $x \mapsto 1$.

Donc l'aire sous la courbe représentant f sur $[0; 1]$ est telle que :

$$0 + \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \times 1$$

$$\text{soit } \frac{1}{n^3} [1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n^3} (1 + 2^2 + \dots + n^2).$$

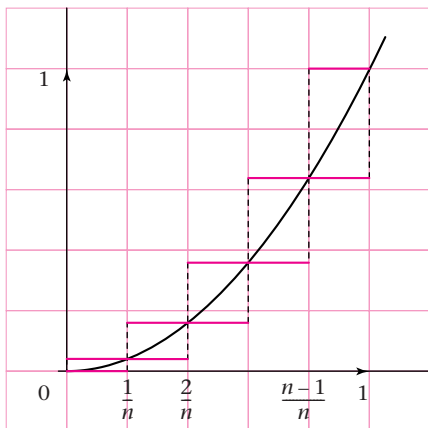
Indication : On rappelle que la somme des carrés des n premiers nombres entiers naturels est $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\text{Donc } \frac{1}{6n^3} (n-1)(n)(2n-1) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1),$$

$$\text{soit } \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2};$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\text{d'où } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$



2 Propriétés des intégrales

1. Propriétés

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

- $\int_a^a f(x) dx = 0$; $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- Linéarité de l'intégrale : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall \beta \in \mathbb{R})$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$
- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Si f est périodique de période T , alors $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

2. Intégrales et inégalités

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

- Si pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Conséquence : Si pour tout x de $[a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$,

alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

- Inégalité de la moyenne

La fonction f étant continue sur $[a, b]$ il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel $x \in [a, b]$, on ait $m \leq f(x) \leq M$ et alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

3. Théorème de la moyenne

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe au

moins un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Le réel $f(c)$ est appelé **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** .

4. Interprétations géométriques

Soit f une fonction continue et positive représentée dans un repère orthogonal.

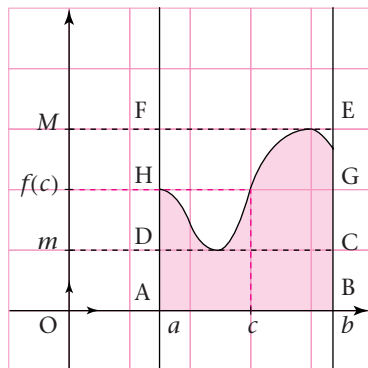
- L'encadrement

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

signifie que l'aire du domaine coloré est minorée par l'aire du rectangle ABCD, et majorée par celle du rectangle ABEF.

- L'égalité $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

signifie que l'aire du domaine coloré est égale à celle du rectangle ABGH.



Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Montrer que f est bornée sur $\left[0; \frac{2}{3}\right]$, en déduire un encadrement de :

$$\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

Corrigé commenté

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = 6x - 2$.

Pour $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$, $6x - 2 \leq 0$ donc f est décroissante et par suite :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(x) \leq f(0) \quad \text{soit} \quad \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1.$$

Pour $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$, $6x - 2 \geq 0$ donc f est croissante et par suite :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1. \quad \text{Donc} \quad \forall x \in \left[0; \frac{2}{3}\right], \quad \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1.$$

D'après le théorème de l'inégalité de la moyenne on a alors :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - 0\right) \leq \int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx \leq 1\left(\frac{2}{3} - 0\right) \quad \text{d'où} :$$

$$\frac{4}{9} \leq \int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx \leq \frac{2}{3}$$

3 Intégration et dérivation

1. Notion de primitive

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et a un réel de I , la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

2. Définition d'une intégrale à l'aide de primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, F une primitive quelconque de f .

Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie, on l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** .

On note $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$.

Remarque : La lettre choisie pour la variable est une variable muette ce qui signifie que : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a)$.

3. Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions définies et deux fois dérivables sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Exemples d'application

❶ Calculer $\int_1^4 \ln x dx$.

Corrigé commenté

On ne connaît pas de primitive de la fonction logarithme, on utilise une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = x. \end{cases}$$

Les fonctions f, g sont dérivables et f' et g' sont continues sur $[1 ; 4]$ donc :

$$\begin{aligned}\int_1^4 \ln x \, dx &= \left[x \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x} \times x \, dx \\ \int_1^4 \ln x \, dx &= \left[x \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 1 \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^4.\end{aligned}$$

Remarque : $\int_1^4 \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^4$ traduit le fait que $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$.

$$\int_1^4 \ln x \, dx = 4 \ln 4 - 4 - \ln 1 + 1 \quad \text{d'où} \quad \int_1^4 \ln x \, dx = 4 \ln 4 - 3.$$

- 2 Calculer le réel I tel que $I = \int_0^3 |x-2| \, dx$.

Corrigé commenté

On commence par écrire $|x-2|$ sans barre de valeur absolue sur $[0 ; 3]$.

Sur $[0 ; 2]$, $|x-2| = -x+2$;

Sur $[2 ; 3]$, $|x-2| = x-2$.

$$\text{Donc } I = \int_0^2 (2-x) \, dx + \int_2^3 (x-2) \, dx$$

soit :

$$I = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 = 4 - 2 + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4 \quad \text{d'où} \quad I = \frac{5}{2}.$$

- 3 Écrire à l'aide d'une intégrale, $\ln x$ pour x réel strictement positif.
Retrouver grâce à cette écriture qui est aussi la définition de la fonction $\ln$, les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Corrigé commenté

La fonction $\ln$ est la primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction inverse qui s'annule en 1, donc :

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

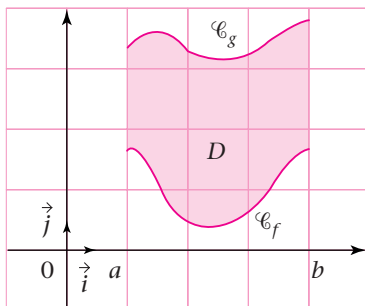
Par définition d'une primitive d'une fonction, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Or sur $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

4 Calculs d'aires et de volumes

1. Calcul d'aire

Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$, telles que pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) \leq g(x)$. L'aire du domaine D coloré, délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale au réel $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$. Ce réel est exprimé en unités d'aire noté u.a.



2. Calcul de volume

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

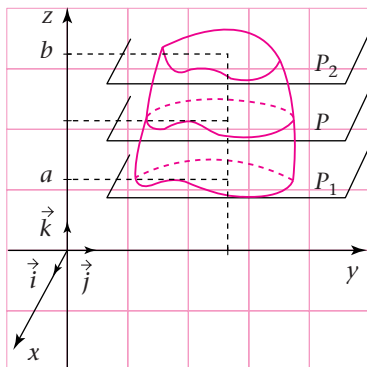
Soit V le volume d'un solide délimité par une surface latérale Σ et deux plans P_1 et P_2 parallèles à $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et de cotes respectives a et b .

Soit le plan P parallèle à P_1 et P_2 de cote z .

Le plan P coupe le solide selon une surface S dont l'aire $\mathcal{S}(z)$ est telle que

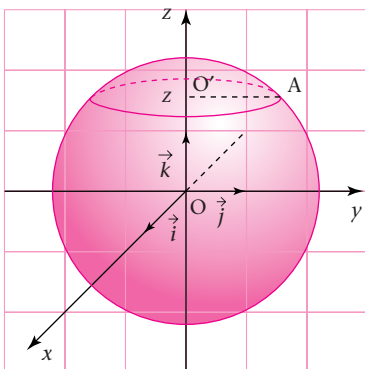
$z \mapsto \mathcal{S}(z)$ soit continue sur $[a, b]$ et alors $V = \int_a^b \mathcal{S}(z) dz$.

Le volume V est exprimé en unités de volume noté u.v.



Exemples d'application

- 1 Calculer le volume V de la boule de centre O et de rayon R , en cm^3 , dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unités graphiques 1 cm.



La section de la boule par le plan P de cote z ($-R \leq z \leq R$) est un disque de rayon $O'A$. Le triangle $OO'A$ est rectangle en O' donc $O'A^2 = OA^2 - O'O^2 = R^2 - z^2$. Soit $\mathcal{S}(z)$ l'aire de ce disque.

$\mathcal{S}(z) = (R^2 - z^2)\pi$ donc, en centimètres cubes :

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \pi R^2 \int_{-R}^R dz - \pi \int_{-R}^R z^2 dz$$

$$V = \pi R^2 \left[z \right]_{-R}^R - \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi R^2 (2R) - \pi \left(\frac{2R^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ cm}^3.$$

- 2 Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de $x \mapsto e^x$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sur $[0; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ subit une révolution d'axe (Ox) .

Quel est le volume du solide déterminé par les plans d'équations $x = 0$, $x = 1$ et engendré par la courbe $\mathcal{C}$?

Corrigé commenté

La section du solide par un plan perpendiculaire à (Ox) est un disque dont l'aire $S(x)$ est telle que $S(x) = \pi(e^x)^2$ soit $S(x) = \pi e^{2x}$.

La fonction S est continue sur $[0; 1]$, donc le volume V en u.v du solide est tel que :

$$V = \int_0^1 S(x) dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1),$$

d'où

$$V = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$$